

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Чубич Владимир Михайлович

АКТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

05.13.17 – Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант  
Денисов В.И.

Новосибирск – 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....</b>	<b>7</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>11</b>
<b>1 Проблема активной параметрической идентификации стохастических динамических систем и задачи диссертационного исследования.....</b>	<b>20</b>
1.1 Теоретические и методологические основы активной параметрической идентификации.....	20
1.1.1 Процедура активной идентификации.....	20
1.1.2 Оценивание неизвестных параметров.....	25
1.1.3 Исходные понятия и результаты теории оптимального эксперимента.....	31
1.1.4 Прямая градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов.....	36
1.1.5 Двойственная градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов.....	38
1.1.6 Построение дискретных оптимальных планов.....	40
1.1.7 Схема процедуры активной параметрической идентификации систем с предварительно выбранной модельной структурой.....	42
1.2 Анализ современного состояния проблемы активной параметрической идентификации стохастических динамических систем.....	42
1.3 Структурно-вероятностное описание моделей.....	45
1.3.1 Модели дискретных систем.....	45
1.3.2 Модели непрерывно-дискретных систем.....	50
1.4 Цель и задачи исследования.....	54
1.5 Выводы.....	55

<b>2</b>	<b>Оценивание параметров моделей стохастических динамических систем.....</b>	<b>56</b>
2.1	Оценивание параметров моделей дискретных систем.....	59
2.1.1	Критерий максимального правдоподобия и алгоритм вычисления его значения для линейных нестационарных моделей.....	59
2.1.2	Критерий максимального правдоподобия и алгоритм вычисления его значения для линеаризованных моделей.....	62
2.1.3	Алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей....	65
2.1.4	Алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линеаризованных моделей.....	69
2.2	Оценивание параметров моделей непрерывно-дискретных систем	72
2.2.1	Особенности алгоритмов вычисления значений критериев максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей.....	72
2.2.2	Особенности алгоритмов вычисления градиентов критериев максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей .....	76
2.3	Выводы.....	81
<b>3</b>	<b>Планирование эксперимента для моделей стохастических дискретных систем.....</b>	<b>82</b>
3.1	Вычисление информационной матрицы Фишера.....	82
3.1.1	Вывод информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей.....	82
3.1.2	Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей.....	96

3.1.3	Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей, полученных в результате линеаризации.....	99
3.2	Планирование входных сигналов.....	100
3.2.1	Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей.....	103
3.2.2	Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей.....	108
3.2.3	Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате временной линеаризации.....	111
3.2.4	Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате статистической линеаризации....	112
3.2.5	Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате статистической линеаризации.....	118
3.2.6	Планирование эксперимента как задача дискретного оптимального управления.....	125
3.2.7	Планирование эксперимента в установившемся режиме для моделей линейных стационарных систем.....	129
3.3	Планирование начальных условий.....	137
3.3.1	Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных моделей.....	139

3.3.2	Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных моделей.....	141
3.3.3	Планирование начальных условий на примере модели процесса изменения температуры в двухкомнатной квартире.....	143
3.4	Выводы.....	147
<b>4</b>	<b>Планирование входных сигналов для моделей стохастических непрерывно-дискретных систем.....</b>	<b>149</b>
4.1	Вычисление информационной матрицы Фишера.....	150
4.1.1	Вывод информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей.....	151
4.1.2	Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей.....	157
4.1.3	Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей, полученных в результате линеаризации.....	160
4.2	Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала.....	163
4.2.1	Дифференцирование информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей.....	163
4.2.2	Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей.....	166
4.2.3	Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате временной линеаризации.....	170
4.3	Выводы.....	171

<b>5</b>	<b>Описание программных комплексов активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе планирования входных сигналов.....</b>	<b>173</b>
5.1	Назначение и общие сведения о программных комплексах.....	174
5.2	Характеристика возможностей и организация программных комплексов.....	175
5.3	Описание интерфейса программных комплексов.....	177
5.4	Выводы.....	191
<b>6</b>	<b>Примеры активной параметрической идентификации стохастических динамических систем.....</b>	<b>192</b>
6.1	Активная параметрическая идентификация дискретных систем....	193
6.1.1	Идентификация системы с применением линеаризации во временной области.....	193
6.1.2	Идентификация системы с применением статистической линеаризации.....	198
6.1.3	Идентификация системы с использованием решения задачи дискретного оптимального управления.....	203
6.1.4	Идентификация линейной стационарной системы на основе планирования входных сигналов в установившемся режиме.....	210
6.2	Активная параметрическая идентификация нелинейной непрерывно-дискретной системы с применением линеаризации во временной области.....	214
6.3	Выводы.....	219
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>220</b>
	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>223</b>
	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А. Справки о внедрении результатов диссертационной работы.....</b>	<b>244</b>

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\theta$	- вектор неизвестных параметров размерности $s$ ;
$\Omega_\theta$	- область допустимых значений параметров;
$\theta^*$	- вектор истинных значений параметров;
$\hat{\theta}$	- оценка вектора параметров $\theta$ , найденная без планирования эксперимента;
$\hat{\theta}^*$	- оценка вектора параметров $\theta$ , найденная с планированием эксперимента;
$\delta_\theta$	- относительная ошибка оценивания в пространстве параметров при пассивной идентификации;
$\delta_\theta^*$	- относительная ошибка оценивания в пространстве параметров при активной идентификации;
$\Xi$	- данные наблюдений;
$\chi(\theta; \Xi)$	- критерий идентификации, критерий максимального правдоподобия;
$\xi$	- непрерывный нормированный план эксперимента  $\xi = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \quad i=1, 2, \dots, q;$
$\xi^*$	- оптимальный по некоторому критерию непрерывный нормированный план эксперимента;
$M(\xi)$	- информационная матрица плана;
$X[M(\xi)]$	- критерий оптимальности;
$M(\alpha)$	- информационная матрица Фишера одноточечного плана (при планировании входных сигналов $\alpha = U$ , при планировании начальных условий $\alpha = \bar{x}(t_0) = E[x(t_0)]$ );

- $U$  - входной сигнал;
- $$U = \begin{cases} U_0^{N-1} = \{u(t_k), k = 0, 1, \dots, N-1\}, & \text{если время дискретное,} \\ u(t), t \in [t_0, t_N], & \text{если время непрерывное;} \end{cases}$$
- $U_i$  -  $i$ -й входной сигнал;
- $u(t_k), u(t)$  -  $r$ -мерный вектор управления (входа) в соответствующий момент времени;
- $x(t_k), x(t)$  -  $n$ -мерный вектор состояния в соответствующий момент времени;
- $\hat{x}(t_{k+1} | t_k)$  - оценка  $x(t_{k+1})$  по измерениям  $Y_1^k$  (оценка одношагового прогнозирования);
- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$  - оценка одношагового прогнозирования состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1})$  - оценка  $x(t_{k+1})$  по измерениям  $Y_1^{k+1}$  (оценка фильтрации);
- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  - оценка фильтрации состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $w(t_k), w(t)$  -  $r$ -мерный вектор шума системы в соответствующий момент времени;
- $y(t_{k+1})$  -  $m$ -мерный вектор измерения (выхода) в момент времени  $t_{k+1}$ ;
- $\hat{y}(t_{k+1} | t_{k+1})$  - оценка  $y(t_{k+1})$  по измерениям  $Y_1^{k+1}$  при  $\theta = \hat{\theta}$ ;
- $\hat{y}^*(t_{k+1} | t_{k+1})$  - оценка  $y(t_{k+1})$  по измерениям  $Y_1^{k+1}$  при  $\theta = \hat{\theta}^*$ ;
- $Y, Y_1^N$  - выходной сигнал,  
 $Y = Y_1^N = \{y(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ ;
- $Y_{ij}$  -  $j$ -я реализация выходного сигнала, соответствующая входному сигналу  $U_i$ ;

- $\delta_Y$  - относительная ошибка оценивания в пространстве откликов при пассивной идентификации;
- $\delta_Y^*$  - относительная ошибка оценивания в пространстве откликов при активной идентификации;
- $L(\Theta; Y_1^N)$  - функция правдоподобия;
- $v(t_{k+1})$  -  $m$ -мерный вектор шума измерения в момент времени  $t_{k+1}$ ;
- $\varepsilon(t_{k+1})$  -  $m$ -мерный вектор обновления в момент времени  $t_{k+1}$ ;
- $\mu(\alpha, \xi), \eta$  - параметры обобщенной теоремы эквивалентности (п. 1.1.3);
- $\xi_v$  - дискретный нормированный план эксперимента
- $$\xi_v = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ \frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v} \end{array} \right\}, \alpha_i \in \Omega_{\alpha}, i=1, 2, \dots, q;$$
- $\Omega_U$  - область допустимых входных сигналов;
- $\Omega_{\bar{x}}(t_0)$  - область допустимых начальных условий;
- $\nabla_v g(v, \gamma)$  - градиент скалярной функции  $g$  по аргументу  $v$
- $$\nabla_v g(v, \gamma) = \left[ \frac{\partial g(v, \gamma)}{\partial v_1}, \frac{\partial g(v, \gamma)}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial g(v, \gamma)}{\partial v_n} \right]^T;$$
- $E[\cdot]$  - оператор математического ожидания;
- $R_n$  - вещественное линейное пространство, состоящее из  $n$ -мерных векторов-столбцов;
- $R_{m \times n}$  - множество вещественных матриц, содержащих  $m$  строк и  $n$  столбцов;
- $\|\cdot\|$  - векторная или матричная норма
- $$\|a^T\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}, \text{ если } a^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n);$$

$$\|A\| = n \cdot \max_{i,j} |\alpha_{ij}|, \text{ если } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix};$$

- $A^T$  - матрица, транспонированная к матрице  $A$ ;  
 $A^{-1}$  - матрица, обратная к невырожденной матрице  $A$ ;  
 $SpA$  - след матрицы  $A$ ;  
 $\det A$  - определитель матрицы  $A$ ;  
 $I$  - единичная матрица;  
 $\delta_{ki}$  - символ Кронекера;  
 $\delta(\bullet)$  - дельта-функция Дирака;
- ДУ - дифференциальное уравнение;  
 ИМФ - информационная матрица Фишера;  
 МАВ - максимум апостериорной вероятности;  
 ММП - метод максимального правдоподобия;  
 МНК - метод наименьших квадратов;  
 ОМП - оценка максимального правдоподобия;  
 ПК-I - программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем;  
 ПК-II - программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем;  
 ПК-III - программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нестационарных линейных дискретных систем;

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность исследования.**

В настоящее время математическое моделирование играет фундаментальную роль в науке и технике и является одним из активно развивающихся перспективных научных направлений в области информатики.

Проблема идентификации, связанная с построением математических моделей динамических систем по экспериментальным данным, относится к одной из основных проблем теории и практики автоматического управления. Ее качественное решение способствует эффективному применению на практике современных математических методов и наукоемких технологий, например, при расчете и проектировании систем управления подвижными (в том числе авиационно-космическими) и технологическими объектами, построении прогнозирующих моделей (например, в экономике и бизнес-процессах), конструировании следящих и измерительных систем.

Первоначально методология построения динамических моделей развивалась в рамках пассивного подхода, при котором идентификация проводится в режиме нормальной эксплуатации исследуемой системы. Современная теория включает в себя также методы активной идентификации, предполагающие подачу на вход исследуемой системы определенным образом синтезированных управляющих сигналов. Например, в конечно-частотном методе оценивания параметров линейных стационарных моделей непрерывных или дискретных систем, развиваемом А.Г. Александровым и Ю.Ф. Орловым, тестирующий сигнал представляет собой сумму гармоник, число которых не превышает размерности пространства состояний.

Применение теории планирования экспериментов при параметрической идентификации динамических систем предоставляет исследователю дополнительные эффективные возможности в получении качественной модели. Связанное с этим научное направление развивается достаточно интенсивно как в на-

шей стране, так и за ее пределами. Не смотря на достигнутый определенный прогресс в этой области, можно отметить, что в настоящий момент рассмотрены и решены далеко не все вопросы, относящиеся к проблеме активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе планирования эксперимента. Данное обстоятельство позволяет считать актуальной разработку соответствующего математического и программного обеспечения.

### **Степень разработанности проблемы.**

Проблеме активной параметрической идентификации динамических систем на основе планирования эксперимента посвящено большое число публикаций в нашей стране и за ее пределами. Среди этих трудов доминирующее положение занимают работы, посвященные вопросам планирования входных сигналов для моделей передаточных функций и моделей в пространстве состояний. Отметим, что в современных исследованиях синтез оптимальных входных сигналов осуществляется как методами теории оптимального планирования эксперимента, так и методами теории оптимального управления.

Анализ современного состояния проблемы активной параметрической идентификации стохастических динамических систем показал, что наиболее значительный прогресс в ее решении достигнут применительно к линейным стационарным моделям и к моделям (в общем случае нелинейным) с детерминированными уравнениями состояний. Этому способствовали, в частности, труды таких признанных специалистов, как А.Ж. Абденов, Ю.П. Адлер, В.Г. Горский, В.И. Денисов, Э.К. Лецкий, В.Н. Овчаренко, А.А. Попов, А.М. Талалай в нашей стране и Г. Гудвин, М. Зейроп, Л. Льюнг, Р. Мехра, Р. Пейн, Л. Пронзато, Э. Уолтер за рубежом. Указанная проблема не рассматривалась для стохастических линейных нестационарных и нелинейных моделей с вхождением неизвестных параметров в уравнения состояния и измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы шумов системы и измерений. В данной диссертационной работе решается проблема активной параметрической идентификации преимущественно для таких моделей.

### **Предмет исследования.**

Предмет исследования диссертационной работы составляет проблема активной параметрической идентификации стохастических динамических систем с предварительно выбранной модельной структурой.

### **Цель и задачи исследования.**

Целью диссертационной работы является разработка математического и программного обеспечения активной параметрической идентификации, ориентированного в основном на работу с гауссовскими линейными нестационарными и линеаризованными дискретными и непрерывно-дискретными моделями, содержащими неизвестные параметры в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе ставятся и решаются следующие основные задачи:

1. Вывод выражений для информационных матриц Фишера (ИМФ) в случае линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей с разработкой соответствующих вычислительных алгоритмов.

2. Вывод соотношений для производных информационных матриц Фишера по компонентам входного сигнала или вектора начальных условий и разработка соответствующих вычислительных алгоритмов.

3. Разработка градиентных процедур планирования входных сигналов или начальных условий, ориентированных на применение как методов теории оптимального планирования эксперимента, так и методов теории оптимального управления.

4. Разработка снабженных пользовательским интерфейсом программных комплексов активной параметрической идентификации стохастических динамических систем.

### **Теоретическая и методологическая база исследования.**

Исследования базируются на корректном использовании результатов теории планирования эксперимента, математической статистики, теории случай-

ных процессов, методов оптимизации, теории автоматического управления и линейной алгебры.

**Научная новизна.** Получены следующие новые результаты, которые **выносятся на защиту:**

1. Впервые выведены выражения ИМФ для гауссовских линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей с параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

2. Разработаны алгоритмы вычисления ИМФ для гауссовских линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей.

3. Разработаны алгоритмы вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных дискретных и непрерывно-дискретных моделей, дискретных моделей, полученных в результате временной или статистической линеаризации и непрерывно - дискретных моделей, полученных в результате временной линеаризации.

4. Разработаны прямые и двойственные градиентные процедуры синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов для гауссовских линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей с параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

5. Разработан алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных дискретных моделей.

6. Разработаны и программно реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры синтеза А- и D- оптимальных начальных условий для линейных нестационарных дискретных моделей с параметрами в уравнениях состояния и измерения, в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

7. Показано, что в случае использования следа ИМФ в качестве критерия оптимальности задача планирования входных сигналов для гауссовских дис-

кретных моделей, полученных в результате временной линейзации, может быть сведена к задаче дискретного оптимального управления. Разработана и программно реализована соответствующая процедура синтеза оптимальных входных сигналов.

8. Разработаны и программно реализованы прямая и двойственная процедуры синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов для установившегося режима гауссовских линейных стационарных дискретных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

9. Разработаны снабженные пользовательским интерфейсом программные комплексы ПК-I и ПК-II, предназначенные для активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем соответственно.

Все научные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Исключение составляют алгоритмы вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных непрерывно-дискретных моделей и моделей, полученных в результате временной реализации, разработанные совместно с аспиранткой Новосибирского государственного технического университета Е.В. Филипповой, а также программные комплексы ПК-I и ПК-II.

Программный комплекс ПК-I создан совместно с доцентом кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета О.С. Черниковой. При этом автором разработаны программы вычисления ИМФ и их производных по компонентам входного сигнала, программы нахождения значений критериев максимального правдоподобия и программы построения А- и D-оптимальных входных сигналов. О.С. Черникова разработала программы вычисления градиентов в процедурах оценивания параметров и синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов.

Программный комплекс ПК-II создан совместно с Е.В. Филипповой. В нем автором разработаны программа вычисления ИМФ, программа нахождения

значения критерия максимального правдоподобия и программы построения А- и D-оптимальных входных сигналов. Е.В. Филиппова разработала программу вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала и программы вычисления градиентов в процедурах планирования А- и D-оптимальных входных сигналов.

Проектирование и реализация интерфейса к программным комплексам ПК-I и ПК-II осуществлялись совместно с О.С. Черниковой и Е.В. Филипповой.

### **Практическая ценность и реализация результатов исследования.**

Результаты диссертационных исследований нашли практическое применение в ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет» (хоздоговорные работы на кафедре электропривода и автоматизации промышленных установок, учебный процесс на факультете прикладной математики и информатики) и в Институте фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета (научные исследования и учебный процесс на кафедре математического обеспечения дискретных устройств и систем), что подтверждено соответствующими справками о внедрении.

Разработанные процедуры и алгоритмы реализованы в программных комплексах активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных (ПК-I) и непрерывно-дискретных (ПК-II) систем (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011612716. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). - 2011; Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011612718. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). - 2011), в программном комплексе (ПК-III) активной параметрической идентификации стохастических нестационарных линейных дискретных систем (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612281. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). - 2012).

Диссертационная работа выполнялась в рамках тематических планов НИР НГТУ по заданию Министерства образования и науки Российской Федерации

на 2002-2005 гг. «Математическое моделирование многофакторных объектов на основе наблюдений» (№ 1.1.02), на 2006-2008 гг. «Моделирование статических и динамических многофакторных объектов стохастической природы и исследование вероятностных закономерностей» (№ 1.1.06), на 2009-2010 гг. «Методы и технологии моделирования и планирования экспериментов для исследования сложных многофакторных объектов» (№ 1.1.09), а также являлась частью исследований по ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы» в 2006-2008 гг. (код проекта РНП.2.1.2.43) и федеральной целевой программой «Интеграция науки и высшего образования на 2002-2006 гг.» (код проекта Б0097/1376).

Проведение диссертационных исследований было поддержано грантами Федерального агентства по образованию (государственный контракт от «18» ноября 2009 г. № П2365, научный руководитель Чубич В.М.) и Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт от «05» октября 2010 г. № 14.740.11.0587, научный руководитель Чубич В.М.) в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.»

#### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Содержание диссертации соответствует п.5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

#### **Апробация работы.**

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и симпозиумах: Российская научно-техническая конференция «Информатика и проблемы телекоммуникаций» (г. Новосибирск, 1994 г.); Международные конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (г. Новосибирск, 1994 г., 2010 г.);

Международные научно-технические конференции «Информатика и проблемы телекоммуникаций» (г. Новосибирск, 1995 г., 1997г.); Российско-Корейские Международные Симпозиумы «Наука и технологии» KORUS'2003, KORUS'2004, KORUS'2005 (г. Ульсан, Корея, 2003 г., г.Томск, 2004 г., г. Новосибирск, 2005 г.); Всероссийская научно-практическая конференция «Перспективы развития информационных технологий» (г. Новосибирск, 2010 г.); Международная научно-техническая конференция «Системный анализ и информационные технологии» SAIT'2010 (г. Киев, Украина, 2010г.); Международная конференция IASTED по автоматике, управлению и информационным технологиям «Управление, диагностика и автоматика» ACIT-CDA'2010 (г. Новосибирск, 2010 г.), а также на научных сессиях факультета прикладной математики и информатики ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет».

#### **Публикации.**

Всего по результатам выполненных исследований опубликованы 42 работы, в том числе монография, 20 статей в журналах из Перечня ВАК ведущих рецензируемых научных изданий для опубликования основных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора и кандидата наук, 4 статьи в других журналах и сборниках научных трудов, 12 публикаций в материалах и сборниках трудов Международных и Российских конференций, 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

#### **Структура и объем работы.**

Диссертационная работа состоит из списка основных обозначений и сокращений, введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников из 212 наименований и приложения. Общий объем работы составляет 247 страниц, включая 34 рисунка и 7 таблиц.

Нумерация утверждений, формул, таблиц и рисунков в пределах каждого раздела самостоятельная.

В *первом разделе* дано введение в теорию и методологию активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе

планирования эксперимента. Проведен анализ современного состояния проблемы. Представлено структурно-вероятностное описание рассматриваемых в диссертации математических моделей. Определена цель и поставлены задачи исследования.

Во *втором разделе* рассмотрены алгоритмические аспекты оценивания неизвестных параметров моделей стохастических динамических систем методом максимального правдоподобия.

*Третий и четвертый разделы* посвящены теоретическим и прикладным аспектам планирования эксперимента для моделей стохастических дискретных и непрерывно-дискретных систем соответственно.

В *пятом разделе* приведено описание разработанных программных комплексов активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе планирования входных сигналов.

В *шестом разделе* рассмотрены примеры активной параметрической идентификации стохастических динамических систем.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность д.т.н., профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации В.И.Денисову за постоянную поддержку и внимание к работе.

# **1 Проблема активной параметрической идентификации стохастических динамических систем и задачи диссертационного исследования**

## 1.1 Теоретические и методологические основы активной параметрической идентификации

### 1.1.1 Процедура активной идентификации

Идентификацией динамической системы называется определение структуры и параметров математической модели, обеспечивающих наилучшее совпадение выходных переменных модели и системы при одинаковых входных воздействиях.

Различают задачи идентификации в узком и широком смыслах [1]. В соответствии с [2], можно выделить следующие этапы решения задач идентификации в широком смысле:

- определение класса и характеристик входных воздействий;
- выбор критерия близости модели к системе;
- выбор и определение структуры модели на основании имеющейся априорной информации об исследуемом процессе и определенных эвристических соображений;

- определение параметров модели, оптимальных с точки зрения выбранного критерия идентификации.

Последний этап характерен для задач идентификации в узком смысле и наиболее соответствует реальным условиям проектирования и широко используется в инженерной практике (например, при синтезе оптимальных систем, проектировании самонастраивающихся систем, синтезе регуляторов [3]).

По способу проведения эксперимента, существующие методы идентификации можно разделить на пассивные и активные. При пассивной идентификации для построения математической модели используются реально действующие

щие в системе сигналы и нормальный режим эксплуатации не нарушается. Методы пассивной идентификации достаточно полно описаны, например, в [4-15]. Активная идентификация, напротив, предполагает нарушение технологического режима и подачу на вход изучаемой системы специального тестирующего сигнала. Например, в конечно-частотном методе оценивания параметров линейных стационарных моделей непрерывных или дискретных систем тестирующий сигнал представляет собой сумму гармоник, число которых не превышает размерности пространства состояний [16-18]. В диссертационной работе тестирующий сигнал находится в результате решения экстремальной задачи для некоторого предварительно выбранного функционала от информационной (или дисперсионной) матрицы вектора оцениваемых параметров. Трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, должны в данном случае окупаться повышением качества проводимых исследований. Эффект достигается в результате сочетания традиционных приемов параметрического оценивания с концепцией планирования эксперимента (см. например, [19-28]).

*Процедура активной идентификации* (см. рисунок 1.1) предполагает выполнение следующих основных этапов:

1. Подготовка данных наблюдений

Входные и выходные данные регистрируются в процессе проведения целенаправленных идентификационных экспериментов. Этот этап тесно связан с планированием эксперимента, задача которого состоит в том, чтобы, учитывая возможные ограничения, подготовить максимально информативные данные.

2. Определение структуры математической модели

Это – весьма важная и ответственная часть процедуры идентификации. Определение общей структуры модели и класса уравнений, которыми предполагается описывать наблюдаемый процесс, является задачей структурной идентификации. Подчеркнем, что выбранная модельная структура должна быть идентифицируемой, т.е. позволять по имеющимся экспериментальным данным однозначно находить оценки неизвестных параметров. Исследованию идентифици-

руемости детерминированных линейных стационарных моделей в пространстве состояний посвящена монография [29].

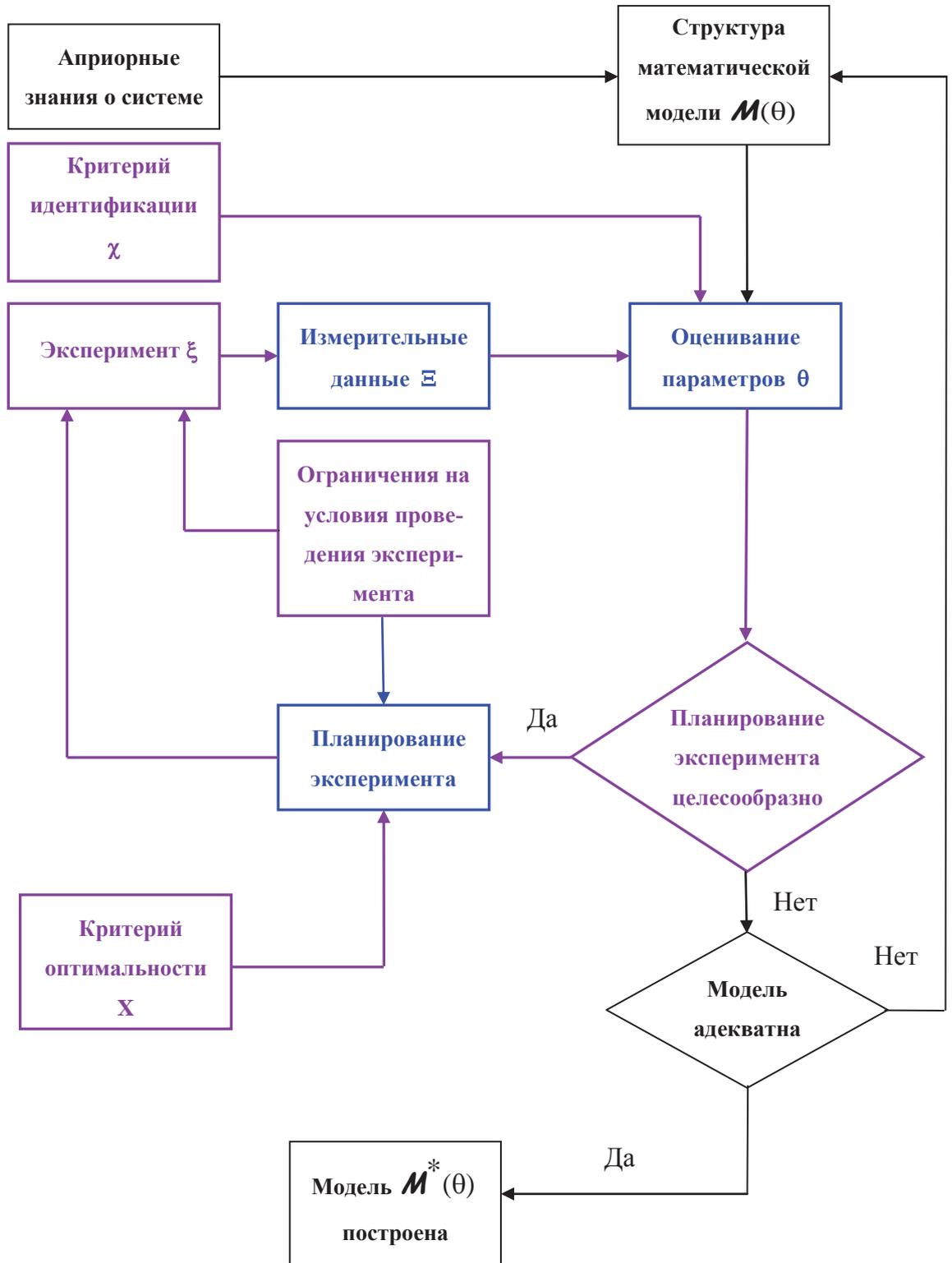


Рисунок 1.1 - Контур идентификации системы

Математические модели динамических систем можно классифицировать по следующим признакам [2]: одномерность – многомерность, линейность – нелинейность, стационарность – нестационарность, непрерывность – дискретность, детерминированность – стохастичность, характер возмущений, форма описания и т.д.

Описание динамической системы в пространстве состояний [1,30-32] позволяет учесть имеющиеся физические представления о механизмах работы системы. В отличие от моделей передаточных функций, которые используются при описании моделей линейных стационарных систем, методы пространства состояний позволяют создать компактную форму представления любых систем: линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных, непрерывных и дискретных. Используемый при этом математический аппарат позволяет создавать мощные программные средства для анализа и синтеза динамических систем.

### 3. Оценивание параметров, входящих в модель

Определение значений параметров по имеющимся экспериментальным данным является задачей параметрической идентификации. При решении этой задачи выбираются критерий идентификации, зависящий от вектора неизвестных параметров, и метод нелинейного программирования для решения соответствующей оптимизационной задачи с ограничениями.

### 4. Планирование эксперимента

При построении моделей динамических систем могут использоваться различные способы управления экспериментом. В простейшем случае управление экспериментом сводится к выбору оптимальных моментов измерений, в более сложном – к планированию оптимальных входных сигналов и начальных условий [24,33,34]. Возможны также варианты смешанных схем.

Планирование эксперимента выполняется путем условной оптимизации определенного критерия оптимальности, в качестве которого выступает выпуклый функционал от информационной (или дисперсионной) матрицы плана.

## 5. Проверка адекватности модели

В результате выполнения предыдущих этапов процедуры активной идентификации получается определенная модель из некоторого класса, которая в соответствии с выбранным критерием качества наилучшим образом воспроизводит экспериментальные данные. Далее необходимо проверить соответствие модели данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели. Проверка адекватности построенной модели осуществляется подачей на ее вход и вход самой системы тестирующих сигналов, которые не использовались для идентификации, и сравнением спрогнозированных по модели и реальных выходных данных (например, по сумме квадратов норм невязок). В случае необходимости осуществления оптимального выбора из нескольких конкурирующих модельных структур следует воспользоваться такими информационными критериями [35,36], как критерий Акаике, критерий Такеучи, критерий Шварца (байесовский критерий).

*Предметом исследования* диссертационной работы является проблема активной параметрической идентификации стохастических динамических систем с предварительно выбранной модельной структурой (структурно-вероятностное описание рассматриваемых моделей выполнено в п. 1.3). В этом случае *процедура активной параметрической идентификации* предполагает выполнение следующих этапов [37-45]:

- а) вычисление оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому плану эксперимента;
- б) синтез на основе полученных оценок оптимального плана эксперимента;
- в) пересчет оценок параметров по измерительным данным, соответствующим синтезированному плану.

### 1.1.2 Оценивание неизвестных параметров

Оценивание неизвестных параметров математической модели осуществляется по данным наблюдений  $\Xi$  в соответствии с критерием идентификации  $\chi$ . Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану  $\xi_v$ .

Критерий идентификации формируется в соответствии с выбранным методом статистического оценивания. Здесь имеет смысл, прежде всего, выделить *метод наименьших квадратов* [6,7,10-15,46-62], не требующий знания закона распределения измерительных данных; *метод максимального правдоподобия* [4,6-11,13,46-57,60-69], использующий знание закона распределения выборочных данных; *метод максимума апостериорной вероятности* или *байесовский подход к оцениванию* [4,6,9-11,13,47,49-51,53,56,64-70], предполагающий случайность оцениваемых параметров и знание законов распределения оцениваемых параметров и измерительных данных.

Структурно-вероятностное описание рассматриваемых в диссертационной работе моделей и детерминированная природа подлежащих оцениванию неизвестных параметров обусловили выбор в качестве метода статистического оценивания *метод максимального правдоподобия*. Известно, что при выполнении некоторых общих условий (условий регулярности), накладываемых на функцию правдоподобия, *оценки максимального правдоподобия* (ОМП) обладают такими важными для практики асимптотическими свойствами как асимптотическая несмещенность, состоятельность, асимптотическая эффективность и асимптотическая нормальность [46-48,57,62-65,67-69].

Оценка  $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)) = \hat{\theta}_N(Y_1^N)$  вектора параметров  $\theta$ , полученная по выборке  $Y_1^N$ , называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [E(\hat{\theta}_N) - \theta] = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N(\theta) = 0.$$

Здесь и далее  $E[\bullet]$  - оператор математического ожидания;  $b_N(\theta)$  - смещение оценки (ОМП не всегда являются несмещенными оценками).

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *состоятельной*, если  $\hat{\theta}_N \rightarrow \theta$  по вероятности при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\|\hat{\theta}_N - \theta\| > \delta\} = 0.$$

Здесь и далее  $\|\bullet\|$  обозначает векторную или матричную норму в зависимости от контекста.

Если  $\hat{\theta}_N$  - оценка вектора параметров  $\theta$  со смещением  $b_N(\theta)$ , то справедливо следующее неравенство информации (неравенство Рао – Крамера - Фреше) для нижней границы ковариационной матрицы  $\hat{\theta}_N$  [47,66,67-69]:

$$E\left[(\hat{\theta}_N - \theta)(\hat{\theta}_N - \theta)^T\right] \geq \left[I + \frac{\partial b_N(\theta)}{\partial \theta}\right] M^{-1}(\theta) \left[I + \frac{\partial b_N(\theta)}{\partial \theta}\right]^T.$$

Здесь  $M^{-1}(\theta)$  - *дисперсионная матрица*, являющаяся обратной к информационной матрице Фишера. *Информационная матрица Фишера* (ИМФ) определяется равенствами [6,11,47,48,67-69]

$$M(\Theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \Theta \partial \Theta^T}\right] = E\left[\frac{\partial \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \Theta^T} \frac{\partial \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \Theta}\right], \quad (1.1)$$

где  $L(\Theta; Y_1^N)$  - функция правдоподобия (плотность совместного распределения измерений  $Y_1^N$ ), рассматриваемая как функция  $\Theta$ .

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *асимптотически эффективной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left[(\hat{\theta}_N - \theta)(\hat{\theta}_N - \theta)^T\right] = M^{-1}(\theta).$$

Таким образом, в асимптотике ОМП обладают наименьшими ковариационными матрицами, совпадающими с  $M^{-1}(\theta)$ .

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *асимптотически нормальной* с матрицей  $\Sigma$ , если распределение  $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$  при  $N \rightarrow \infty$  стремится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсионной матрицей  $\Sigma$ . В случае ОМП  $\Sigma = M^{-1}(\theta)$ .

При заданном критерии идентификации задача нахождения оценок неизвестных параметров заключается в решении задачи нелинейного программирования с ограничениями:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} [\chi(\theta; \Xi)], \quad (1.2)$$

где

$$\Omega_\theta = \left\{ \theta \in R^s \mid \sigma_i(\theta) = 0, i = 1, 2, \dots, d_1; \vartheta_i(\theta) \leq 0, i = 1, 2, \dots, d_2 \right\}. \quad (1.3)$$

Методы нелинейного программирования [71-83] включают в себя большую группу численных методов, многие из которых ориентированы на решение оптимизационных задач соответствующего класса. Выбор того или иного метода обусловлен сложностью вычисления критерия идентификации, необходимой точностью решения, мощностью компьютера и т.д.

Один из традиционных подходов к решению оптимизационной задачи (1.2) заключается в сведении ее к задаче нелинейного программирования без ограничений. Это можно сделать, например, с помощью *метода штрафных функций*, видоизменив целевую функцию с учетом исходных ограничений. Полученная задача решается тем или иным методом безусловной оптимизации.

В зависимости от порядка используемых производных методы безусловной оптимизации подразделяются на методы нулевого, первого и второго порядков.

*Методы нулевого порядка* (поисковые методы) используют только значения целевой функции и носят преимущественно эвристический характер.

Эффективными методами нулевого порядка считаются метод вращающихся координат или метод Розенброка [71,72,75,80], метод деформируемого многогранника или метод Нелдера – Мида [71,75,80,83], метод сопряженных направлений или метод Пауэлла [71,77,80], метод конфигураций или метод Хука – Дживса [71,72,80,83] и разнообразные методы случайного поиска [71,73, 78,80]. Их применение целесообразно в тех случаях, когда другие методы с более высокой скоростью сходимости не способны решить поставленную задачу (например, если минимизируемая функция не является гладкой).

*Методы первого порядка* используют кроме значений целевой функций значения ее производных. Наиболее эффективными среди методов первого порядка являются метод сопряженных градиентов или метод Флетчера-Ривса [71-83] и методы переменной метрики или квазиньютоновские методы (в последних используются аппроксимации матрицы вторых производных или обратной к ней). Хронологически первым квазиньютоновским методом является метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла [71-83], но в настоящее время, по мнению многих исследователей, лучшим квазиньютоновским методом является метод Бройдена-Флетчера-Голдфарба-Шенно [73,74,76,77,79,81-83]. Методы первого порядка целесообразно применять в тех случаях, когда есть возможность вычислять производные минимизируемой функции.

*Методы второго порядка* дополнительно требуют вычисления вторых производных и быстро сходятся для выпуклых целевых функций. К этой группе относятся метод Ньютона и его многочисленные модификации [71-83], среди которых заслуживают внимание методы доверительной области [74,79,82-84], оказавшиеся весьма эффективными для задач высокой размерности, насчитывающих многие сотни и тысячи переменных.

Другой общепринятый подход к решению оптимизационной задачи (1.2) предполагает либо непосредственный (в этом случае мы приходим к *методам возможных направлений*, из которых наиболее популярным является *метод проекции градиента* [71-75,77,78,80,82]), либо опосредованный (через функцию Лагранжа) учет ограничений (1.3). Метод проекции градиента представляет

практический интерес лишь в тех случаях, когда проектирование выполняется легко, что определяется простотой устройства допустимого множества  $\Omega_\theta$  (например,  $\Omega_\theta$  представляет собой шар, координатный параллелепипед, задается системой ограничений в виде линейных равенств и неравенств и т.д.). Методы второй группы, самым передовым и эффективным из которых, по мнению многих современных исследователей, является *метод последовательного квадратичного программирования* (общепринятая аббревиатура – SQP, от английского Sequential quadratic programming), в последнее время развиваются наиболее интенсивно. Этот метод [79,81-83] реализован в рамках пакета Optimization Toolbox [84,85] программной системы MATLAB и используется в диссертационной работе для численного нахождения оценок неизвестных параметров, а также для синтеза непрерывных оптимальных планов см. п. 1.1.4 и п. 1.1.5).

Метод последовательного квадратичного программирования позволяет для гладких функций  $\chi(\theta; \Xi)$ ,  $\{\sigma_i(\theta), i=1,2,\dots,d_1\}$  и  $\{\vartheta_i(\theta), i=1,2,\dots,d_2\}$  организовать решение оптимизационной задачи (1.2) с ограничениями (1.3) в соответствии со следующей схемой:

Шаг 1. Задать  $(\theta^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  и положить  $k=0$ .

Шаг 2. Вычислить

$$g^k = \arg \min_{g \in G^k} \left[ g^T \nabla \chi(\theta^k; \Xi) + \frac{1}{2} g^T H_k g \right], \quad (1.4)$$

где

$$G^k = \left\{ g \in \mathbb{R}^s \left| \begin{array}{l} \sigma_i(\theta^k) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \sigma_i(\theta^k)}{\partial \theta_j} g_j = 0, \quad i=1,2,\dots,d_1; \\ \vartheta_i(\theta^k) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vartheta_i(\theta^k)}{\partial \theta_j} g_j \leq 0, \quad i=1,2,\dots,d_2 \end{array} \right. \right\}; \quad (1.5)$$

$$\nabla \chi[\theta; \Xi] = \left\| \frac{\partial \chi[\theta; \Xi]}{\partial \theta_i} \right\|, \quad i=1,2,\dots,s;$$

$$H_k = \frac{\partial^2 L(\theta^k, \lambda^k, \mu^k; \Xi)}{\partial \theta \partial \theta^T};$$

$$L(\theta, \lambda, \mu; \Xi) = \chi(\theta; \Xi) + \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i \sigma_i(\theta) + \sum_{i=1}^{d_2} \mu_i \vartheta_i(\theta).$$

Если  $\|g^k\| \leq \delta$ , закончить процесс (здесь  $\delta$  - малое положительное число),

в противном случае вычислить отвечающие найденному значению  $g^k$  множители Лагранжа  $\bar{\lambda}^k$  и  $\bar{\mu}^k$ .

Шаг 3. Положить

$$\theta^{k+1} = \theta^k + g^k; \quad \lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k; \quad \mu^{k+1} = \bar{\mu}^k.$$

Шаг 4. Увеличить  $k$  на единицу и перейти на шаг 2.

На шаге 2 решается задача квадратичного программирования (1.4), (1.5), аппроксимирующая в окрестности точки  $\theta^k$  исходную задачу (1.2), (1.3). Использование в целевой функции матрицы  $H_k$  (матрицы вторых производных для функции Лагранжа  $L(\theta, \lambda, \mu; \Xi)$  задачи (1.2), (1.3)) позволяет учесть важную информацию о членах второго порядка в аппроксимации ограничений и приводит к высокой скорости сходимости рассматриваемой процедуры в целом. В пакете Optimization Toolbox для решения задачи (1.4), (1.5) используется метод проекции градиента с аппроксимацией матрицы вторых производных  $H_k$  по формуле Бroyдена-Флетчера-Голдфарба-Шенно.

Применение метода последовательного квадратичного программирования при численном нахождении оценок максимального правдоподобия предполагает разработку алгоритмов вычисления значений, как соответствующего критерия идентификации, так и его градиента.

Весьма полезны при численном нахождении оценок неизвестных параметров методы глобальной оптимизации [86,87].

### 1.1.3 Исходные понятия и результаты теории оптимального эксперимента

При построении моделей динамических систем теория планирования эксперимента позволяет различными способами воздействовать на повышение точности оценивания неизвестных параметров. В диссертационной работе рассматривается *планирование входных сигналов и начальных условий*.

Изложим некоторые основополагающие понятия и результаты теории планирования эксперимента.

Под *дискретным (точным) нормированным планом* эксперимента  $\xi_v$  будем понимать совокупность точек  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ , называемых *спектром плана*, и соответствующих им долей повторных запусков (*весов*):

$$\xi_v = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ \frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v} \end{array} \right\}, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (1.6)$$

Множество планирования  $\Omega_\alpha$  определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Под *непрерывным нормированным планом* эксперимента  $\xi$  условимся понимать совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (1.7)$$

В отличие от дискретного нормированного плана в непрерывном нормированном плане снимается требование рациональности весов  $p_i$ .

В общем случае непрерывный нормированный план  $\xi$  соответствует вероятностной мере  $\xi(d\alpha)$ , заданной на области  $\Omega_\alpha$  и удовлетворяющей условиям неотрицательности и нормировки:

$$\int_{\Omega_\alpha} \xi(d\alpha) = 1, \quad \xi(d\alpha) > 0, \quad \alpha \in \Omega_\alpha.$$

При этом *нормированная информационная матрица*  $M(\xi)$  плана определяется соотношением

$$M(\xi) = \int_{\Omega_{\alpha}} M(\alpha) \xi(d\alpha). \quad (1.8)$$

Для плана (1.7) интеграл в (1.8) переходит в сумму, т.е.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(\alpha_i), \quad (1.9)$$

где  $M(\alpha_i)$  – информационные матрицы точек спектра плана, вычисляющиеся для каждого значения  $\alpha_i$  в соответствии с равенствами (1.1).

Поскольку для рассматриваемых в диссертационной работе моделей информационные матрицы точек плана и сам оптимальный план зависят от неизвестных параметров, в дальнейшем будем иметь в виду исключительно *локально – оптимальное планирование*.

**Теорема 1.1** [34,88-94]. Нормированные информационные матрицы обладают следующими свойствами:

1. Для любого непрерывного нормированного плана  $\xi$  информационная матрица  $M(\xi)$  - вещественная, симметричная, неотрицательно - определенная матрица порядка  $s \times s$  ( $s$  – количество неизвестных параметров).
2. Множество матриц  $M(\xi)$ , соответствующее всем возможным нормированным планам (1.7), является выпуклым. Если множество планирования  $\Omega_{\alpha}$  замкнуто, то и множество информационных матриц замкнуто.
3. Для любого непрерывного нормированного плана  $\xi$  всегда найдется дискретный план (1.6)  $\xi_v$ , спектр которого содержит не более чем  $q = \frac{s(s+1)}{2} + 1$  точек и нормированная информационная матрица  $M(\xi_v)$  которого совпадает с информационной матрицей  $M(\xi)$  плана  $\xi$ .

Последнее свойство важно с практической точки зрения. Оно позволяет заменить непрерывный нормированный план, обладающий теми или иными

экстремальными показателями информационной матрицы, столь же эффективным дискретным планом.

Подчеркнем, что в [88,89,91,93,94] приведено универсальное доказательство теоремы 1.1, применимое как к статическим, так и к динамическим моделям.

Выбранный определенным образом план эксперимента позволяет повысить точность оценивания неизвестных параметров. Будем судить о качестве плана  $\xi$  по значению некоторого функционала от информационной матрицы  $M(\xi)$  или соответствующей ей дисперсионной матрицы  $D(\xi)$ . Перечислим наиболее важные критерии, отражающие точность оценивания неизвестных параметров [19-25].

План  $\xi^*$  называется *A – оптимальным*, если его дисперсионная матрица имеет наименьший след, т.е.

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \text{Sp} M^{-1}(\xi) = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \text{Sp} D(\xi). \quad (1.10)$$

A – оптимальный план позволяет найти оценки неизвестных параметров с минимальной средней дисперсией. При этом эллипсоид рассеивания имеет минимальную сумму квадратов длин осей и наименьшую длину диагоналей параллелепипеда, описанного около этого эллипсоида.

План  $\xi^*$  называется *D – оптимальным*, если

$$\xi^* = \arg \max_{\xi \in \Omega_\xi} \det M(\xi) = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} [-\ln \det M(\xi)] = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \det D(\xi). \quad (1.11)$$

Для D – оптимального плана объем эллипсоида рассеивания оценок параметров наименьший.

План  $\xi^*$  называется *E – оптимальным*, если он минимизирует (максимизирует) максимальное (минимальное) собственное значение дисперсионной (информационной) матрицы, т.е.

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \max_i \lambda_i [D(\xi)] = \arg \max_{\xi \in \Omega_\xi} \min_i \lambda_i [M(\xi)],$$

где  $\lambda_i$  - собственное значение матрицы  $D(\xi)$  или  $M(\xi)$ .  $E$  – оптимальный план минимизирует длину максимальной оси эллипсоида рассеивания оценок параметров.

При активной параметрической идентификации динамических систем в качестве критериев оптимальности используются также (см., например, [95,96]) след информационной матрицы  $SpM(\xi)$  или след взвешенной информационной матрицы  $Sp[WM(\xi)]$ .

При построении  $A$  – и  $D$  – *оптимальных планов* чрезвычайно полезной оказывается следующая *обобщенная теорема эквивалентности*.

**Теорема 1.2** [34,88-94,97,98]. Следующие утверждения:

1. План  $\xi^*$  минимизирует  $X[M(\xi)]$ ;
2. План  $\xi^*$  минимизирует  $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$ ;
3.  $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = \eta$

эквивалентны между собой. Информационные матрицы планов, удовлетворяющих условиям 1 – 3, совпадают. Любая линейная комбинация планов, удовлетворяющих 1 – 3, также удовлетворяет 1-3.

Значения параметров теоремы эквивалентности  $X[M(\xi)]$ ,  $\mu(\alpha, \xi)$ ,  $\eta$  представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Соответствие значений параметров обобщенной теоремы эквивалентности критериям оптимальности

Критерий	Параметры		
	$X[M(\xi)]$	$\mu[\alpha, \xi]$	$\eta$
$A$ – оптимальности	$SpM^{-1}(\xi)$	$Sp[M^{-2}(\xi)M(\alpha)]$	$SpM^{-1}(\xi^*)$
$D$ – оптимальности	$-\ln \det M(\xi)$	$Sp[M^{-1}(\xi)M(\alpha)]$	$s$

Подчеркнем, что в работах [88,89,91,93,94,98] приведено универсальное доказательство теоремы 1.2, применимое как к статическим, так и к динамическим моделям.

Укажем два следствия, удобные для проверки планов на A - и D - оптимальность.

**Следствие 1.**

В точках спектра A – оптимального плана  $\xi^*$  функция  $\mu(\alpha, \xi^*)$  достигает своего максимального значения  $\text{Sp}M^{-1}(\xi^*)$ .

**Следствие 2.**

В точках D – оптимального плана  $\xi^*$  функция  $\mu(\alpha, \xi^*)$  достигает своего максимального значения s.

Теорема 1.2 дает еще одну статистическую интерпретацию D – оптимальному планированию экспериментов, утверждая эквивалентность D – и G – оптимальных планов.

Критерий G – оптимальности относится к группе критериев, направленных на повышение точности прогнозируемых по модели выходных данных [19-25].

План  $\xi^*$  называется *G – оптимальным (минимаксным)*, если он удовлетворяет условию

$$\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp} \left[ M^{-1}(\xi^*) M(\alpha) \right] = \min_{\xi \in \Omega_\xi} \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp} \left[ M^{-1}(\xi) M(\alpha) \right].$$

G – оптимальный план обеспечивает не слишком высокую обобщенную дисперсию ошибки прогнозирования за счет минимизации максимальной по  $\alpha \in \Omega_\alpha$  дисперсии.

#### 1.1.4 Прямая градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов

Оптимизационную задачу

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M(\xi)] \quad (1.12)$$

можно решать непосредственно (напрямую) с помощью общих методов численного поиска экстремума [71-83], в том числе и с применением методов глобальной оптимизации [86,87]. Характерной особенностью этого подхода является большая размерность экстремальной задачи. Для критериев А- и D- оптимальности получается задача выпуклого программирования, возможные варианты решения которой представлены, например, в [21,91,99-103]. Остановимся на следующем варианте *прямой градиентной процедуры* построения непрерывных оптимальных планов из [39,40,44,94,98,104-106]\*:

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план

$$\xi_0 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_q^0, \\ p_1^0, p_2^0, \dots, p_q^0 \end{array} \right\}, \quad \alpha_i^0 \in \Omega_\alpha, \quad p_i^0 = \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

в котором  $q = \frac{s(s+1)}{2} + 1$ ,  $s$  – количество неизвестных параметров. Вычислим информационные матрицы  $M(\alpha_i^0)$  одноточечных планов для  $i = 1, 2, \dots, q$  и по формуле (1.9) информационную матрицу всего плана  $\xi_0$ . Положим  $k = 0$ .

Шаг 2. Считая веса  $p_1^k, p_2^k, \dots, p_q^k$  фиксированными, для задачи

$$X[M(\xi_k)] \rightarrow \min_{\alpha_1^k, \dots, \alpha_q^k}, \quad \alpha_i^k \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

---

\* Соответствие значений параметров  $X[M(\xi)]$ ,  $\mu(\alpha, \xi)$ ,  $\eta$  прямой процедуры критериям А- и D- оптимальности такое же, как в таблице 1.1.

выполним одну итерацию *метода последовательного квадратичного программирования* (см. п. 1.1.2). Составим план

$$\bar{\xi}_k = \begin{Bmatrix} \alpha_1^{k+1}, \alpha_2^{k+1}, \dots, \alpha_q^{k+1} \\ p_1^k, p_2^k, \dots, p_q^k \end{Bmatrix},$$

где  $\alpha_i^{k+1}$  - точки, найденные на шаге 2, и вычислим  $M(\alpha_i^{k+1}), i = 1, 2, \dots, q$ .

Шаг 3. Зафиксируем точки спектра полученного плана и для задачи

$$X[M(\bar{\xi}_k)] \rightarrow \min_{p_1^k, p_2^k, \dots, p_q^k}, \sum_{i=1}^q p_i^k = 1, p_i^k \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$$

выполним одну итерацию *метода последовательного квадратичного программирования*. Составим план

$$\xi_{k+1} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^{k+1}, \alpha_2^{k+1}, \dots, \alpha_q^{k+1} \\ p_1^{k+1}, p_2^{k+1}, \dots, p_q^{k+1} \end{Bmatrix}.$$

Шаг 4. Если для малого положительного числа  $\delta$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^q \left[ \left\| \alpha_i^{k+1} - \alpha_i^k \right\|^2 + \left( p_i^{k+1} - p_i^k \right)^2 \right] \leq \delta,$$

перейдём на шаг 5, в противном случае для  $k = k + 1$  повторим шаги 2 и 3.

Шаг 5. Проверим необходимое условие оптимальности плана

$$\left| \mu(\alpha_i^{k+1}, \xi_{k+1}) - \eta \right| \leq \delta, i = 1, 2, \dots, q.$$

Если требуемое условие оптимальности выполняется (см. следствия из теоремы 1.2), закончим процесс. В противном случае повторим всё сначала, скорректировав начальный план  $\xi_0$ .

Приведённый алгоритм требует вычисления градиентов

$$\nabla_A X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial \alpha_{i,j}} \right\|, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

и

$$\nabla_{\mathbf{p}} X[\mathbf{M}(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial p_i} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (1.14)$$

Начнем с критерия А – оптимальности (1.10). Для него с учетом формулы (1.9) имеем:

$$\frac{\partial X[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial \alpha_{i,j}} = \text{Sp} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}} \right] = -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}} \mathbf{D}(\xi) \right] = -p_i \text{Sp} \left[ \mathbf{D}^2(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}} \right]; \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial X[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial p_i} = \text{Sp} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}(\xi)}{\partial p_i} \right] = -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\xi)}{\partial p_i} \mathbf{D}(\xi) \right] = -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}^2(\xi) \mathbf{M}(\alpha_i) \right]. \quad (1.16)$$

Перейдем теперь к критерию D- оптимальности (1.11). В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial \alpha_{i,j}} &= \frac{\partial [-\ln \det \mathbf{M}(\xi)]}{\partial \alpha_{i,j}} = -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) p_i \frac{\partial \mathbf{M}(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}} \right] = -p_i \text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}} \right]; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial X[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial p_i} = -\text{Sp} \left[ \mathbf{D}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\xi)}{\partial p_i} \right] = -\text{Sp} [\mathbf{D}(\xi) \mathbf{M}(\alpha_i)]. \quad (1.18)$$

Таким образом (см. соотношения (1.15)-(1.18)), применение прямой градиентной процедуры синтеза непрерывных А – или D - оптимальных планов предполагает разработку алгоритмов вычисления ИМФ и их производных по компонентам точек спектра плана эксперимента (1.7).

### 1.1.5 Двойственная градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов

Другой подход (его называют двойственным) к решению оптимизационной задачи (1.12) основан на обобщенной теореме эквивалентности. В этом случае рассматриваемая задача уже не является задачей выпуклого программирования, но размерность пространства варьируемых параметров может оказаться существенно меньше, чем при прямом подходе. Возможные варианты двой-

ственных процедур представлены, например, в [20,25,91,97,100-103]. Остановимся на следующей *двойственной градиентной процедуре* построения непрерывных оптимальных планов из [39-41,43,44,94,98,104-106]\*:

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план  $\xi_0$  и по формуле (1.9) вычислим нормированную матрицу  $M(\xi_0)$  плана. Положим  $k = 0$ .

Шаг 2. Найдём локальный максимум

$$\alpha^k = \arg \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi_k)$$

методом последовательного квадратичного программирования (см. п. 1.1.2).

Если окажется, что  $|\mu(\alpha^k, \xi_k) - \eta| \leq \delta$ , закончим процесс. Если  $\mu(\alpha^k, \xi_k) > \eta$ , перейдём к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

Шаг 3. Вычислим  $\tau_k$  по формуле

$$\tau_k = \arg \min_{0 \leq \tau \leq 1} X \left[ M \left( \xi_{k+1}^\tau \right) \right].$$

Здесь

$$\xi_{k+1}^\tau = (1 - \tau)\xi_k + \tau\xi(\alpha^k),$$

где  $\xi(\alpha^k)$  - одноточечный план, размещенный в точке  $\alpha^k$ .

Шаг 4. Составим план

$$\xi_{k+1} = (1 - \tau_k)\xi_k + \tau_k\xi(\alpha^k),$$

произведём его «очистку» в соответствии с рекомендациями из [20], положим  $k = k + 1$  и перейдём на шаг 2.

---

\* Соответствие значений параметров  $X[M(\xi)]$ ,  $\mu(\alpha, \xi)$ ,  $\eta$  двойственной процедуры критериям A- и D- оптимальности такое же, как в таблице 1.1.

Приведённый алгоритм требует вычисления градиента

$$\nabla_{\alpha} \mu(\alpha, \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(\alpha, \xi)}{\partial \alpha_j} \right\|, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.19)$$

Для критерия А – оптимальности (1.10) получаем:

$$\frac{\partial \mu(\alpha, \xi)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \text{Sp} \left[ M^{-2}(\xi) M(\alpha) \right]}{\partial \alpha_j} = \text{Sp} \left[ D^2(\xi) \frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right]. \quad (1.20)$$

В случае критерия D – оптимальности (1.11) имеем:

$$\frac{\partial \mu(\alpha, \xi)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \text{Sp} \left[ M^{-1}(\xi) M(\alpha) \right]}{\partial \alpha_j} = \text{Sp} \left[ D(\xi) \frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right]. \quad (1.21)$$

Соотношения (1.20),(1.21) показывают, что, как и в случае прямой градиентной процедуры, для применения двойственной градиентной процедуры синтеза непрерывных А - или D - оптимальных планов необходимо разработать алгоритмы вычисления ИМФ и ее производной по компонентам точек спектра плана эксперимента.

### 1.1.6 Построение дискретных оптимальных планов

Предположим, что мы при помощи прямой, двойственной или комбинированной прямой – двойственной процедуры синтезировали непрерывный план

$$\zeta^* = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^* \\ p_1^*, p_2^*, \dots, p_q^* \end{array} \right\}, \quad \sum_{i=1}^q p_i^* = 1, \quad p_i^* \geq 0, \quad \alpha_i^* \in \Omega_{\alpha}, \quad i=1,2,\dots,q.$$

Его практическое использование затруднено тем обстоятельством, что веса  $p_i^*$  представляют собой произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы, и в случае заданного числа  $v$  возможных запусков системы величины  $k_i^* = v p_i^*$  могут не являться целыми числами. Проведение

эксперимента требует округления величин  $k_i^*$  до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение будет тем лучше, чем больше число возможных запусков.

Приведем следующий алгоритм «округления» непрерывного плана до точного из [25]:

Шаг 1. Вычислим числа  $\sigma_i'$  и  $\sigma_i''$  по формулам

$$\sigma_i' = \left\lceil (v - q)p_i^* \right\rceil; \quad \sigma_i'' = \left\lfloor vp_i^* \right\rfloor, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

(здесь  $\lceil z \rceil$  - ближайшее к  $z$  целое число, большее  $z$ ;  $\lfloor z \rfloor$  - целая часть числа  $z$ ).

Шаг 2. Вычислим  $v'$  и  $v''$ , воспользовавшись выражениями

$$v' = v - \sum_{i=1}^q \sigma_i'; \quad v'' = v - \sum_{i=1}^q \sigma_i''.$$

При этом если  $v' < v''$ , то  $\sigma_i = \sigma_i'$  для  $i = 1, 2, \dots, q$  и  $v_1 = v'$ . В противном случае  $\sigma_i = \sigma_i''$ ,  $v_1 = v''$ .

Шаг 3. Величины  $vp_i^* - \sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) расположим в порядке убывания их значений. Положим  $j=1$ .

Шаг 4. Если  $vp_j^* - \sigma_j$  стоит на одном из первых  $v_1$  мест в указанном упорядоченном наборе, то положим  $s_j = 1$ , в противном случае  $s_j = 0$ .

Шаг 5. Если  $j < q$ , увеличим  $j$  на единицу и перейдем на шаг 4. В противном случае сформируем приближённый дискретный план

$$\xi_v^* = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \dots & \alpha_q^* \\ \frac{\sigma_1 + s_1}{v}, \frac{\sigma_2 + s_2}{v}, \dots, \frac{\sigma_q + s_q}{v} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^* \\ \frac{k_1^*}{v}, \frac{k_2^*}{v}, \dots, \frac{k_q^*}{v} \end{array} \right\}.$$

### 1.1.7 Схема процедуры активной параметрической идентификации систем с предварительно выбранной модельной структурой

Изложенные в данном пункте вопросы оценивания неизвестных параметров и планирования эксперимента позволяют в случае предварительно выбранной структуры математической модели представить процедуру активной параметрической идентификации в виде схемы, помещенной на рисунке 1.2.

### 1.2 Анализ современного состояния проблемы активной параметрической идентификации стохастических динамических систем

Проблеме активной параметрической идентификации динамических систем на основе планирования эксперимента посвящено большое число публикаций в нашей стране и за ее пределами. Среди этих трудов доминирующее положение занимают работы, связанные с рассмотрением вопросов планирования входных сигналов для моделей передаточных функций и моделей в пространстве состояний. Отметим, что в современных исследованиях синтез оптимальных входных сигналов осуществляется как методами теории оптимального планирования эксперимента, так и методами теории оптимального управления.

Книга В.Г. Горского, Ю.П. Адлера, А.М. Талалая [24] представляет ставшее классическим введение в указанную проблему и содержит универсально изложенные постановки задач планирования эксперимента и возможные подходы к их решению, применимые для различных способов задания моделей динамических систем.

Вопросы построения *стохастических дискретных моделей в форме передаточных функций* с использованием планирования входных сигналов во временной и частотной областях всесторонне рассматривались в классических монографиях Г. Гудвина и Р. Пейна [107], М. Зейропа [108], Л. Льюнга [11], а также, например, в работах Э. Уолтера и Л. Пронзато [13], Л. Пронзато [109],

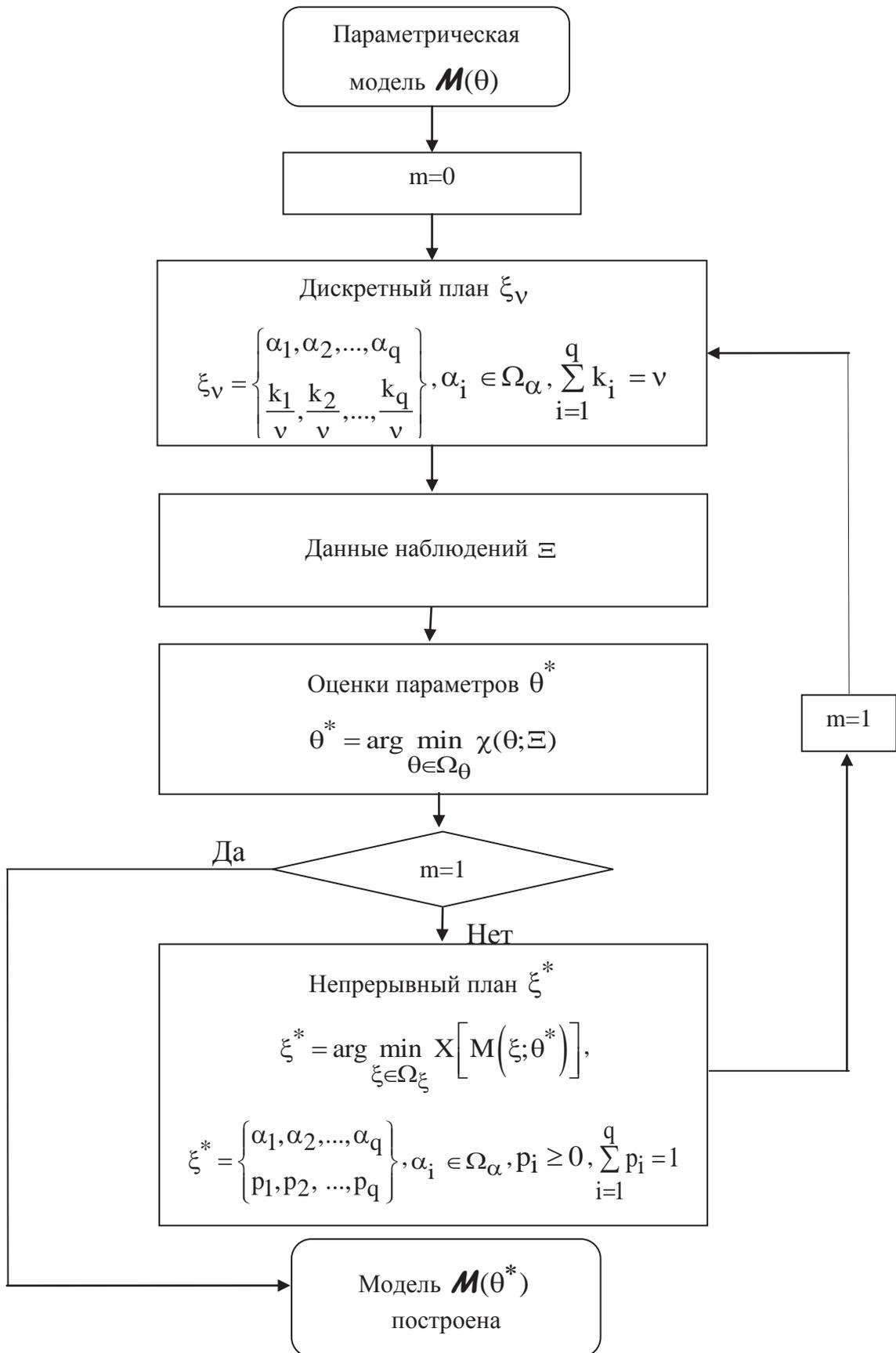


Рисунок 1.2 - Схема процедуры активной параметрической идентификации

В.И. Денисова, И.Л. Еланцевой и В.М. Чубича [103], В.И. Денисова, И.Л. Еланцевой и И.А. Полетаевой [110,111].

Различные аспекты проблемы планирования входных сигналов во временной и частотной областях при построении *дискретных линейных стационарных моделей со стохастическими уравнениями состояний и измерений* обсуждались, например, в классических статьях Р. Мехры [88,89], монографиях Г.Гудвина, Р. Пейна [107] и В.И. Денисова, В.М. Чубича, О.С. Черниковой, Д.И. Бобылевой [94], а также в работах А.Ж. Абденова [92,112,113], А.Ж. Абденова и В.Ю. Пейсаховича [114], А.А. Попова [115], В.И. Денисова, В.М. Чубича и О.С. Черниковой [104,105,116-118]. Активная параметрическая идентификация динамических систем, описываемых стохастическими дискретными линейными *нестационарными* моделями в пространстве состояний, рассматривалась в статье В.И. Денисова, И.Л. Еланцевой и В.М. Чубича [103]. Подчеркнем, что в публикациях [94,104,105,116-118] результаты представлены для математических моделей с неизвестными параметрами в матрицах состояния, управления, возмущения, измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах возмущений (шума системы) и ошибок измерений (шума измерений).

Следует также отметить работу В.Н. Овчаренко [119], ориентированную на проведение в реальном масштабе времени активной параметрической идентификации динамических систем, описываемых *дискретными нелинейными моделями со стохастическими уравнениями состояний и измерений*.

Вопросы планирования входных сигналов при построении *непрерывно-дискретных моделей с детерминированными* (в том числе и нелинейными) *уравнениями состояний* рассматривались, например, в монографии В.И. Денисова и А.А. Попова [33], в статьях В.Н. Овчаренко [120-124], Э. Морелли [125], К. Жобертье, Ф. Бурнонвилля, П. Котон и Ф. Ренделя [126], К. Жобертье, Л. Денис-Видаль, П. Котон и Г. Джоли-Бланшар [127]. Различным аспектам проблемы планирования входных сигналов во временной области при построении *непрерывно-дискретных линейных стационарных моделей со стохастиче-*

скими уравнениями состояний и измерений посвящены, например, соответствующие разделы монографии В.И. Денисова, В.М. Чубича, О.С. Черниковой и Д.И. Бобылевой [94], статьи А.Ж. Абденова [128], А.Ж. Абденова, В.И. Денисова, В.М. Чубича [129], А.А. Попова [115], В.И. Денисова, В.М. Чубича, Д.И. Бобылевой [98, 130,131]. Подчеркнем, что в публикациях [94,98,130,131] результаты представлены для математических моделей с неизвестными параметрами в матрицах состояния, управления, возмущения, измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах возмущений и ошибок измерений в различных комбинациях.

Анализ современного состояния проблемы активной параметрической идентификации стохастических динамических систем показывает, что наиболее значительный прогресс в ее решении достигнут применительно к линейным стационарным моделям и к моделям (в общем случае нелинейным) с детерминированными уравнениями состояний. Указанная проблема не рассматривалась для динамических моделей со стохастическими линейными нестационарными и нелинейными уравнениями состояний при вхождении неизвестных параметров в уравнения состояния и измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы шумов системы и измерений. В данной диссертационной работе решается проблема активной параметрической идентификации преимущественно для таких моделей.

### 1.3 Структурно-вероятностное описание моделей

#### 1.3.1 Модели дискретных систем

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую, идентифицируемую модель динамической системы вида

$$x(t_{k+1}) = f[x(t_k), u(t_k), t_k] + \Gamma(t_k)w(t_k); \quad (1.22)$$

$$y(t_{k+1}) = h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.23)$$

где  $x(t_k)$  –  $n$  - вектор состояния;  $u(t_k)$  – детерминированный  $r$  - вектор управления (входа);  $w(t_k)$  –  $p$  - вектор шума системы (возмущения);  $y(t_{k+1})$  –  $m$  - вектор измерения (выхода);  $v(t_{k+1})$  –  $m$  - вектор шума (ошибки) измерения.

Априорные предположения:

- случайные векторы  $w(t_k)$  и  $v(t_{k+1})$  образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E[w(t_k)] = 0, \quad E[w(t_k)w^T(t_i)] = Q\delta_{ki},$$

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki},$$

$$E[v(t_{k+1})w^T(t_i)] = 0, \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1$$

(здесь и далее  $\delta_{ki}$  - символ Кронекера);

- начальное состояние  $x(t_0)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с  $w(t_k)$  и  $v(t_{k+1})$  при любых значениях  $k$ ;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ , включающий в себя элементы вектор - функций  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$ ,  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матриц  $\Gamma(t_k)$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектора  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях.

Частным случаем модели (1.22), (1.23) являются модели линейной нестационарной системы

$$x(t_{k+1}) = a[u(t_k), t_k] + F(t_k)x(t_k) + \Gamma(t_k)w(t_k); \quad (1.24)$$

$$y(t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.25)$$

и линейной стационарной системы

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + \Psi u(t_k) + \Gamma w(t_k); \quad (1.26)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.27)$$

При активной параметрической идентификации нелинейных систем (1.22), (1.23) с указанными априорными предположениями будем применять *временную* [132-135] и *статистическую* [3,136-142] линеаризации, в результате сводя исходную задачу к соответствующей задаче для модели вида (1.24), (1.25) со специальным образом определенными векторами  $a(t_k)$ ,  $A(t_{k+1})$  и матрицами  $F(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$ .

Линеаризация во временной области возможна в предположении, что вектор – функции  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  непрерывны и дифференцируемы по  $x(t_k)$ ,  $u(t_k)$  и  $x(t_{k+1})$  соответственно [39,44,143].

Зададим номинальную траекторию  $\{x_H(t_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1\}$  в соответствии с равенством

$$\begin{cases} x_H(t_{k+1}) = f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k], & k=0,1,\dots,N-1; \\ x_H(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases} \quad (1.28)$$

Разложив для каждого  $k$  вектор–функции  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $[x_H(t_k), u_H(t_k)]$  и  $x_H(t_{k+1})$  соответственно и, отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k] + \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} [x(t_k) - x_H(t_k)] + \\ &+ \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} [u(t_k) - u_H(t_k)] + \Gamma(t_k)w(t_k); \\ y(t_{k+1}) &= h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ &+ \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})} [x(t_{k+1}) - x_H(t_{k+1})] + v(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Положив

$$a[u(t_k), t_k] = f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k] - \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} x_H(t_k) + \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} [u(t_k) - u_H(t_k)]; \quad (1.29)$$

$$F(t_k) = \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)}; \quad (1.30)$$

$$A(t_{k+1}) = h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})} x_H(t_{k+1}); \quad (1.31)$$

$$H(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}, \quad (1.32)$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (1.24), (1.25).

В отличие от временной линеаризации, статистическая линеаризация применима к неоднозначным функциям и к существенным нелинейностям, имеющим характеристики с угловыми точками и разрывами. Статистическая линеаризация заключается в замене нелинейной характеристики эквивалентной (в вероятностном смысле) линеаризованной функциональной зависимостью [41,106,144,145]. В соответствии с [141] получим:

$$f[x(t_k), u(t_k), t_k] = f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] + f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k][x(t_k) - \bar{x}(t_k)]; \quad (1.33)$$

$$h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] + h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}][x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})], \quad (1.34)$$

где

$$f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = E\{f[x(t_k), u(t_k), t_k]\} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_k)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x(t_k), u(t_k), t_k] \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x(t_k) - \bar{x}(t_k)]^T P^{-1}(t_k) [x(t_k) - \bar{x}(t_k)] \right\} dx(t_k); \quad (1.35)$$

$$f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = \frac{\partial f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]}{\partial \bar{x}(t_k)};$$

$$\begin{aligned} h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] &= E \{ h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_{k+1})]}} \int_{-\infty}^{+\infty} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]^T P^{-1}(t_{k+1}) [x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})] \right\} dx(t_{k+1}); \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{\partial h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \bar{x}(t_{k+1})};$$

$$\bar{x}(t_k) = E \{ x(t_k) \} = \begin{cases} f_0[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}], & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k = 0; \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} P(t_k) &= E \left\{ [x(t_k) - \bar{x}(t_k)] [x(t_k) - \bar{x}(t_k)]^T \right\} = \\ &= \begin{cases} f_1[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}] P(t_{k-1}) f_1^T[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}] + \\ \quad + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Отметим, что вычисление интегралов в формулах (1.35), (1.36) можно существенно упростить с помощью представленных в [3,136,138,139,141] выражений для коэффициентов статистической линейизации типовых одномерных нелинейностей, встречающихся в системах автоматического управления.

Подставив выражения (1.33), (1.34) в уравнения (1.22), (1.23) соответственно, с учетом обозначений

$$\begin{aligned} a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] &= f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] - \\ &- f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] \bar{x}(t_k); \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$F[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]; \quad (1.40)$$

$$A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] - \\ - h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \bar{x}(t_{k+1}); \quad (1.41)$$

$$H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \quad (1.42)$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (1.24), (1.25).

### 1.3.2 Модели непрерывно-дискретных систем

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую, идентифицируемую модель динамической системы вида:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f[x(t), u(t), t] + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (1.43)$$

$$y(t_{k+1}) = h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.44)$$

где  $x(t)$  –  $n$  - вектор состояния;  $u(t)$  – детерминированный  $r$  - вектор управления (входа);  $w(t)$  –  $p$  - вектор шума системы (возмущения);  $y(t_{k+1})$  –  $m$ -вектор измерения (выхода);  $v(t_{k+1})$  –  $m$ - вектор шума (ошибки) измерения.

Априорные предположения:

- случайные векторы  $w(t)$  и  $v(t_{k+1})$  являются стационарными белыми гауссовскими шумами, для которых

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q\delta(t - \tau);$$

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})w^T(\tau)] = 0, \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \tau \in [t_0, t_N]$$

(здесь и далее  $\delta(t - \tau)$  - дельта-функция Дирака);

- начальное состояние  $x(t_0)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^T\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с  $w(t)$  и  $v(t_{k+1})$  при любых значениях переменной  $k$ ;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ , включающий в себя элементы вектор - функций  $f[x(t), u(t), t]$ ,  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матриц  $\Gamma(t)$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектора  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях.

Частным случаем модели (1.43), (1.44) являются модели линейной нестационарной системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = a[u(t), t] + F(t)x(t) + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (1.45)$$

$$y(t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.46)$$

и линейной стационарной системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + \Psi u(t) + \Gamma w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (1.47)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.48)$$

Непрерывность и дифференцируемость вектор – функций  $f[x(t), u(t), t]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  по  $x(t)$ ,  $u(t)$  и  $x(t_{k+1})$  соответственно позволяет осуществить линеаризацию во временной области [40,43,146] нелинейной модели (1.43), (1.44).

Зададим номинальную траекторию  $\{x_H(t), t \in [t_0, t_N]\}$  при помощи равенства

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_H(t) = f[x_H(t), u_H(t), t], \quad t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases} \quad (1.49)$$

Разложив вектор - функции  $f[x(t), u(t), t]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $[x_H(t), u_H(t)]$  и  $x_H(t_{k+1})$  соответственно и отбросив чле-

ны второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = f[x_H(t), u_H(t), t] + \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}[x(t) - x_H(t)] + \\ + \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial u(t)}[u(t) - u_H(t)] + \Gamma(t)w(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) = h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ + \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}[x(t_{k+1}) - x_H(t_{k+1})] + v(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned} a[u(t), t] = f[x_H(t), u_H(t), t] - \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}x_H(t) + \\ + \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial u(t)}[u(t) - u_H(t)]; \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$F(t) = \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}; \quad (1.51)$$

$$A(t_{k+1}) = h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}x_H(t_{k+1}); \quad (1.52)$$

$$H(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}, \quad (1.53)$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (1.45),(1.46).

Выполним статистическую линеаризацию нелинейной модели (1.43), (1.44). В соответствии с [141] получим:

$$f[x(t), u(t), t] = f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] + f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t][x(t) - \bar{x}(t)]; \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ + h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}][x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})], \end{aligned} \quad (1.55)$$

где

$$f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x(t), u(t), t] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t) - \bar{x}(t)]^T P^{-1}(t)[x(t) - \bar{x}(t)]\right\} dx(t); \quad (1.56)$$

$$f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = \frac{\partial f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \bar{x}(t)};$$

$$h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_{k+1})]}} \int_{-\infty}^{+\infty} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]^T P^{-1}(t_{k+1})[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]\right\} dx(t_{k+1}); \quad (1.57)$$

$$h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{\partial h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \bar{x}(t_{k+1})},$$

причем  $\bar{x}(t) = E[x(t)]$  и  $P(t) = E\{[x(t) - \bar{x}(t)][x(t) - \bar{x}(t)]^T\}$  определяются из следующих дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t], \quad t \in [t_0, t_N], \\ \bar{x}(t_0) - \text{дано}; \end{array} \right. \quad (1.58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP(t)}{dt} = f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]P(t) + P(t)f_1^T[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] + \\ + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), \quad t \in [t_0, t_N], \\ P(t_0) - \text{дано}. \end{array} \right. \quad (1.59)$$

Подчеркнем, что при вычислении интегралов в формулах (1.56), (1.57) может оказаться полезным использование выражений из [3,136,138,139,141] для коэффициентов статистической линейизации типовых одномерных нелинейностей.

Подставив выражения (1.54), (1.55) в уравнения (1.43), (1.44) соответственно, с учетом обозначений

$$a[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] - f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]\bar{x}(t); \quad (1.60)$$

$$F[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]; \quad (1.61)$$

$$A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] - \\ - h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \bar{x}(t_{k+1}); \quad (1.62)$$

$$H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \quad (1.63)$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (1.45), (1.46).

#### 1.4 Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка математического и программного обеспечения активной параметрической идентификации динамических систем, ориентированного преимущественно на гауссовские линейные нестационарные и линеаризованные дискретные и непрерывно-дискретные модели с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе ставятся и решаются следующие основные задачи:

1. Вывод выражений для информационных матриц Фишера (ИМФ) в случае линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей с разработкой соответствующих вычислительных алгоритмов.

2. Вывод соотношений для производных информационных матриц Фишера по компонентам входного сигнала или вектора начальных условий и разработка соответствующих вычислительных алгоритмов.

3. Разработка градиентных процедур планирования входных сигналов или начальных условий, ориентированных на применение как методов теории планирования оптимального эксперимента, так и методов теории оптимального управления.

4. Разработка снабженных пользовательским интерфейсом программных комплексов активной параметрической идентификации стохастических динамических систем.

#### 1.5. Выводы

1. Определены предмет, теоретическая и методологическая база исследований.

2. Мотивирован выбор метода максимального правдоподобия в качестве метода оценивания неизвестных параметров рассматриваемых модельных структур.

3. Выбран метод последовательного квадратичного программирования в качестве численного метода нахождения оценок неизвестных параметров и построения непрерывных оптимальных планов эксперимента.

4. В результате проведенного анализа современного состояния проблемы активной параметрической идентификации стохастических динамических систем сформулирована цель и поставлены задачи исследования.

## 2 Оценивание параметров моделей стохастических динамических систем

Оценивание параметров моделей стохастических динамических систем в пространстве состояний можно осуществлять либо путем обработки всех накопленных к моменту окончания идентификационного эксперимента измерительных данных, либо в реальном масштабе времени, когда оценки неизвестных параметров рекуррентно пересчитываются по очередному поступившему измерению. В первом случае используются методы наименьших квадратов (МНК), максимального правдоподобия (ММП) и максимума апостериорной вероятности (МАВ), упоминавшиеся в п. 1.1.2. Во втором случае (см., например, [1,13,70,129,147-150]) широко применяется расширенный (обобщенный) фильтр Калмана [1,141,151-156], что предполагает модификацию вектора состояния рассматриваемой модели за счет включения в него оцениваемых параметров.

В [49,51,157] выполнялось оценивание параметров непрерывно-дискретных моделей с нелинейными детерминированными уравнениями состояний при помощи МНК. В [94,104,158] и в [94] данный метод использовался для оценивания параметров моделей, соответственно, дискретных (1.26), (1.27) и непрерывно-дискретных (1.47), (1.48) линейных стационарных систем во временной области.

В [49,51,159] и [150] вычислялись ОМП моделей нелинейных непрерывно-дискретных систем с детерминированными и стохастическими уравнениями состояний соответственно, причем во втором случае выполнялась линейризация модели во временной области и функция правдоподобия строилась на основе уравнений расширенного фильтра Калмана. Оценивание параметров линейных стационарных дискретных и непрерывно-дискретных моделей вида (1.26), (1.27) и (1.47), (1.48) с применением ММП во временной области рассматривалось в [70,94,104,160] и [62,94,130,161,162] соответственно. Как и в [160], в

[163,164] при записи функции правдоподобия использовались фильтры квадратного корня [156,165,166], но применительно к линейным нестационарным дискретным моделям.

Оценивание параметров моделей нелинейных непрерывно-дискретных систем с детерминированными уравнениями состояний при помощи МАР рассматривалось в [167].

К передовым методам параметрической идентификации, использующимся при построении стохастических моделей линейных стационарных дискретных систем и реализованным в рамках пакета System Identification Toolbox [168,169] программной системы MATLAB, следует отнести семейство так называемых подпространственных методов (в английском варианте Subspace methods), к которым относятся методы N4SID (Numerical algorithms for subspace state space system identification), MOESP (Multivariable output error state space) и CVA (Canonical variate analysis), описанные в [14,149,170-173], [14,149,172-175] и [172,176,177] соответственно. Указанные методы не предполагают численного решения задачи нелинейного программирования с ограничениями (1.2), что устраняет присущую МНК, ММП и МАР проблему нахождения глобального экстремума, и работают наиболее эффективно при использовании канонических форм представления многомерных модельных структур [11,173,178].

В данном разделе мы рассмотрим вопросы оценивания параметров моделей стохастических динамических систем, взяв за основу подход и алгоритмы из [94] и модифицировав их с точки зрения вычислительной рациональности и универсальности, обеспечивая возможность их применения как к линейным нестационарным, так и к нелинейным дискретным и непрерывно-дискретным моделям.

Оценивание неизвестных параметров будем осуществлять по данным наблюдений  $\Xi$ , полученным в результате проведения идентификационных экспериментов в соответствии с дискретным планом  $\xi_v$ .

Предположим, что экспериментатор может произвести  $v$  независимых запусков системы, причем сигнал  $U_1$  он подает на вход системы  $k_1$  раз, сигнал  $U_2$  -  $k_2$  раз и т.д., наконец, сигнал  $U_q$  -  $k_q$  раз. В этом случае дискретный нормированный план эксперимента (1.6) представляет собой совокупность точек  $U_1, U_2, \dots, U_q$  и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_v = \left\{ \begin{array}{c} U_1, U_2, \dots, U_q \\ \frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v} \end{array} \right\}, \quad U_i \in \Omega_U, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (2.1)$$

Множество планирования  $\Omega_U$  определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Обозначим через  $Y_{ij}$   $j$ -ю реализацию выходного сигнала, соответствующую  $i$ -му входному сигналу  $U_i$  ( $j=1, 2, \dots, k_i$ ):

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} y^{ij}(t_1) \\ y^{ij}(t_2) \\ \dots \\ y^{ij}(t_N) \end{bmatrix}. \quad \text{В результате}$$

проведения по плану  $\xi_v$  идентификационных экспериментов будут подготовлены данные наблюдений  $\Xi = \left\{ (U_i, Y_{ij}), i=1, 2, \dots, q, j=1, 2, \dots, k_i \right\}$ . Подчеркнем,

что  $\sum_{i=1}^q k_i = v$ .

Априорные предположения, изложенные в п. 1.3, позволяют воспользоваться ММП для оценивания неизвестных параметров (полезные свойства ОМП перечислены в п. 1.1.2). В соответствии с ММП необходимо найти такие значения параметров  $\hat{\theta}$ , для которых

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} [\chi(\theta; \Xi)] = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} [-\ln L(\theta; \Xi)], \quad (2.2)$$

где  $\ln L(\theta; \Xi)$  - логарифмическая функция правдоподобия, которую необходимо составить.

Поскольку запуски системы выполняются независимо, критерий максимального правдоподобия  $\chi(\theta; \Xi)$  связан с логарифмическими функциями правдоподобия для одного запуска  $\ln L(\theta; U_i, Y_{ij})$  соотношением

$$\chi(\theta; \Xi) = - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \ln L(\theta; U_i, Y_{ij}), \quad (2.3)$$

где  $\ln L(\theta; U_i, Y_{ij})$  выписывается для каждой модельной структуры по-своему.

Для численного решения задачи нелинейного программирования (2.2) воспользуемся *методом последовательного квадратичного программирования* (см. п. 1.1.2), что предполагает необходимость разработки алгоритмов вычисления значений критериев идентификации и их градиентов.

## 2.1 Оценивание параметров моделей дискретных систем

Для моделей дискретных систем точки спектра плана (2.1) имеют следующую структуру:  $U_i^T = \left\{ \left[ u^i(t_0) \right]^T, \left[ u^i(t_1) \right]^T, \dots, \left[ u^i(t_{N-1}) \right]^T \right\}, i = 1, 2, \dots, q.$

### 2.1.1 Критерий максимального правдоподобия и алгоритм вычисления его значения для линейных нестационарных моделей

Следуя [4,94,161,162], для математической модели (1.24), (1.25) запишем

$$\ln L(\theta; U_i, Y_{ij}) = - \frac{Nm}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}),$$

что позволяет представить соотношение (2.3) в виде

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + \frac{\nu}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}), \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  вычисляются по ниже приведенным уравнениям дискретного фильтра Калмана [1,66,141,151-156,179-181]:

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + a \left[ u^i(t_k), t_k \right]; \quad (2.5)$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) P(t_k | t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k); \quad (2.6)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A(t_{k+1}); \quad (2.7)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + R; \quad (2.8)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}); \quad (2.9)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (2.10)$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1} | t_k), \quad (2.11)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Здесь и далее

- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$  - оценка одношагового прогнозирования состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $P(t_{k+1} | t_k)$  - ковариационная матрица ошибок одношагового прогнозирования;
- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  - оценка фильтрации состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $P(t_{k+1} | t_{k+1})$  - ковариационная матрица ошибок фильтрации.

Эквивалентная выражению (2.4) запись

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \left\{ Nmv \ln 2\pi + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ v \ln \det B(t_{k+1}) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\} \quad (2.12)$$

позволяет предложить следующий **алгоритм вычисления значения критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\Theta$  :

Шаг 1. Определить  $Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0)$ .

Шаг 2. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = Nmv \ln 2\pi; k=0; P(t_k | t_k) = P(t_0)$ .

Шаг 3. Определить  $F(t_k), \Gamma(t_k), H(t_{k+1})$  и по формулам (2.6), (2.8), (2.9), (2.11) найти  $P(t_{k+1} | t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1} | t_{k+1})$ . Определить  $A(t_{k+1})$ .

Шаг 4. Положить  $\Delta = 0, i=1$ .

Шаг 5. Определить  $a \left[ u^i(t_k), t_k \right]$ .

Шаг 6. Положить  $j=1$ .

Шаг 7. Выбрать  $\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0)$ , если  $k=0$ .

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k), \varepsilon^{ij}(t_{k+1}), \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.5), (2.7), (2.10).

Шаг 9. Положить

$$\Delta = \Delta + \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}).$$

Шаг 10. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 7.

Шаг 11. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 5.

Шаг 12. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \chi(\theta; \Xi) + v \ln \det B(t_{k+1}) + \Delta$ .

Шаг 13. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3.

Шаг 14. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \chi(\theta; \Xi)$  и закончить процесс.

## 2.1.2 Критерий максимального правдоподобия и алгоритм вычисления его значения для линеаризованных моделей

В случае применения временной или статистической линеаризации (подробно см. п. 1.3.1) к математической модели (1.22), (1.23)

$$\ln L(\theta; U_i, Y_{ij}) = -\frac{Nm}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B^i(t_{k+1}),$$

что при подстановке в соотношение (2.3) приводит к следующей записи критерия максимального правдоподобия [41,44,106]

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^{N-1} k_i \ln \det B^i(t_{k+1}), \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B^i(t_{k+1})$  вычисляются по уравнениям (см. формулы (2.5)-(2.11)):

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) = F^i(t_k) \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + a \left[ u^i(t_k), t_k \right]; \quad (2.14)$$

$$P^i(t_{k+1} | t_k) = F^i(t_k) P^i(t_k | t_k) \left( F^i(t_k) \right)^T + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k); \quad (2.15)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H^i(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A^i(t_{k+1}); \quad (2.16)$$

$$B^i(t_{k+1}) = H^i(t_{k+1}) P^i(t_{k+1} | t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + R; \quad (2.17)$$

$$K^i(t_{k+1}) = P^i(t_{k+1} | t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1}; \quad (2.18)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) + K^i(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (2.19)$$

$$P^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K^i(t_{k+1}) H^i(t_{k+1})] P^i(t_{k+1} | t_k), \quad (2.20)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P^i(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Уточним, что при *временной линеаризации*

$$a[u^i(t_k), t_k] = f[x_H^i(t_k), u_H^i(t_k), t_k] - \frac{\partial f[x_H^i(t_k), u_H^i(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} x_H^i(t_k) + \frac{\partial f[x_H^i(t_k), u_H^i(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} [u^i(t_k) - u_H^i(t_k)]; \quad (2.21)$$

$$F^i(t_k) = \frac{\partial f[x_H^i(t_k), u_H^i(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)}; \quad (2.22)$$

$$A^i(t_{k+1}) = h[x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial h[x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})} x_H^i(t_{k+1}); \quad (2.23)$$

$$H^i(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}, \quad (2.24)$$

причем

$$\begin{cases} x_H^i(t_{k+1}) = f[x_H^i(t_k), u_H^i(t_k), t_k], & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x_H^i(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases}$$

При *статистической линеаризации*

$$a[u^i(t_k), t_k] = f_0[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k] - f_1[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k] \bar{x}^i(t_k); \quad (2.25)$$

$$F^i(t_k) = f_1[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k]; \quad (2.26)$$

$$A^i(t_{k+1}) = h_0[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}] - h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}] \bar{x}^i(t_{k+1}); \quad (2.27)$$

$$H^i(t_{k+1}) = h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}], \quad (2.28)$$

где

$$\bar{x}^i(t_k) = \begin{cases} f_0 \left[ \bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1} \right], & \text{если } k=1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k=0; \end{cases}$$

$$P^i(t_k) = \begin{cases} f_1 \left[ \bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1} \right] P^i(t_{k-1}) f_1^T \left[ \bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1} \right] + \\ \quad + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k), & \text{если } k=1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k=0. \end{cases}$$

Эквивалентная выражению (2.13) запись

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \left\{ N m v \ln 2\pi + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \left[ k_i \ln \det B^i(t_{k+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{k_i} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\} \quad (2.29)$$

позволяет предложить следующий **алгоритм вычисления значения критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\Theta$  :

Шаг 1. Определить  $Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0)$ .

Шаг 2. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = N m v \ln 2\pi, k=0$ .

Шаг 3. Определить  $\Gamma(t_k)$ . Положить  $\Delta_1 = 0, i=1$ .

Шаг 4. Выбрать  $P^i(t_k | t_k) = P(t_0)$ , если  $k=0$ .

Шаг 5. Определить  $F^i(t_k), H^i(t_{k+1})$  в случае временной линеаризации при помощи выражений (2.22), (2.24); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться равенствами (2.26), (2.28). По формулам (2.15), (2.17), (2.18), (2.20) найти  $P^i(t_{k+1} | t_k), B^i(t_{k+1}), K^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1} | t_{k+1})$ . Определить  $a \left[ u^i(t_k), t_k \right], A^i(t_{k+1})$  в случае временной линеаризации при помощи соотношений (2.21), (2.23); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться формулами (2.25), (2.27).

Шаг 6. Положить  $\Delta_2 = 0, j=1$ .

Шаг 7. Выбрать  $\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0)$ , если  $k=0$ .

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.14), (2.16), (2.19).

Шаг 9. Положить

$$\Delta_2 = \Delta_2 + \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}).$$

Шаг 10. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 7.

Шаг 11. Положить

$$\Delta_1 = \Delta_1 + k_i \ln \det B^i(t_{k+1}) + \Delta_2$$

Шаг 12. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 4.

Шаг 13. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \chi(\theta; \Xi) + \Delta_1$ .

Шаг 14. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3.

Шаг 15. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \chi(\theta; \Xi)$  и закончить процесс.

### 2.1.3 Алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей

Продифференцировав равенство (2.12) по  $\theta_\alpha$ , с учетом выражений

$$\frac{\partial \ln \det B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \text{Sp} \left[ B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right]; \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = -B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t_{k+1}) \quad (2.31)$$

и симметричности матрицы  $B(t_{k+1})$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{v}{2} \text{Sp} \left( B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad (2.32) \end{aligned}$$

что позволяет предложить следующий **алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\Theta$ :

Шаг 1. Определить  $Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0)$  и  $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, k=0, P(t_k | t_k) = P(t_0),$

$$\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 3. Определить  $F(t_k), \Gamma(t_k), H(t_{k+1})$ , по формулам (2.6), (2.8), (2.9), (2.11) найти  $P(t_{k+1} | t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1} | t_{k+1})$ .

Шаг 4. Определить  $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  и по формулам,

следующим из равенств (2.6), (2.8), (2.9), (2.11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = & \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha} P(t_k | t_k) F^T(t_k) + F(t_k) \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} F^T(t_k) + \\ & + F(t_k) P(t_k | t_k) \frac{\partial F^T(t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t_k) + \\ & + \Gamma(t_k) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \frac{\partial \Gamma^T(t_k)}{\partial \theta_\alpha}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \left[ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} - P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] B^{-1}(t_{k+1});$$

$$\frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] P(t_{k+1}|t_k)$$

вычислить  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Определить  $A(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 5. Положить  $\{\Delta_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s\}$ ,  $i=1$ .

Шаг 6. Определить  $a[u^i(t_k), t_k]$  и  $\left\{ \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 7. Положить  $j=1$ .

Шаг 8. Выбрать  $\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ , если

$k=0$ .

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.5), (2.7), (2.10).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (2.5), (2.7), (2.10),

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_k|t_k) + F(t_k) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = -\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) - H(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha},$$

найти  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 11. Положить

$$\Delta_\alpha = \Delta_\alpha + \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) -$$

$$- \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}), \alpha = 1, 2, \dots, s..$$

Шаг 12. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 8.

Шаг 13. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 6.

Шаг 14. Положить  $\frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\nu}{2} \text{Sp} \left( B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right) + \Delta_\alpha,$

$$\alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Шаг 15. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3, иначе закончить процесс.

2.1.4. Алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линеаризованных моделей

Продифференцировав равенство (2.29) по  $\theta_\alpha$ , с учетом выражений (2.30), (2.31) и симметричности матрицы  $B^i(t_{k+1})$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = & \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{k_i}{2} \text{Sp} \left( \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{k_i} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad (2.33) \end{aligned}$$

что позволяет предложить следующий **алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия при некотором фиксированном  $\Theta$** :

Шаг 1. Определить  $Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0)$  и  $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, k=0$ .

Шаг 3. Определить  $\Gamma(t_k), \left\{ \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ . Положить  $\{\Delta_{1\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s\}$ ,

$i=1$ .

Шаг 4. Выбрать  $P^i(t_k | t_k) = P(t_0), \left\{ \frac{\partial P^i(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ , если  $k=0$ .

Шаг 5. Определить  $F^i(t_k), H^i(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial F^i(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  в слу-

чае временной линеаризации при помощи выражений (2.22),(2.24); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться ра-

венствами (2.26),(2.28). По формулам (2.15), (2.17), (2.18), (2.20) найти

$$P^i(t_{k+1}|t_k), B^i(t_{k+1}), K^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}|t_{k+1}).$$

Шаг 6. По формулам, следующим из равенств (2.15), (2.17), (2.18), (2.20),

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial F^i(t_k)}{\partial \theta_\alpha} P^i(t_k|t_k) \left( F^i(t_k) \right)^T + F^i(t_k) \frac{\partial P^i(t_k|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \left( F^i(t_k) \right)^T + \\ &+ F^i(t_k) P^i(t_k|t_k) \left( \frac{\partial F^i(t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right)^T + \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t_k) + \\ &+ \Gamma(t_k) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \frac{\partial \Gamma^T(t_k)}{\partial \theta_\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P^i(t_{k+1}|t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + H^i(t_{k+1}) \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + \\ &+ H^i(t_{k+1}) P^i(t_{k+1}|t_k) \left( \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + P^i(t_{k+1}|t_k) \left( \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T - \right. \\ &\left. - P^i(t_{k+1}|t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ I - K^i(t_{k+1}) H^i(t_{k+1}) \right] \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \\ &- \left[ \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H^i(t_{k+1}) + K^i(t_{k+1}) \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] P^i(t_{k+1}|t_k) \end{aligned}$$

$$\text{найти } \left\{ \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Определить  $a[u^i(t_k), t_k]$ ,  $A^i(t_{k+1})$ ,  $\left\{ \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial A^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$

в случае временной линеаризации при помощи соотношений (2.21), (2.23);  
в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться формулами (2.25), (2.27).

Шаг 7. Положить  $\{\Delta_{2\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s\}$ ,  $j=1$ .

Шаг 8. Выбрать  $\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ , если

$k=0$ .

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.14), (2.16), (2.19).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (2.14), (2.16), (2.19),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial F^i(t_k)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + F^i(t_k) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha}; \\ \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= -\frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - H^i(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}; \\ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K^i(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \\ \text{найти } &\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}. \end{aligned}$$

Шаг 11. Положить

$$\begin{aligned} \Delta_{2\alpha} &= \Delta_{2\alpha} + \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \\ &- \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Шаг 12. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 8.

Шаг 13. Положить

$$\Delta_{1\alpha} = \Delta_{1\alpha} + \frac{k_i}{2} \text{Sp} \left( \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right) + \Delta_{2\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Шаг 14. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 4.

Шаг 15. Положить  $\frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} + \Delta_{1\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ .

Шаг 16. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3, иначе закончить процесс.

## 2.2 Оценивание параметров моделей непрерывно-дискретных систем

Для моделей непрерывно-дискретных систем точки спектра плана (2.1) имеют следующую структуру:  $U_i = u^i(t)$ ,  $t \in [t_0, t_N]$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

### 2.2.1 Особенности алгоритмов вычисления значений критериев

максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей

Для линейных нестационарных моделей непрерывно-дискретных систем критерий максимального правдоподобия определяется, как и в п. 2.1.1, выражением (2.4), но  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  в этом случае вычисляются по следующим уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана [151,154,161,162]:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^{ij}(t|t_k) = F(t) \hat{x}^{ij}(t|t_k) + a \left[ u^i(t), t \right], \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} P(t|t_k) = F(t)P(t|t_k) + P(t|t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (2.35)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) - A(t_{k+1}); \quad (2.36)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1}) + R; \quad (2.37)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}); \quad (2.38)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})\varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (2.39)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k); \quad (2.40)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0|t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0|t_0) = P(t_0)$ .

Данное обстоятельство позволяет говорить о том, что большинство шагов **алгоритма вычисления значения критерия максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей при некотором фиксированном  $\Theta$**  совпадут с соответствующими шагами алгоритма, представленного в п. 2.1.1. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Определить  $\{F(t), \Gamma(t), t \in [t_0, t_N]\}$ . Положить  $\chi(\theta; \Xi) = Nm \ln 2\pi$ ,  $k=0$ ;

$$P(t_k|t_k) = P(t_0).$$

Шаг 3. Определить  $H(t_{k+1})$  и по формулам (2.35), (2.37), (2.38), (2.40) найти

$$P(t_{k+1}|t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1}|t_{k+1}). \text{ Определить } A(t_{k+1}).$$

Шаг 5. Определить  $a[u^i(t), t]$ .

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.34), (2.36), (2.39).

В случае применения *временной* или *статистической линейаризации* (подробно см. п. 1.3.2) к математической модели (1.43), (1.44) критерий максимального правдоподобия по-прежнему записывается в виде (2.13), с той разницей, что  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B^i(t_{k+1})$  вычисляются теперь по следующим уравнениям (см. формулы (2.34)-(2.40)):

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^{ij}(t|t_k) = F^i(t) \hat{x}^{ij}(t|t_k) + a \left[ u^i(t), t \right], \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{dt} P^i(t|t_k) = F^i(t) P^i(t|t_k) + P^i(t|t_k) \left( F^i(t) \right)^T + \Gamma(t) Q \Gamma^T(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (2.42)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H^i(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) - A^i(t_{k+1}); \quad (2.43)$$

$$B^i(t_{k+1}) = H^i(t_{k+1}) P^i(t_{k+1}|t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + R; \quad (2.44)$$

$$K^i(t_{k+1}) = P^i(t_{k+1}|t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1}; \quad (2.45)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) + K^i(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (2.46)$$

$$P^i(t_{k+1}|t_{k+1}) = \left[ I - K^i(t_{k+1}) H^i(t_{k+1}) \right] P^i(t_{k+1}|t_k); \quad (2.47)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0|t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P^i(t_0|t_0) = P(t_0)$ .

Уточним, что при *временной линеаризации*

$$a \left[ u^i(t), t \right] = f \left[ x_H^i(t), u_H^i(t), t \right] - \frac{\partial f \left[ x_H^i(t), u_H^i(t), t \right]}{\partial x(t)} x_H^i(t) + \frac{\partial f \left[ x_H^i(t), u_H^i(t), t \right]}{\partial u(t)} \left[ u^i(t) - u_H^i(t) \right]; \quad (2.48)$$

$$F^i(t) = \frac{\partial f \left[ x_H^i(t), u_H^i(t), t \right]}{\partial x(t)}; \quad (2.49)$$

$$A^i(t_{k+1}) = h \left[ x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right] - \frac{\partial h \left[ x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right]}{\partial x(t_{k+1})} x_H^i(t_{k+1}); \quad (2.50)$$

$$H^i(t_{k+1}) = \frac{\partial h \left[ x_H^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right]}{\partial x(t_{k+1})}, \quad (2.51)$$

причем



Шаг 5. Определить  $\left\{ F^i(t), t \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$ ,  $H^i(t_{k+1})$  в случае временной линеаризации при помощи выражений (2.49), (2.51); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться равенствами (2.53), (2.55). По формулам (2.42), (2.44), (2.45), (2.47) найти  $P^i(t_{k+1} | t_k)$ ,  $V^i(t_{k+1})$ ,  $K^i(t_{k+1})$ ,  $P^i(t_{k+1} | t_{k+1})$ . Определить  $\left\{ a \left[ u^i(t), t \right], t \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$ ,  $A^i(t_{k+1})$  в случае временной линеаризации при помощи соотношений (2.48), (2.50); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться формулами (2.52), (2.54).

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.41), (2.43), (2.46).

### 2.2.2 Особенности алгоритмов вычисления градиентов критериев максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей

Для *линейных нестационарных моделей* градиент критерия максимального правдоподобия определяется, как и в п. 2.1.3, выражением (2.32). Это позволяет заметить, что в *алгоритме вычисления градиента критерия максимального правдоподобия при некотором фиксированном  $\Theta$*  большинство шагов совпадают с соответствующими шагами алгоритма из п. 2.1.3. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Определить  $\left\{ F(t), \Gamma(t), t \in [t_0, t_N] \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_0, t_N], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ ,  $k=0$ ,  $P(t_k | t_k) = P(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 3. Определить  $H(t_{k+1})$ , по формулам (2.35), (2.37), (2.38), (2.40) найти  $P(t_{k+1}|t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

Шаг 4. Определить  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  и по формулам, следующим из равенств (2.35), (2.37), (2.38), (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) &= \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha} P(t|t_k) + F(t) \frac{\partial P(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial P(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} F^T(t) + \\ &+ P(t|t_k) \frac{\partial F^T(t)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t) + \\ &+ \Gamma(t) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t) + \Gamma(t) Q \frac{\partial \Gamma^T(t)}{\partial \theta_\alpha}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + \\ &+ H(t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} - \right. \\ &\left. - P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] B^{-1}(t_{k+1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \\ &- \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] P(t_{k+1}|t_k) \end{aligned}$$

вычислить  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Определить  $A(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 6. Определить  $\left\{ a[u^i(t), t], t \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$  и  $\left\{ \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_k, t_{k+1}], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.34), (2.36), (2.39).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (2.34), (2.36), (2.39),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) = \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t | t_k) + F(t) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = - \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - H(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha},$$

найти  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Точно также большинство шагов **алгоритма вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линеаризованных моделей при некотором фиксированном  $\Theta$**  совпадает с соответствующими шагами алгоритма из п. 2.1.4. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Определить  $\left\{ \Gamma(t), t \in [t_0, t_N] \right\}$  и  $\left\{ \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_0, t_N], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, k=0$ .

Шаг 3. Положить  $\left\{ \Delta_{I\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, i=1$ .

Шаг 5. Определить  $\left\{ F^i(t), t \in [t_k, t_{k+1}] \right\}, \left\{ \frac{\partial F^i(t)}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_k, t_{k+1}], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\},$

$H^i(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  в случае временной линеаризации

при помощи выражений (2.49), (2.51); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться равенствами (2.53), (2.55). По формулам (2.42), (2.44), (2.45), (2.47) найти  $P^i(t_{k+1}|t_k), B^i(t_{k+1}), K^i(t_{k+1}),$

$P^i(t_{k+1}|t_{k+1}).$

Шаг 6. По формулам, следующим из равенств (2.42), (2.44), (2.45), (2.47),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P^i(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) &= \frac{\partial F^i(t)}{\partial \theta_\alpha} P^i(t|t_k) + F^i(t) \frac{\partial P^i(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial P^i(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} (F^i(t))^T + \\ &+ P^i(t|t_k) \left( \frac{\partial F^i(t)}{\partial \theta_\alpha} \right)^T + \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t) + \\ &+ \Gamma(t) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t) + \Gamma(t) Q \frac{\partial \Gamma^T(t)}{\partial \theta_\alpha}, t_k \leq t \leq t_{k+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P^i(t_{k+1}|t_k) (H^i(t_{k+1}))^T + H^i(t_{k+1}) \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} (H^i(t_{k+1}))^T + \\ &+ H^i(t_{k+1}) P^i(t_{k+1}|t_k) \left( \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} (H^i(t_{k+1}))^T + P^i(t_{k+1}|t_k) \left( \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T - \right. \\ &\left. - P^i(t_{k+1}|t_k) (H^i(t_{k+1}))^T (B^i(t_{k+1}))^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] (B^i(t_{k+1}))^{-1}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \left[ I - K^i(t_{k+1})H^i(t_{k+1}) \right] \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \left[ \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H^i(t_{k+1}) + K^i(t_{k+1}) \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] P^i(t_{k+1}|t_k)$$

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\left\{ \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Определить

$$\left\{ a[u^i(t), t], t \in [t_k, t_{k+1}] \right\}, \left\{ \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_k, t_{k+1}], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, \quad A^i(t_{k+1}),$$

$$\left\{ \frac{\partial A^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\} \text{ в случае временной линеаризации при помощи}$$

соотношений (2.48), (2.50); в случае статистической линеаризации необходимо воспользоваться формулами (2.52), (2.54).

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})$  при помощи соотношений (2.41), (2.43), (2.46).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (2.41), (2.43), (2.46),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) = \frac{\partial F^i(t)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t|t_k) + F^i(t) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = - \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) - H^i(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K^i(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha},$$

$$\text{найти} \left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

## 2.3 Выводы

В соответствии с целью исследования представлены алгоритмы вычисления значений критериев максимального правдоподобия и их градиентов для гауссовских линейных нестационарных и линейризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Данные алгоритмы обеспечивают возможность нахождения ОМП неизвестных параметров рассматриваемых математических моделей методом последовательного квадратичного программирования с вычислением соответствующих градиентов по рекуррентным аналитическим формулам и реализованы в рамках программных комплексов ПК-I и ПК-II активной параметрической идентификации стохастических динамических систем, описанных в разделе 5.

### 3 Планирование эксперимента для моделей стохастических дискретных систем

#### 3.1 Вычисление информационной матрицы Фишера

ИМФ занимает одно из центральных мест в теории планирования эксперимента, поскольку именно она используется для вычисления информационной матрицы всего плана и фигурирует в алгоритмах численного построения оптимальных планов.

##### 3.1.1 Вывод информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей

Первым аналитическое выражение ИМФ для гауссовских линейных стационарных дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний, получил Р.К. Мехра в [88,89], для случая вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления. Это выражение в дальнейшем было уточнено в [34,90,91,182] и обобщено в [183] на случай вхождения неизвестных параметров также и в матрицу измерения. Отметим, что при выводе выражений ИМФ в [34,88-91,182,183] было использовано представление фильтра Калмана в форме нормированной обновляющей последовательности.

Другой подход к вычислению ИМФ был предложен А.А. Поповым в [184]. Как и в [34,88-91,182], он рассмотрел случай вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления, но применил уравнения фильтра Калмана в форме ненормированной обновляющей последовательности, что позволило оптимизировать процедуру вычисления информационной матрицы за счет исключения необходимости извлечения квадратного корня из матрицы в каждый момент времени. Эта идея впоследствии была использована в [94,185] при выводе ИМФ для гауссовских линейных стационарных систем в случае

вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы возмущений и ошибок измерений.

Приведем вывод выражения ИМФ для гауссовских линейных нестационарных дискретных систем, которое обобщает все ранее полученные результаты.

**Теорема 3.1** [143] Для математической модели (1.24), (1.25) с априорными предположениями из п. 1.3.1 и неизвестными параметрами  $\Theta$ , входящими в матрицы  $F(t_k)$ ,  $\Gamma(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и векторы  $a(t_k)$ ,  $A(t_{k+1})$ ,  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях, элементы ИМФ определяются выражением

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \right] \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

в котором матрицы  $B(t_{k+1})$ ,  $\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}$  находятся при помощи уравнений дискретного фильтра Калмана.

**Доказательство.**

Введем в рассмотрение обновляющую последовательность

$$\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}(t_{k+1} | t_k) - A(t_{k+1}), \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

где  $\hat{x}(t_{k+1} | t_k)$  определяется по следующим уравнениям дискретного фильтра Калмана [1,66,141,151-156,179-181]:

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) \hat{x}(t_k | t_k) + a[u(t_k), t_k]; \quad (3.3)$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) P(t_k | t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k); \quad (3.4)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + R; \quad (3.5)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}); \quad (3.6)$$

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}); \quad (3.7)$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1} | t_k) \quad (3.8)$$

для  $k = 0, 1, \dots, N-1$  с начальными условиями  $\hat{x}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Запишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L(\Theta; Y_1^N) = -\frac{Nm}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) + \ln \det B(t_{k+1}) \right]. \quad (3.9)$$

Здесь  $L(\Theta; Y_1^N)$  - плотность совместного распределения измерений

$$Y_1^N = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}.$$

Элементы ИМФ связаны с логарифмической функцией правдоподобия (3.9) соотношением [6,11,47,48,67-69]:

$$M_{ij}(\Theta) = -E_Y \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.10)$$

в котором усреднение берется по выборочному пространству.

Поскольку

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} = -B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \theta_i} = & - \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) - \frac{1}{2} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

с учетом симметричности матриц  $B(t_{k+1}), \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, B^{-1}(t_{k+1}),$

$B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1})$  и равенства  $a^T b = \text{Sp}(ab^T)$ , где  $a, b \in R_n$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\Theta; Y_1^N)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = & - \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \right. \\ & \left. - \text{Sp} \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\ & \left. + \text{Sp} \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\text{Sp} \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.
\end{aligned}$$

Подставим последнее равенство в (3.10). Воспользовавшись тем, что

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA), \quad \text{где } A \in R_{n \times m}, B \in R_{m \times n},$$

и

$$E \left[ \varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = B(t_{k+1}),$$

получим:

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ E \left( \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right) B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \right. \\
& - \text{Sp} \left[ E \left( \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ E \left( \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \right) B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \\
& \left. - \text{Sp} \left[ E \left( \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.11)$$

Таким образом, необходимо вычислить следующие математические ожидания:

$$E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]; \quad E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \right]; \quad E \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \hat{x}(t_{k+1} | t_k) - H(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = & - \frac{\partial^2 H(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \hat{x}(t_{k+1} | t_k) - \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} - \\ & - \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} - H(t_{k+1}) \frac{\partial^2 \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial^2 A(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

можем записать:

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = & - \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] - \\ & - H(t_{k+1}) E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \right] = & \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} + \\ & + \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T(t_{k+1}) + \\ & + \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} + \\ & + H(t_{k+1}) E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\hat{x}^T(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_j}\right]H^T(t_{k+1})+ \\
& +H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i}\right]\frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+ \\
& +\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}^T(t_{k+1}|t_k)\right]\frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+ \\
& +\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\frac{\partial\hat{x}^T(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_j}\right]H^T(t_{k+1})+\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial\theta_j}; \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^T(t_{k+1})\right] & = -\frac{\partial^2H(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\hat{x}(t_{k+1}|t_k)\varepsilon^T(t_{k+1})\right]- \\
& -\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\frac{\partial\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_j}\varepsilon^T(t_{k+1})\right]-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_j}E\left[\frac{\partial\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i}\varepsilon^T(t_{k+1})\right]- \\
& -H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial^2\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^T(t_{k+1})\right]-\frac{\partial^2A(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\varepsilon^T(t_{k+1})\right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам необходимо вычислить следующие математические ожидания:

- 1)  $E\left[\hat{x}(t_{k+1}|t_k)\varepsilon^T(t_{k+1})\right];$
- 2)  $E\left[\frac{\partial\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i}\varepsilon^T(t_{k+1})\right];$
- 3)  $E\left[\frac{\partial^2\hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^T(t_{k+1})\right].$

Для вычисления первого математического ожидания воспользуемся формулой

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_0)\bar{x}(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{k+1} \Phi(t_{k+1}, t_\alpha)a(t_{\alpha-1}) + \sum_{\alpha=1}^k \Phi(t_{k+1}, t_\alpha)K(t_\alpha)\varepsilon(t_\alpha), \quad (3.17)$$

которая выводится по индукции из уравнений (3.3), (3.7) фильтра Калмана и в которой

$$\Phi(t_{k+1}, t_\alpha) = \begin{cases} F(t_k)F(t_{k-1}) \cdots F(t_\alpha), & \text{если } \alpha = 1, 2, \dots, k; \\ I, & \text{если } \alpha = k + 1. \end{cases}$$

Положив в выражении (3.17)

$$d(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_0)\bar{x}(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{k+1} \Phi(t_{k+1}, t_\alpha)a(t_{\alpha-1});$$

$$D(t_{k+1}, t_\alpha) = \Phi(t_{k+1}, t_\alpha)K(t_\alpha),$$

получим

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = d(t_{k+1}) + \sum_{\alpha=1}^k D(t_{k+1}, t_\alpha)\varepsilon(t_\alpha), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.18)$$

Принимая во внимание, что

$$E[\varepsilon(t_{k+1})] = 0; \quad (3.19)$$

$$E[\varepsilon(t_{k+1})\varepsilon^T(t_{i+1})] = B(t_{k+1})\delta_{ki}, \quad (3.20)$$

будем иметь:

$$E[\hat{x}(t_{k+1} | t_k)\varepsilon^T(t_{k+1})] = d(t_{k+1})E[\varepsilon^T(t_{k+1})] + \sum_{\alpha=1}^k D(t_{k+1}, t_\alpha)E[\varepsilon(t_\alpha)\varepsilon^T(t_{k+1})] = 0. \quad (3.21)$$

Для вычисления второго математического ожидания продифференцируем  $\hat{x}(t_{k+1} | t_k)$  из (3.18) по  $\theta_i$ :

$$\frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial d(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \sum_{\alpha=1}^k \left[ \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i} \varepsilon(t_\alpha) + D(t_{k+1}, t_\alpha) \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i} \right]. \quad (3.22)$$

В силу того, что

$$E\left[ \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (3.23)$$

с учетом соотношений (3.19), (3.20) получим

$$E\left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = \frac{\partial d(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E[\varepsilon^T(t_{k+1})] + \sum_{\alpha=1}^k \left\{ \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i} E[\varepsilon(t_\alpha)\varepsilon^T(t_{k+1})] \right\} +$$

$$+D(t_{k+1}, t_\alpha) E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] \Big\} = O. \quad (3.24)$$

Для вычисления третьего математического ожидания продифференцируем  $\frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i}$  из (3.22) по  $\theta_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 d(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \sum_{\alpha=1}^k \left[ \frac{\partial^2 D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon(t_\alpha) + \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i} + D(t_{k+1}, t_\alpha) \frac{\partial^2 \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Поскольку

$$E \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = O, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (3.26)$$

с учетом соотношений (3.19), (3.20), (3.23), (3.26) получим

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] &= \frac{\partial^2 d(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} E \left[ \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^k \left\{ \frac{\partial^2 D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} E \left[ \varepsilon(t_\alpha) \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] + \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i} E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_j} E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] + D(t_{k+1}, t_\alpha) E \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] \right\} = O. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Подставив соотношения (3.19), (3.21), (3.24), (3.27) в равенства (3.14) и (3.16), приходим к тому, что

$$E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = O; \quad (3.28)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right] = O. \quad (3.29)$$

Соотношения (3.15), (3.28), (3.29) позволяют записать формулу (3.11) в виде (3.1). Таким образом, теорема доказана.

**Следствие.** Для математической модели стационарной системы (1.26), (1.27) с неизвестными параметрами  $\Theta$ , входящими в матрицы  $F$ ,  $\Psi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектор  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях, формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

что совпадает с результатом из [94,185].

Заметим, что если в модели стационарной системы (1.26), (1.27) неизвестные параметры  $\Theta$  входят только в матрицы  $F$  и  $\Psi$ , выражение (3.30) записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ H E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

и совпадает с соответствующим аналогом из [184].

Непосредственно соотношение (3.1) непригодно для программной реализации в силу того, что оно содержит нераскрытые математические ожидания. Перейдем к вычислению этих математических ожиданий.

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния

$$\hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \\ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}$$

размером  $n \times (s+1)$  и матрицы  $C_i = [\underbrace{O, \dots, O}_i, I, O, \dots, O]$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$  размером

$n \times n(s+1)$ . С учётом этих обозначений

$$E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] = C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1} | t_k) \right] C_0^T; \quad (3.31)$$

$$E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] = C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1} | t_k) \right] C_j^T; \quad (3.32)$$

$$E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] = C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1} | t_k) \right] C_0^T; \quad (3.33)$$

$$E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] = C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1} | t_k) \right] C_j^T; \quad (3.34)$$

$$E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \right] = C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \right]; \quad (3.35)$$

$$E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \right] = C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \right]. \quad (3.36)$$

Соотношения (3.31) – (3.36) позволяют записать выражение (3.1) в виде

$$M_{ij}(\Theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1} | t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1} | t_k) \right] C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \right] \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \right] \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E \left[ \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \right]; \quad (3.38)$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = E \left\{ \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) - \bar{x}_A(t_{k+1}) \right] \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) - \bar{x}_A(t_{k+1}) \right]^T \right\}. \quad (3.39)$$

Тогда

$$E \left[ \hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) \hat{x}_A^T(t_{k+1}|t_k) \right] = \Sigma_A(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}). \quad (3.40)$$

Получим рекуррентные соотношения для  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$ .

Положим

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k). \quad (3.41)$$

Воспользовавшись равенствами (3.3) и (3.7), выразим для  $k=1,2,\dots,N-1$

$\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$  через  $\hat{x}(t_k|t_{k-1})$ . Получим

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_k) = F(t_k)\hat{x}(t_k|t_{k-1}) + a(t_k) + \tilde{K}(t_k)\varepsilon(t_k). \quad (3.42)$$

Дифференцируя (3.42) по  $\theta_i$ , с учетом формулы (3.12) приходим к тому, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} = & \left[ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_i} \right] \hat{x}(t_k|t_{k-1}) + [F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k)] \frac{\partial \hat{x}(t_k|t_{k-1})}{\partial \theta_i} + \\ & + \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon(t_k) - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,s. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Пусть

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.44)$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (3.45)$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$



$$\begin{aligned} \Sigma_A(t_{k+1}) = & F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^T(t_k) + F_A(t_k)E\left\{\left[\hat{x}_A(t_k|t_{k-1}) - \bar{x}_A(t_k)\right]\varepsilon^T(t_k)\right\}K_A^T(t_k) + \\ & + K_A(t_k)E\left\{\varepsilon(t_k)\left[\hat{x}_A(t_k|t_{k-1}) - \bar{x}_A(t_k)\right]^T\right\}F_A^T(t_k) + K_A(t_k)B(t_k)K_A^T(t_k). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Принимая во внимание выражения (3.19), (3.21) и (3.24), находим

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\hat{x}_A(t_k|t_{k-1}) - \bar{x}_A(t_k)\right]\varepsilon^T(t_k)\right\} &= E\left[\hat{x}_A(t_k|t_{k-1})\varepsilon^T(t_k)\right] - \bar{x}_A(t_k)E\left[\varepsilon^T(t_k)\right] = \\ &= E\begin{bmatrix} \hat{x}(t_k|t_{k-1})\varepsilon^T(t_k) \\ \frac{\partial \hat{x}(t_k|t_{k-1})}{\partial \theta_1}\varepsilon^T(t_k) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \hat{x}(t_k|t_{k-1})}{\partial \theta_s}\varepsilon^T(t_k) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, второе и третье слагаемые в формуле (3.51) равны нулю. С учетом равенства (3.50) получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^T(t_k) + K_A(t_k)B(t_k)K_A^T(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ 0, & \text{если } k = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

### 3.1.2 Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления ИМФ для математической модели (1.24), (1.25) с априорными предположениями из п. 1.3.1 при *некотором фиксированном значении вектора оцениваемых параметров* в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [143]:

Шаг 1. Определить

$$\left\{ \Gamma(t_k), \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i}, k=0,1,\dots,N-1, i=1,2,\dots,s \right\}, Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0),$$

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$$

Шаг 2. Положить  $M(\Theta) = O, k=0, P(t_k | t_k) = P(t_0),$

$$\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$$

Шаг 3. Определить  $a(t_k), \left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}, F(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$

Шаг 4. Если  $k=0,$  вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (3.49) и (3.52) соответственно, после чего перейти на шаг 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_k)$  при помощи (3.41) и  $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  по формуле

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} K(t_k) + F(t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 6. Сформировать матрицы  $F_A(t_k), K_A(t_k)$  и вектор  $a_A(t_k),$  воспользовавшись равенствами (3.44) - (3.46).

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (3.49) и (3.52) соответственно.

Шаг 8. Определить  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}, H(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1}|t_k)$  по формуле (3.4) и  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} P(t_k|t_k) F^T(t_k) + F(t_k) \frac{\partial P(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} F^T(t_k) + \\ &+ F(t_k) P(t_k|t_k) \frac{\partial F^T(t_k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i} Q \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \frac{\partial \Gamma^T(t_k)}{\partial \theta_i}. \end{aligned}$$

Вычислить  $B(t_{k+1})$  при помощи равенства (3.5) и  $\left\{ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$

по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) + \\ &+ H(t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}. \end{aligned}$$

Определить  $K(t_{k+1})$  по формуле (3.6) и  $\left\{ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \left[ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} - \right. \\ &\left. - P(t_{k+1}|t_k) H(t_{k+1})^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] B^{-1}(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Найти  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$  по формуле (3.8) и  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  по формуле

муле

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} - \\ &- \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] P(t_{k+1}|t_k). \end{aligned}$$

Шаг 10. Используя выражения (3.37), с учетом (3.38), (3.40), получить приращение  $\Delta M(\Theta)$ , отвечающее текущему значению  $k$ .

Шаг 11. Положить  $M(\Theta) = M(\Theta) + \Delta M(\Theta)$ .

Шаг 12. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

### 3.1.3 Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей, полученных в результате линеаризации

В случае применения *линеаризации во временной области* (подробно см. п. 1.3.1) к математической модели (1.22), (1.23) алгоритм вычисления ИМФ из п. 3.1.2 претерпевает незначительные изменения. Следуя [143], уточним, какие именно шаги требуют корректировки и представим их в новой редакции, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Положить  $M(\Theta) = O$ ,  $k = 0$ ,  $x_H(t_k) = \bar{x}(t_0)$ ,

$$\left\{ \frac{\partial x_H(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}, P(t_k | t_k) = P(t_0),$$

$$\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 3. Определить  $u_H(t_k)$ ,  $u(t_k)$  и при помощи равенства (1.29) найти  $a[u(t_k), t_k]$

и  $\left\{ \frac{\partial a[u(t_k), t_k]}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$  по формуле

$$\frac{\partial a[u(t_k), t_k]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial \theta_i} - \frac{\partial^2 f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial \theta_i \partial x(t_k)} x_H(t_k) -$$

$$- \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} \frac{\partial x_H(t_k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial \theta_i \partial u(t_k)} [u(t_k) - u_H(t_k)].$$

Используя выражение (1.30), получить  $F(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 8. Найти  $x_H(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial x_H(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  при помощи формулы (1.28).

При помощи равенств (1.31), (1.32) определить  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ ,

$H(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

В случае применения *статистической линеаризации* (подробно см. п. 1.3.1) к математической модели (1.22), (1.23) алгоритм вычисления ИМФ из п. 3.1.2 претерпевает следующие изменения (шаги, оставшиеся без изменений, опущены):

Шаг 3. Определить  $u(t_k)$  и при помощи равенства (1.39) найти

$a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]$ , а также  $\left\{ \frac{\partial a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Используя выражение (1.40), получить  $F[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]$  и

$\left\{ \frac{\partial F[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 8. Найти  $\bar{x}(t_{k+1})$ ,  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  и  $P(t_{k+1})$  с использованием формул (1.37) и (1.38) соответственно. При помощи равенств (1.41), (1.42)

определить  $\left\{ \frac{\partial A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ ,

$H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]$  и  $\left\{ \frac{\partial H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

### 3.2 Планирование входных сигналов

Планирование входных сигналов является, по-видимому, наиболее эффективным способом управления экспериментом, используемым при построении моделей стохастических динамических систем. Отметим, что свобода

в выборе входных характеристик существенно зависит от приложений. В экономических и экологических системах у экспериментатора нет возможности воздействовать на систему с целью проведения идентификационных экспериментов, в то время как в лабораторных условиях и на стадиях разработки нового оборудования выбор входных величин имеет лишь амплитудные и мощностные ограничения.

Остановимся на теоретических и прикладных аспектах синтеза *детерминированных* входных сигналов, рассмотрение которых позволит наполнить конкретным содержанием приведенные в п. 1.1.4 и в п. 1.1.5 прямую и двойственную градиентные процедуры построения непрерывных оптимальных планов.

Следуя [24], будем считать, что непрерывный нормированный план (1.7) в данном случае может быть задан в виде

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} U_1, U_2, \dots, U_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^q p_i = 1, U_i \in \Omega_U, i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.53)$$

При этом каждая точка спектра плана представляет собой последовательность импульсов, «развернутую во времени». Применительно к моделям, структурно-вероятностное описание которых представлено в п. 1.3.1, это означает, что

$$U_i = \begin{bmatrix} u^i(t_0) \\ u^i(t_1) \\ \dots \\ u^i(t_{N-1}) \end{bmatrix}.$$

Замкнутое ограниченное множество  $\Omega_U$  представляет собой область допустимых входных сигналов. На практике чаще всего используются два типа ограничений: на амплитуду и на мощность [24,88,89]. В первом случае область допустимых входных сигналов определяется соотношением

$$\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^{N \cdot r} \mid a_j \leq u_j(t_k) \leq b_j, k = 0, 1, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, r \right\}$$

и представляет собой координатный параллелепипед. Во втором случае

$$\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^{N \cdot r} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^r u_j^2(t_k) \leq C \right. \right\}$$

и является шаром.

Нормированная информационная матрица плана (3.53) определяется соотношением

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(U_i; \theta), \quad (3.54)$$

в котором ИМФ одноточечных планов\* вычисляются в соответствии с подразделом 3.1.

Построение оптимальных планов будем осуществлять при помощи прямой и двойственной градиентных процедур, что предполагает вычисление следующих градиентов (см. формулы (1.13), (1.14) и (1.19)):

$$\nabla_U X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial u_{\alpha}^{\gamma}(t_{\beta})} \right\|, \quad \gamma = 1, 2, \dots, q, \quad \beta = 0, 1, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r;$$

$$\nabla_p X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_{\gamma}} \right\|, \quad \gamma = 1, 2, \dots, q;$$

$$\nabla_U \mu(U, \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(U, \xi)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} \right\|, \quad \beta = 0, 1, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r.$$

Соотношения (1.15) - (1.18) и (1.20), (1.21) показывают, что для этого необходимо получить выражения для производных от ИМФ по компонентам входного сигнала и разработать соответствующие вычислительные алгоритмы.

---

\* Напомним, что ИМФ зависят от подлежащих оцениванию неизвестных параметров.

### 3.2.1 Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей

Будем считать, что в модели состояния управляемой линейной нестационарной системы (1.24), (1.25)

$$a(t_k) = b(t_k) + \Psi(t_k)u(t_k), \quad (3.55)$$

неизвестные параметры  $\Theta$  входят в матрицы  $F(t_k)$ ,  $\Psi(t_k)$ ,  $\Gamma(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и векторы  $b(t_k)$ ,  $A(t_{k+1})$ ,  $\bar{x}(t_0)$  и выполнены априорные предположения из п. 1.3.1.

Для вычисления производных

$$\frac{\partial M(U; \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \left\| \frac{\partial M_{ij}(U; \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad \beta = 0, 1, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r,$$

представим ИМФ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от входного сигнала, а другое – нет:

$$M(U; \Theta) = W(U; \Theta) + V(\Theta). \quad (3.56)$$

Чтобы получить такое разложение, подставим равенства (3.38), (3.40) в формулу (3.37). В результате получим следующие выражения для элементов матриц  $W(U; \Theta)$  и  $V(\Theta)$ :

$$W_{ij}(U; \Theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\ \left. + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] \}; \quad (3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \Sigma_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \Sigma_A(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \Sigma_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \Sigma_A(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Из соотношений (3.56), (3.57) следует, что



$$\begin{aligned}
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& +\text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] \Bigg\}. \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Производные  $\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  найдем при помощи равенства (3.49):

$$\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} F_A(t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \frac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \end{array} \right], & \text{если } k = 0. \end{cases} \tag{3.60}$$

Перейдем к определению производных  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, k = 1, 2, \dots, N-1 \right\}$ . Для

этого, воспользовавшись формулами (3.45) и (3.55), представим выражение для  $a_A(t_k)$  в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не зависит, а другое – зависит от  $u(t_k)$ :

$$\begin{aligned}
a_A(t_k) &= \left[ \begin{array}{c} b(t_k) + \Psi(t_k)u(t_k) \\ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_1} u(t_k) - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_s} u(t_k) - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{array} \right] = \\
&= b_A(t_k) + \Psi_A(t_k)u(t_k), \tag{3.61}
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{b}_A(t_k) = \begin{bmatrix} b(t_k) \\ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (3.62)$$

$$\Psi_A(t_k) = \begin{bmatrix} \Psi(t_k) \\ \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Из соотношения (3.61) следует, что

$$\frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \Psi_A(t_k) \frac{\partial u(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \Psi_A(t_k) \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha = \\ \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi_{A1\alpha}(t_k) \\ \Psi_{A2\alpha}(t_k) \\ \dots \\ \Psi_{An(s+1),\alpha}(t_k) \end{bmatrix}, & \text{если } \beta = k, \\ \\ \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если } \beta \neq k. \end{cases} \end{cases} \quad (3.64)$$

Подставляя равенство (3.55) в формулу (3.60) при  $k=0$ , с учетом выражения (3.63) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} &= \begin{bmatrix} \Psi(t_0) \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_1} \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_s} \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(t_0) \\ \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \\
&= \begin{cases} \Psi_A(t_0) \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha & = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi_{A_{1\alpha}}(t_0) \\ \Psi_{A_{2\alpha}}(t_0) \\ \dots \\ \Psi_{A_{n(s+1),\alpha}}(t_0) \end{bmatrix}, & \text{если } \beta = k, \\ \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если } \beta \neq k. \end{cases} \end{cases} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала  $\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  при некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров  $\Theta$  в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [44]:

Шаг 1. Определить  $\{\Gamma(t_k), k=0,1,\dots,N-1\}$ ,  $Q, R, P(t_0), \bar{x}(t_0), \left\{ \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = 0, \beta=0,1,\dots,N-1, \alpha=1,2,\dots,r \right\}, k=0, P(t_k | t_k) = P(t_0)$ .

Шаг 3. Определить  $b(t_k), \Psi(t_k), F(t_k), \left\{ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Сформировать матрицу  $\Psi_A(t_k)$  в соответствии с равенством (3.63).

При помощи выражения (3.55) вычислить  $a(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 4. Если  $k=0$ , вычислить (см. (3.49))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} F(t_0)\bar{x}(t_0) + a(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + F(t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + F(t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}$$

и перейти к шагу 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_k)$  по формуле (см. (3.41))

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k).$$

Шаг 6. Сформировать матрицу  $F_A(t_k)$  и вектор-столбец  $a_A(t_k)$  в соответствии с равенствами (см. (3.44), (3.45)):

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix};$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  по формуле (см. (3.49))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = F_A(t_k) \bar{x}_A(t_k) + a_A(t_k).$$

Шаг 8. Определить  $H(t_{k+1}), \left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1}|t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1}|t_{k+1})$ , используя соотношения (см. (3.4), (3.5), (3.6), (3.8)):

$$P(t_{k+1}|t_k) = F(t_k)P(t_k|t_k)F^T(t_k) + \Gamma(t_k)Q\Gamma^T(t_k);$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1}) + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k).$$

Шаг 10. Положить  $\beta = 0$ .

Шаг 11. Если  $k = 0$ , вычислить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  при помощи равенств

ва (3.65) и перейти на шаг 14.

Шаг 12. Сформировать  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ , применяя выражение (3.64).

Шаг 13. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  по формуле (3.60).

Шаг 14. Используя выражение (3.59), получить приращения

$$\left\{ \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \text{ отвечающие текущим значениям } \beta \text{ и } k.$$

Шаг 15. Положить  $\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} = \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} + \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})}, \alpha = 1, 2, \dots, r.$

Шаг 16. Увеличить  $\beta$  на единицу. Если  $\beta \leq N-1$ , перейти на шаг 11.

Шаг 17. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

### 3.2.3 Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате временной линеаризации

В случае применения *линеаризации во временной области* (подробно см. п. 1.3.1) к математической модели (1.22), (1.23) алгоритм вычисления производных от ИМФ по компонентам входного сигнала из п. 3.2.2 претерпевает незначительные изменения. Следуя [44], уточним, какие именно шаги требуют корректировки и представим их в новой редакции, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Положить

$$\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} = 0, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0).$$

$$x_H(t_k) = \bar{x}(t_0); \left\{ \frac{\partial x_H(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 3. Определить  $u_H(t_k), u(t_k)$ . Воспользовавшись равенствами (см. (1.29), (3.55), (1.30))

$$b(t_k) = f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k] - \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} x_H(t_k) -$$

$$-\frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} u_H(t_k);$$

$$\Psi(t_k) = \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)};$$

$$F(t_k) = \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)},$$

найти  $b(t_k)$ ,  $\Psi(t_k)$ ,  $F(t_k)$ ,  $\left\{ \frac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

При помощи выражения (3.55) вычислить  $a(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 8. Найти  $x_H(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial x_H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ , следуя формуле (1.28). Вы-

числить  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ , воспользовавшись равенством (1.31).

Определить  $H(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  при помощи соотношения (1.32).

### 3.2.4 Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате статистической линеаризации

В случае применения *статистической линеаризации* (подробно см. п. 1.3.1) к уравнениям (1.22), (1.23) в получившейся линеаризованной модели вида (1.24), (1.25)  $a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]$ ,  $F[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]$ ,  $A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]$  и  $H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]$  зависят (см. соотношение (1.37)) от  $\{u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_k)\}$ . В результате (см. формулы (3.4)-(3.6), (3.8), (3.41), (3.44), (3.46), (3.52)) матрицы  $P(t_{k+1}|t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$ ,  $\tilde{K}(t_k)$ ,  $F_A(t_k)$ ,  $K_A(t_k)$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  также зависят от указанных переменных, разложение (3.56) стано-

вится невозможным и существенно усложняется вычисление производных ИМФ по компонентам входного сигнала.

Остановимся на варианте с нелинейной моделью (1.22) для вектора состояния и линейной моделью (1.23) для вектора измерения. Это устраним зависимость  $A(t_{k+1})$  и  $H(t_{k+1})$  от входного сигнала и в некоторой степени упростит вычисление производных от ИМФ по его компонентам.

Подставив равенства (3.38), (3.40) в формулу (3.37), получим следующее выражение для элементов ИМФ:

$$\begin{aligned}
M_{ij}(U; \Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left[ \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right] C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left[ \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right] C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left[ \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right] C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left[ \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right] C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Из соотношения (3.66) следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{ij}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
&+ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \Big] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] \Bigg\}. \quad (3.67)$$

Производные  $\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  найдем путем дифференцирования равенства

(3.49). В результате получим:

$$\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A(t_k) + F_A(t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}(t_0) + \frac{\partial a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + \frac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + \frac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \frac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \end{array} \right], & \text{если } k = 0; \\ 0, & \text{если } \beta > k. \end{cases} \quad (3.68)$$

Для нахождения матрицы частных производных  $\frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  воспользуемся

формулой (3.44):

$$\frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} - \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} - \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \end{array} \right], \quad (3.69)$$

где

$$\frac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} - \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H(t_k).$$

Перейдем к определению производных  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, k = 1, 2, \dots, N-1 \right\}$ . Из

выражения (3.45) следует, что

$$\frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \frac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} - \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} - \frac{\partial \tilde{K}(k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Производные  $\frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  найдем путем дифференцирования соотноше-

ния (3.52). Получим:

$$\frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \Sigma_A(t_k) F_A^T(t_k) + F_A(t_k) \frac{\partial \Sigma_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} F_A^T(t_k) + \\ + F_A(t_k) \Sigma_A(t_k) \frac{\partial F_A^T(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial K_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} B(t_k) K_A^T(t_k) + \\ + K_A(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} K_A^T(t_k) + K_A(t_k) B(t_k) \frac{\partial K_A^T(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ 0, & \text{если } k = 0; \\ 0, & \text{если } \beta > k. \end{cases} \quad (3.71)$$

Для вычисления производных  $\frac{\partial K_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  воспользуемся равенством (3.46):

$$\frac{\partial K_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \frac{\partial^2 \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

### 3.2.5 Алгоритм вычисления производных информационной матрицы

Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате статистической линеаризации

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала  $\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  при некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров  $\Theta$  в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [145]:

Шаг 1. Определить  $\left\{ \Gamma(t_k), \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i}, k = 0, 1, \dots, N-1, i = 1, 2, \dots, s \right\}, Q, R, P(t_0),$

$$\bar{x}(t_0), \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = 0, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0).$

Шаг 3. Вычислить  $a(t_k)$ ,  $\left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  и  $F(t_k)$ ,  $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$

с использованием равенств (1.39) и (1.40) соответственно.

Шаг 4. Если  $k=0$ , то определить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (см.

(3.49), (3.52))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} F(t_0)\bar{x}(t_0) + a(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1}\bar{x}(t_0) + F(t_0)\frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s}\bar{x}(t_0) + F(t_0)\frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = O$$

и перейти на шаг 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  при помощи выражений (см. (3.41)):

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k);$$

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}K(t_k) + F(t_k)\frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 6. Сформировать матрицы  $F_A(t_k)$ ,  $K_A(t_k)$  и вектор-столбец  $a_A(t_k)$  в

соответствии с равенствами (3.44), (3.46) и (3.45):

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix};$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (см. (3.49), (3.52))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = F_A(t_k) \bar{x}_A(t_k) + a_A(t_k);$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = F_A(t_k) \Sigma_A(t_k) F_A^T(t_k) + K_A(t_k) B(t_k) K_A^T(t_k).$$

Шаг 8. Определить  $H(t_{k+1}), \left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1} | t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1} | t_{k+1})$ , используя соотношения (3.4), (3.5), (3.6), (3.8):

$$P(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) P(t_k | t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k);$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1} | t_k).$$

Шаг 10. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \right.$

$\left. \frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$  по формулам (см. шаг 9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} P(t_k|t_k) F^T(t_k) + F(t_k) \frac{\partial P(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} F^T(t_k) + \\
&+ F(t_k) P(t_k|t_k) \frac{\partial F^T(t_k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i} Q \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \frac{\partial \Gamma^T(t_k)}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) + \\
&+ H(t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= -B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}); \\
\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) + P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) + \\
&+ P(t_{k+1}|t_k) H^T(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= - \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] P(t_{k+1}|t_k) + \\
&+ [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i}.
\end{aligned}$$

Шаг 11. Положить  $\beta = 0$ .

Шаг 12. Найти  $\left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\},$

$$\left\{ \frac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

при помощи равенств (1.39), (1.40).

Шаг 13. Если  $k = 0$ , определить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \left\{ \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$

по формулам (3.68) и (3.71) и перейти на шаг 17.

Шаг 14. Определить  $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  с помощью соотношения (см. (3.41))

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} K(t_k) + F(t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}.$$

Шаг 15. Найти  $\left\{ \frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  и  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ , следуя вы-

ражениям (3.69) и (3.70).

Шаг 16. Определить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  и

$$\left\{ \frac{\partial K_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \text{ используя равенства (3.68), (3.71) и (3.72).}$$

Шаг 17. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ ,

$$\left\{ \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \left\{ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$$

по формулам (см. шаг 9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} &= \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} P(t_k|t_k) F^T(t_k) + F(t_k) \frac{\partial P(t_k|t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} F^T(t_k) + \\ &+ F(t_k) P(t_k|t_k) \frac{\partial F^T(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H^T(t_{k+1});$$

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = -B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} B^{-1}(t_{k+1});$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) + \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)};$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} = -\frac{\partial \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{H}(t_{k+1}) \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k) + [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_{k+1}) \mathbf{H}(t_{k+1})] \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)}.$$

Шаг 18. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\}$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{B}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\},$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, s \right\} \text{ при помощи следующих соот-}$$

ношений (см. шаг 10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} &= \frac{\partial^2 \mathbf{F}(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{P}(t_k|t_k) \mathbf{F}^T(t_k) + \frac{\partial \mathbf{F}(t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{P}(t_k|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{F}^T(t_k) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}(t_k)}{\partial \theta_i} \mathbf{P}(t_k|t_k) \frac{\partial \mathbf{F}^T(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial \mathbf{F}(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{P}(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} \mathbf{F}^T(t_k) + \\ &+ \mathbf{F}(t_k) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_k|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{F}^T(t_k) + \mathbf{F}(t_k) \frac{\partial \mathbf{P}(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{F}^T(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{P}(t_k|t_k) \frac{\partial \mathbf{F}^T(t_k)}{\partial \theta_i} + \mathbf{F}(t_k) \frac{\partial \mathbf{P}(t_k|t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{F}^T(t_k)}{\partial \theta_i} + \\ &+ \mathbf{F}(t_k) \mathbf{P}(t_k|t_k) \frac{\partial^2 \mathbf{F}^T(t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{B}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} &= \frac{\partial \mathbf{H}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) + \\
&\quad + \mathbf{H}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) + \mathbf{H}(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{H}^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial^2 \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} &= -\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{B}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) - \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 \mathbf{B}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) - \\
&\quad - \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{B}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)}; \\
\frac{\partial^2 \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) + \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} + \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{H}^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1}) + \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \mathbf{H}^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} + \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) \mathbf{H}^T(t_{k+1}) \frac{\partial^2 \mathbf{B}^{-1}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}; \\
\frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} &= -\left[ \frac{\partial^2 \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} \mathbf{H}(t_{k+1}) + \frac{\partial \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial \mathbf{H}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) - \\
&\quad - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \mathbf{H}(t_{k+1}) + \mathbf{K}(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{H}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} - \\
&\quad - \frac{\partial \mathbf{K}(t_{k+1})}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} \mathbf{H}(t_{k+1}) \frac{\partial \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} + [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_{k+1}) \mathbf{H}(t_{k+1})] \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}.
\end{aligned}$$

Шаг 19. Получить приращение  $\left\{ \Delta \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ , отвечающее текуще-

му значению  $\beta$ , в соответствии с равенством (3.67).

Шаг 20. Положить  $\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)} + \Delta \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial \mathbf{u}_\alpha(t_\beta)}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, r$ .

Шаг 21. Положить  $\beta = \beta + 1$ . Если  $\beta \leq N - 1$ , то перейти на шаг 13.

Шаг 22. Положить  $k = k + 1$ . Если  $k \leq N - 1$ , то пересчитать  $\bar{x}(t_k)$  и  $P(t_k)$  по формулам (1.37), (1.38) и перейти на шаг 3, иначе закончить процесс.

### 3.2.6 Планирование эксперимента как задача дискретного оптимального управления

Ограничимся построением одноточечных планов и выберем в качестве критерия оптимальности след ИМФ, т.е. по аналогии с работами [95,96], в которых рассматривались детерминированные линейные непрерывные модели, будем решать оптимизационную задачу

$$U^* = \arg \max_{U \in \Omega_U} \text{Sp}M(U; \Theta), \quad (3.73)$$

но применительно к стохастическим нелинейным дискретным моделям. Отметим, что в отличие, например, от критериев D-, A-, E- оптимальности, критерий (3.73) не имеет четкой статистической интерпретации, но позволяет свести задачу планирования эксперимента к задаче дискретного оптимального управления и применить соответствующие методы для ее решения. Покажем, как это можно сделать, следуя материалам статьи [45].

Предположим, что выполнены все априорные предположения из п. 1.3.1 и математическая модель динамической системы (1.22), (1.23) позволяет осуществить временную линеаризацию. Тогда, в силу разложения (3.56) для ИМФ линеаризованной модели, задачу (3.73) можно заменить эквивалентной:

$$U^* = \arg \max_{U \in \Omega_U} \text{Sp}W(U; \Theta) = \arg \max_{U \in \Omega_U} J_1.$$

С учетом выражения (3.57) после некоторых преобразований получим, что

$$J_1 = \sum_{i=1}^s W_{ii}(U; \theta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \bar{x}_A^T(t_{k+1}) Z_{A1}(t_{k+1}) \bar{x}_A(t_{k+1}) + 2 \bar{x}_A^T(t_{k+1}) Z_{A2}(t_{k+1}) A_A(t_{k+1}) \right], \quad (3.74)$$

где

$$Z_{A1}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} Z_{A1}^{1,1}(t_{k+1}) & Z_{A1}^{1,2}(t_{k+1}) & Z_{A1}^{1,3}(t_{k+1}) & \dots & Z_{A1}^{1,s}(t_{k+1}) & Z_{A1}^{1,s+1}(t_{k+1}) \\ Z_{A1}^{2,1}(t_{k+1}) & Z_{A1}^{2,2}(t_{k+1}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{A1}^{s+1,1}(t_{k+1}) & 0 & 0 & \dots & 0 & Z_{A1}^{s+1,s+1}(t_{k+1}) \end{pmatrix},$$

причем

$$Z_{A1}^{1,1} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i};$$

$$Z_{A1}^{1,j} = \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_{j-1}} B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}), \quad j = 2, 3, \dots, s+1;$$

$$Z_{A1}^{i,1} = H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, s+1;$$

$$Z_{A1}^{i,i} = H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) H(t_{k+1}), \quad i = 2, 3, \dots, s+1;$$

$$Z_{A2}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_1} B^{-1}(t_{k+1}) & \dots & \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_s} B^{-1}(t_{k+1}) \\ 0 & H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \end{pmatrix};$$

$$A_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} A(t_{k+1}) \\ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Равенство (3.61) позволяет представить формулу (3.49) в виде

$$\begin{cases} \bar{x}_A(t_{k+1}) = \Phi_A(t_k)\bar{x}_A(t_k) + \Psi_A(t_k)u(t_k) + b_A(t_k), & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ \bar{x}_A(t_0) = \left[ \bar{x}^T(t_0), \frac{\partial \bar{x}^T(t_0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \bar{x}^T(t_0)}{\partial \theta_s} \right]^T, \end{cases} \quad (3.75)$$

где

$$F_A(t_k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(k) \frac{\partial H(k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix}, & \text{если } k=1, 2, \dots, N-1; \\ \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & F(t_k) \end{bmatrix}, & \text{если } k=0; \end{cases}$$

$\Psi_A(t_k)$  и  $b_A(t_k)$  определяются выражениями (3.63), (3.62) соответственно.

Подставив равенство (3.75) в формулу (3.74), с учетом симметричности матрицы  $Z_{A1}(t_{k+1})$ , получим, что

$$J_1 = \sum_{k=0}^{N-1} [d_0(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)d_1(t_k) + u^T(t_k)d_2(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_1(t_k)u(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_2(t_k)\bar{x}_A(t_k) + u^T(t_k)D_3(t_k)u(t_k)]. \quad (3.76)$$

Здесь

$$d_0(t_k) = b_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})b_A(t_k) + 2b_A^T(t_k)Z_{A2}(t_{k+1})A_A(t_{k+1});$$

$$d_1(t_k) = 2F_A^T(t_k)Z_{A2}(t_{k+1})A_A(t_{k+1}) + 2F_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})b_A(t_k);$$

$$d_2(t_k) = 2\Psi_A^T(t_k)Z_{A2}(t_{k+1})A_A(t_{k+1}) + 2\Psi_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})b_A(t_k);$$

$$D_1(t_k) = 2F_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})\Psi_A(t_k);$$

$$D_2(t_k) = F_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})F_A(t_k);$$

$$D_3(t_k) = \Psi_A^T(t_k)Z_{A1}(t_{k+1})\Psi_A(t_k).$$

Поскольку  $d_0(t_k)$  в соотношении (3.76) не зависит от  $U$ , при максимизации критерия  $J_1$  это слагаемое можно не учитывать. В результате приходим к критерию

$$J_2 = \sum_{k=0}^{N-1} [\bar{x}_A^T(t_k)d_1(t_k) + u^T(t_k)d_2(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_1(t_k)u(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_2(t_k)\bar{x}_A(t_k) + u^T(t_k)D_3(t_k)u(t_k)],$$

который вместе с системой (3.75) позволяет рассматривать задачу синтеза оптимальных входных сигналов как задачу дискретного оптимального управления с суммарным показателем качества [186]. Для ее решения воспользуемся *методом последовательного квадратичного программирования* с использованием конечно-разностной аппроксимации градиента.

Сформулированную задачу можно свести к следующей задаче оптимизации конечного состояния [186]:

$$J_2 = \chi(t_N) \rightarrow \max_{u \in \Omega_U},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \bar{x}_A(t_{k+1}) \\ \chi(t_{k+1}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} F_A(t_k)\bar{x}_A(t_k) + \Psi_A(t_k)u(t_k) + b_A(t_k) \\ \chi(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_1(t_k)u(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)D_2(t_k)\bar{x}_A(t_k) + \\ + u^T(t_k)D_3(t_k)u(t_k) + \bar{x}_A^T(t_k)d_1(t_k) + u^T(t_k)d_2(t_k) \end{array} \right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{l} \bar{x}_A^T(t_0) \\ \chi(t_0) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} \bar{x}^T(t_0) & \frac{\partial \bar{x}^T(t_0)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \bar{x}^T(t_0)}{\partial \theta_s} \\ & 0 & & \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

Для решения этой задачи воспользуемся *методом* последовательного улучшения управлений *Л.И. Шатровского* [187,188], адаптировав его к дискретной задаче.

### 3.2.7. Планирование эксперимента в установившемся режиме для моделей линейных стационарных систем

Вопросы планирования входных сигналов в установившемся режиме для стохастических дискретных систем, описываемых линейными стационарными моделями в пространстве состояний, некоторым образом уже поднимались в [189-191]. При этом в [189] с использованием представления фильтра Калмана в форме нормированной обновляющей последовательности было получено аналитическое выражение ИМФ для одного неизвестного параметра, входящего в матрицы состояния и управления. Это выражение в [190] было обобщено на векторный случай, когда неизвестные параметры содержались еще и в матрице измерения. В [191] приведены примеры построенных оптимальных планов для трех модельных структур. В данном пункте мы приведем новые результаты, обобщающие и развивающие в теоретическом и прикладном отношениях материалы статей [189-191].

Под непрерывным нормированным планом  $\xi$  для модели линейной стационарной системы (1.26), (1.27) в установившемся режиме будем понимать совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad \bar{U}_i \in \Omega_{\bar{U}}, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (3.77)$$

Здесь  $\bar{U}_i = \begin{bmatrix} u^i(t_{\bar{k}+1}) \\ u^i(t_{\bar{k}+2}) \\ \dots \\ u^i(t_{N-1}) \end{bmatrix}$ ;  $\Omega_{\bar{U}}$  - замкнутое ограниченное множество;  $t_{\bar{k}}$  соответствует началу установившегося режима.

Нормированная информационная матрица плана (3.77) определяется соотношением

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(\bar{U}_i; \theta).$$

**Теорема 3.2** [42] Для математической модели (1.26), (1.27) с априорными предположениями из п. 1.3.1 и неизвестными параметрами  $\Theta$ , входящими в матрицы  $F$ ,  $\Psi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектор  $\bar{x}(t_0)$ , элементы ИМФ в установившемся режиме определяются выражением

$$\begin{aligned} M_{ij}(\bar{U}; \Theta) = & \sum_{k=\bar{k}+1}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T B^{-1} \right] + \\ & + \text{Sp} \left[ H C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \right] + \\ & \left. + \text{Sp} \left[ H C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T B^{-1} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{L}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.78)$$

где  $L = N - \bar{k} - 1$ ;  $C_i = [\underbrace{O, \dots, O}_i, I, O, \dots, O]$ ;

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A \bar{x}_A(t_k) + \Psi_A u(t_k), & k = \bar{k} + 1, \dots, N - 1, \\ \bar{x}_A(t_{\bar{k}+1}) - \text{предварительно вычислено.} \end{cases} \quad (3.79)$$

$$F_A = \begin{bmatrix} F & O & \cdot & \cdot & \cdot & O \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} - \tilde{K} \frac{\partial H}{\partial \theta_1} & F - \tilde{K}H & \cdot & \cdot & \cdot & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} - \tilde{K} \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & O & \cdot & \cdot & \cdot & F - \tilde{K}H \end{bmatrix}; \quad (3.80)$$

$$\tilde{K} = FK; \quad K = PH^T B^{-1}; \quad B = HPH^T + R;$$

$P$  - ковариационная матрица ошибок оценивания в установившемся режиме;

$$K_A = \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (3.81)$$

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (3.82)$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A \Sigma_A(t_k) F_A^T + K_A B K_A^T, & k = \bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, N - 1; \\ \Sigma_A(t_{\bar{k}+1}) - \text{предварительно вычислено.} \end{cases} \quad (3.83)$$

### Доказательство.

В соответствии со следствием из теоремы 3.1 элементы ИМФ определяются равенством (3.30). Соотношения (3.31)-(3.34), (3.40) позволяют записать его в виде

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(U; \Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
 & + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
 & + \text{Sp} \left[ H C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
 & + \text{Sp} \left[ H C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}. \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

Если эту формулу рассмотреть только в установившемся режиме, начиная с  $k = \bar{k} + 1$  ( $\bar{k}$  отвечает моменту времени  $t_{\bar{k}}$ , для которого  $P(t_k | t_{k-1}) = P$  для  $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots, N$ ), то (см. выражения (3.5), (3.6), (3.41), (3.44), (3.46))  $B(t_k) = B$ ,  $K(t_k) = K$ ,  $\tilde{K}(t_k) = \tilde{K}$ ,  $F_A(t_k) = F_A$  для  $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots, N$  и соотношение (3.84) принимает вид (3.78). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если в выражении для элементов ИМФ в установившемся режиме из [190] учесть, что

$$\begin{aligned}
 E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) v^T(t_{k+1}) \right] &= O; \\
 E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} v^T(t_{k+1}) \right] &= O;
 \end{aligned}$$

\*  $\bar{k} = k$ , для которого  $\|P(t_{k+1} | t_k) - P(t_k | t_{k-1})\| \leq \delta$ , где  $\delta$  – малое положительное число

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} v^T(t_{k+1}) \right] = 0$$

(это следует, например, из равенств (2.56), (2.59), (2.62) монографии [94]) и что

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i} \Sigma^{-2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_j} = \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i} \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_j}$$

(вследствие перестановочности матриц  $\Sigma^{-1}$  и  $\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i}$ , вытекающей из симмет-

ричности положительно определенной матрицы  $B = \Sigma^2$ ), то оно для  $k = \bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, N-1$  запишется в виде

$$\begin{aligned} M_{ij}(\bar{U}; \Theta) = & \sum_{k=\bar{k}+1}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \mathbb{E} \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} \Sigma^{-2} \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \mathbb{E} \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T \Sigma^{-2} \right] + \\ & + \text{Sp} \left[ H \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k) \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} \Sigma^{-2} \right] + \\ & \left. + \text{Sp} \left[ H \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_j} \right] H^T \Sigma^{-2} \right] \right\} + \\ & + 2L \text{Sp} \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i} \Sigma^{-2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_j} \right], \end{aligned}$$

что эквивалентно соотношению (3.78) в силу справедливости равенств (3.31)-(3.34), (3.40).

**Замечание 2.** Формулы (3.78)-(3.81), (3.83) показывают, что вычислению ИМФ в установившемся режиме должно предшествовать определение  $\bar{k}$ ,

$$\bar{x}_A(t_{\bar{k}+1}), F_A, K_A, \Sigma_A(t_{\bar{k}+1}), B^{-1}, \left\{ \frac{\partial B}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$$

Материалы п. 3.1.2 позволяют предложить следующий *вспомогательный алгоритм\** нахождения  $\bar{k}$ ,  $\bar{x}_A(t_{\bar{k}+1})$ ,  $F_A$ ,  $K_A$ ,  $\Sigma_A(t_{\bar{k}+1})$ ,  $B^{-1}$ ,  $\left\{ \frac{\partial B}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ :

Шаг 1. Определить  $F$ ,  $\Psi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i}, \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ . Сформировать матрицу  $\Psi_A$  в соответствии с равенством (3.82).

Шаг 2. Положить  $k=0$ ,  $P(t_k|t_k)=P(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial P(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 3. Если  $k=0$ , вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (см. (3.49), (3.52)):

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} F\bar{x}(t_0) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + F \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + F \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \Psi_A u(t_0);$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = O.$$

Перейти на шаг 7.

Шаг 4. Найти  $\tilde{K}(t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$  при помощи выражений (см. (3.41)):

$$\tilde{K}(t_k) = FK(t_k);$$

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F}{\partial \theta_i} K(t_k) + F \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

\* Значение вектора оцениваемых параметров предполагается фиксированным.

Шаг 5. Сформировать матрицы  $F_A(t_k)$ ,  $K_A(t_k)$  в соответствии с равенствами (3.44), (3.46):

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F & O & \dots & O \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H}{\partial \theta_1} & F - \tilde{K}(t_k)H & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & O & \dots & F - \tilde{K}(t_k)H \end{bmatrix};$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 6. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (см. (3.49), (3.52)):

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\bar{x}_A(t_k) + \Psi_A u(t_k);$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^T(t_k) + K_A(t_k)B(t_k)K_A^T(t_k).$$

Шаг 7. Найти  $P(t_{k+1} | t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1} | t_{k+1})$ , используя соотношения (3.4), (3.5), (3.6), (3.8):

$$P(t_{k+1} | t_k) = FP(t_k | t_k)F^T + \Gamma Q \Gamma^T;$$

$$B(t_{k+1}) = HP(t_{k+1} | t_k)H^T + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k)H^T B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H]P(t_{k+1} | t_k).$$

Шаг 8. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$

по формулам (см. шаг 7):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial F}{\partial \theta_i} P(t_k|t_k) F^T + F \frac{\partial P(t_k|t_k)}{\partial \theta_i} F^T + \\
&\quad + F P(t_k|t_k) \frac{\partial F^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P(t_{k+1}|t_k) H^T + H \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T + H P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= \left[ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} H^T + P(t_{k+1}|t_k) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} - \right. \\
&\quad \left. - P(t_{k+1}|t_k) H^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] B^{-1}(t_{k+1}); \\
\frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i} &= - \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H + K(t_{k+1}) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] P(t_{k+1}|t_k) + \\
&\quad + [I - K(t_{k+1})H] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i}.
\end{aligned}$$

Шаг 9. Если  $k=0$ , положить  $k = k + 1$  и перейти на шаг 4. Если  $k > 0$ , проверить выполнение условия  $\|P(t_{k+1}|t_k) - P(t_k|t_{k-1})\| \leq \delta$  ( $\delta$  - малое положительное число). Если это условие не выполняется, то увеличить  $k$  на единицу и перейти на шаг 4. В противном случае положить  $\bar{k} = k$ ;  $\bar{x}_A(t_{\bar{k}+1}) = \bar{x}_A(t_{k+1})$ ;  $F_A = F_A(t_{\bar{k}})$ ,  $K_A = K_A(t_{\bar{k}})$ ,  $\Sigma_A(t_{\bar{k}+1}) = \Sigma_A(t_{k+1})$ ,  $B^{-1} = B^{-1}(t_{k+1})$ ,  $\left\{ \frac{\partial B}{\partial \theta_i} = \frac{\partial B(t_{\bar{k}+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$  и приступить к вычислению ИМФ в установившемся режиме.

Представим возможный вариант **алгоритма вычисления ИМФ в установившемся режиме**:

Шаг 1. Для заданного  $\Theta$  найти  $\bar{k}$ ,  $\bar{x}_A(t_{\bar{k}+1})$ ,  $F_A$ ,  $K_A$ ,  $\Sigma_A(t_{\bar{k}+1})$ ,  $B^{-1}$ ,

$\left\{ \frac{\partial B}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ , используя вспомогательный алгоритм, описанный выше.

Определить матрицы  $H$ ,  $\left\{ \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, i = \overline{1, s} \right\}$ . Сформировать матрицу  $\Psi_A$  в соответствии с равенством (3.82).

Шаг 2. Положить  $M_{ij}(\bar{U}; \Theta) = \frac{L}{2} \text{Sp} \left( \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \right)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, s$ ,  $k = \bar{k} + 1$ .

Шаг 3. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  по формуле (3.79).

Шаг 4. Найти  $\Sigma_A(t_{k+1})$  при помощи выражения (3.83).

Шаг 5. Используя выражение (3.78), получить приращение  $\Delta M(\bar{U}; \Theta)$ , отвечающее текущему значению  $k$ .

Шаг 6. Положить  $M(\bar{U}; \Theta) = M(\bar{U}; \Theta) + \Delta M(\bar{U}; \Theta)$ .

Шаг 7. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N - 1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

### 3.3 Планирование начальных условий

Планирование начальных условий считается еще одним эффективным способом управления экспериментом, используемым при построении моделей стохастических динамических систем [24], и может оказаться весьма полезным для автономных систем, когда нет возможности планировать входные сигналы.

Остановимся на теоретических и прикладных аспектах решения данной задачи применительно к моделям линейных нестационарных дискретных систем (1.24), (1.25) с априорными предположениями из п. 1.3.1. Это позволит наполнить конкретным содержанием прямую и двойственную градиентные процедуры построения непрерывных оптимальных планов, приведенные в п. 1.1.4 и в п. 1.1.5. Приведенные ниже материалы несложно адаптировать к моделям стохастических линейных непрерывно-дискретных систем.

Следуя [24], будем считать, что непрерывный нормированный план (1.7) в данном случае может быть задан в виде

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1(t_0), \bar{x}_2(t_0), \dots, \bar{x}_q(t_0) \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^q p_i = 1, \bar{x}_i(t_0) \in \Omega_{\bar{x}}(t_0), i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.85)$$

Замкнутое ограниченное множество  $\Omega_{\bar{x}}(t_0)$  представляет собой область допустимых начальных условий.

Нормированная информационная матрица плана (3.85) определяется соотношением

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(\bar{x}_i(t_0); \theta), \quad (3.86)$$

в котором ИМФ однократных планов\* вычисляются в соответствии с п. 3.1.2.

При этом нужно иметь в виду, что  $\{\bar{x}_A(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$  будут находиться с помощью соотношения

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{cases} F_A(t_k) \bar{x}_A(t_k) + a_A(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{l} F(t_0) \bar{x}(t_0) + a(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{array} \right], & \text{если } k = 0, \end{cases} \quad (3.87)$$

поскольку подлежащие оцениванию параметры в  $\bar{x}(t_0)$  не входят.

Построение оптимальных планов будем осуществлять при помощи прямой и двойственной градиентных процедур, что предполагает вычисление следующих градиентов (см. формулы (1.13), (1.14) и (1.19)):

$$\nabla_{\mathbf{x}} X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial \bar{x}_\alpha^\gamma(t_0)} \right\|, \quad \gamma = 1, 2, \dots, q, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n;$$

---

\* Напомним, что ИМФ зависят от подлежащих оцениванию неизвестных параметров.

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{X}[\mathbf{M}(\xi)] = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}[\mathbf{M}(\xi)]}{\partial p_{\gamma}} \right\|, \quad \gamma = 1, 2, \dots, q;$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mu(\bar{\mathbf{x}}(t_0), \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(\bar{\mathbf{x}}(t_0), \xi)}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} \right\|, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Соотношения (1.15) - (1.18) и (1.20), (1.21) показывают, что для этого необходимо получить выражения для производных от ИМФ по компонентам вектора начальных условий и разработать соответствующий вычислительный алгоритм.

### 3.3.1 Нахождение производных информационной матрицы Фишера по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных моделей

В силу того, что выражение для элементов ИМФ допускает представление вида (см. (3.56)-(3.58))

$$M_{ij}(\bar{\mathbf{x}}(t_0); \Theta) = W_{ij}(\bar{\mathbf{x}}(t_0); \Theta) + V_{ij}(\Theta), \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

следуя [192], запишем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{ij}(\bar{\mathbf{x}}(t_0))}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} = \frac{\partial W_{ij}(\bar{\mathbf{x}}(t_0))}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} = \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_{\alpha}(t_0)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \Big] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}_A^T(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] \Big\}. \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Производные  $\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}$  найдем при помощи равенства (3.87):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} &= \begin{Bmatrix} F_A(t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \\ \begin{bmatrix} F(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A(t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} \\ \begin{bmatrix} F(t_0) \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \leftarrow \alpha = \\
&= \begin{cases} F_A(t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}, & \text{если } k=1,2,\dots,N-1; \\ \left[ f_{1\alpha}(t_0), \dots, f_{n\alpha}(t_0), \frac{\partial f_{1\alpha}(t_0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial f_{n\alpha}(t_0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial f_{1\alpha}(t_0)}{\partial \theta_s}, \dots, \frac{\partial f_{n\alpha}(t_0)}{\partial \theta_s} \right]^T, & \text{если } k=0. \end{cases} \quad (3.89)
\end{aligned}$$

### 3.3.2 Алгоритм вычисления производных информационной матрицы

Фишера по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных моделей

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам вектора начальных условий  $\left\{ \frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}, \alpha = 1, 2, \dots, n \right\}$  при некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров  $\Theta$  в уравнениях состояния и наблюдения, в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [192]:

Шаг 1. Определить  $\{\Gamma(t_k), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $Q, R, P(t_0), \bar{x}(t_0)$ .

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, n \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0)$ .

Шаг 3. Определить  $a(t_k), F(t_k), \left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 4. Если  $k = 0$ , вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  при помощи выражения (3.87) и перейти к шагу 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_k)$  по формуле (см. (3.41))

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k).$$

Шаг 6. Сформировать матрицу  $F_A(t_k)$  и вектор-столбец  $a_A(t_k)$  в соответствии с равенствами (см. (3.44), (3.45)):

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix};$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  по формуле (см. (3.49))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\bar{x}_A(t_k) + a_A(t_k).$$

Шаг 8. Определить  $H(t_{k+1}), \left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1}|t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$ , используя соотношения (см. (3.4), (3.5), (3.6), (3.8)):

$$P(t_{k+1}|t_k) = F(t_k)P(t_k|t_k)F^T(t_k) + \Gamma(t_k)Q\Gamma^T(t_k);$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1}) + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k).$$

Шаг 10. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}, \alpha = 1, 2, \dots, n \right\}$  при помощи равенства (3.89).

Шаг 11. Используя выражение (3.88), получить приращения

$$\left\{ \Delta \frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}, \alpha = 1, 2, \dots, n \right\}, \text{ отвечающие текущему значению } k.$$

Шаг 12. Положить  $\frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} = \frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)} + \Delta \frac{\partial M(\bar{x}(t_0); \Theta)}{\partial \bar{x}_\alpha(t_0)}, \alpha = 1, 2, \dots, n.$

Шаг 13. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N - 1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

### 3.3.3 Планирование начальных условий на примере модели процесса изменения температуры в двухкомнатной квартире

Рассмотрим следующую дискретизованную (шаг дискретизации - 1 минута) стационарную модель процесса изменения температуры в двухкомнатной квартире со смежными комнатами и нагревателем, расположенным в первой из них (детерминированная модель состояния приведена в [187]):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} u(t_k) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} w(t_k) = \\ = F x(t_k) + \Psi u(t_k) + \Gamma w(t_k); \\ y(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} y_1(t_{k+1}) \\ y_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t_{k+1}) \\ v_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \\ = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, 29, \end{array} \right.$$

где  $x_i(t_k)$  – температура воздуха в  $i$ -ой комнате ( $i=1,2$ ), измеряемая в  $^0C$ ;  
 $u(t_k)$  – управление количеством теплоты, выделяемой нагревателем в кДж/мин;  $w(t_k)$  – помехи, обусловленные влиянием внешней среды.

Если принять теплоемкость воздуха равной  $1 \text{ КДж} / (\text{кг} \cdot ^0C)$ , считать массу воздуха в первой и второй комнатах -  $57.6 \text{ кг}$  и  $72 \text{ кг}$  соответственно, а температуру наружного воздуха -  $5^0C$ , то

$$f_{11} = \frac{(a_1 + \theta_1)e^{b_1} + (a_1 - \theta_1)e^{b_2}}{2a_1}; f_{12} = \frac{2880\theta_2(e^{b_2} - e^{b_1})}{a_1} = f_{21};$$

$$f_{22} = \frac{(a_1 - \theta_1)e^{b_1} + (a_1 + \theta_1)e^{b_2}}{2a_1};$$

$$\psi_1 = 5c_1 \left(1 - \frac{\theta_1}{a_1}\right) + 5c_2 \left(1 + \frac{\theta_1}{a_1}\right); \psi_2 = \frac{2880\theta_2(c_1 - c_2)}{a_1};$$

$$\gamma_1 = 25\theta_1 c_1 \left( \left(1 - \frac{\theta_1}{a_1}\right) + c_2 \left(1 + \frac{\theta_1}{a_1}\right) \right) - 5\theta_1 \frac{c_4 - c_3}{72};$$

$$\gamma_2 = 5\theta_1 \left( 4c_1 \left(1 + \frac{\theta_1}{a_1}\right) + 4c_2 \left(1 - \frac{\theta_1}{a_1}\right) \right) - 25\theta_1 \frac{c_4 - c_3}{288}.$$

Здесь

$$a_1 = \sqrt{331776\theta_2^2 + \theta_1^2}; a_2 = e^{\theta_2 + \frac{\theta_1}{64}}; b_1 = -\theta_2 - \frac{\theta_1}{64} - \frac{a_1}{576}; b_2 = -\theta_2 - \frac{\theta_1}{64} + \frac{a_1}{576};$$

$$b_3 = e^{\frac{a_1}{576}}; c_1 = \frac{a_2 - b_3}{-576a_2b_2}; c_2 = \frac{b_3a_2 - 1}{-576a_2b_1b_3}; c_3 = \frac{1658880_2c_1}{a_1}; c_4 = \frac{1658880_2c_2}{a_1}.$$

Будем считать, что априорные предположения, высказанные в п. 1.3.1, выполнены, причем

$$Q = E\left[w^2(t_k)\right] = 0.1;$$

$$R = E\left[v(t_{k+1})v^T(t_{k+1})\right] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix};$$

$$P(t_0) = E\left[(x(t_0) - \bar{x}(t_0))(x(t_0) - \bar{x}(t_0))^T\right] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, неизвестные параметры  $\theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1$  - потери за счет конвенции,  $\theta_2$  - коэффициент теплообмена между комнатами) функционально входящих в элементы матриц  $F, \Psi, \Gamma$ .

На основе алгоритмов вычисления ИМФ и ее производных по компонентам вектора начальных условий разработаны и программно реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры построения А- и D- оптимальных начальных условий для линейных нестационарных моделей. Программы планирования начальных условий вошли в состав программного комплекса ПК-III [193], созданного совместно с доцентом кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета О.С. Черниковой и предназначенного для активной параметрической идентификации гауссовских линейных нестационарных дискретных моделей (данный программный комплекс на защиту не выносится). Воспользовавшись разработанным программным обеспечением, построим D-оптимальный план в предположении, что  $\Omega_{\bar{x}(t_0)} = \{5 \leq \bar{x}_i(t_0) \leq 28, i = 1, 2\}$  и оценки неизвестных параметров, соответственно, равны  $\hat{\theta}_1 = 0.2, \hat{\theta}_2 = 0.8$ . Результаты вычислений представим в таблице 3.1 [192].

Таблица 3.1 - Итерации двойственной градиентной процедуры синтеза начальных условий

№ итерации	План эксперимента $\xi$	$\max_{\bar{x}(t_0) \in \Omega_{\bar{x}(t_0)}} \text{Sp} \left[ M^{-1}(\xi) M(\bar{x}(t_0)) \right]$	$\det M(\xi)$
0	$\left\{ \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 17 \\ 17 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right\}$	8.3194	$4.3727 \cdot 10^4$
1	$\left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 28 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$	2.5063	$4.4865 \cdot 10^5$
2	$\left\{ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 28 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \end{bmatrix} \\ 0.8143 & 0.1857 \end{array} \right\}$	2.0000	$4.6974 \cdot 10^5$

Применение прямой градиентной процедуры дало аналогичный результат.

Для наглядности на рисунке 3.1 изобразим зависимость  $\text{Sp} \left( M^{-1}(\xi^*) M(\bar{x}(t_0)) \right)$  от компонент  $\bar{x}(t_0)$ .

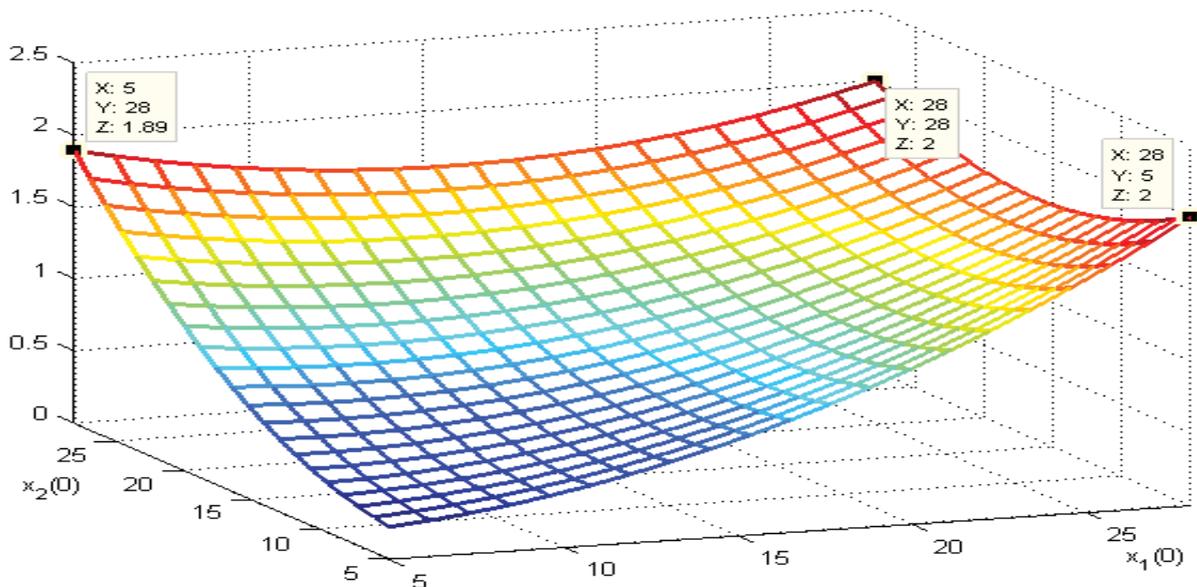


Рисунок 3.1 - Зависимость  $\text{Sp} \left( M^{-1}(\xi^*) M(\bar{x}(t_0)) \right)$  от компонент  $\bar{x}(t_0)$

### 3.4 Выводы

1. Впервые получено выражение ИМФ для гауссовских линейных нестационарных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

2. Разработаны алгоритмы вычисления ИМФ для гауссовских линейных нестационарных моделей и моделей, полученных в результате временной или статистической линеаризации, с указанным характером вхождения неизвестных параметров. Данные алгоритмы обеспечивают возможность применения прямой и двойственной процедур синтеза оптимальных входных сигналов или начальных условий без вычисления соответствующих градиентов.

3. Предложены на основе полученных рекуррентных аналитических формул алгоритмы вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для следующих моделей:

- линейных нестационарных дискретных и непрерывно-дискретных моделей;
- дискретных моделей, полученных в результате временной или статистической линеаризации;
- непрерывно-дискретных моделей, полученных в результате временной реализации.

Указанные алгоритмы обеспечивают возможность вычисления градиентов в прямой и двойственной процедурах планирования оптимальных входных сигналов.

4. Показано, что для гауссовских моделей, полученных в результате временной линеаризации, задача планирования входных сигналов может быть сведена к задаче дискретного оптимального управления в случае использования следа ИМФ в качестве критерия оптимальности. Решение соответствующей задачи оптимального управления можно осуществить, например, методом последовательного квадратичного программирования с конечно-разностной аппрок-

симацией градиента либо модифицированным для дискретного случая методом последовательного улучшения управлений Л.И. Шатровского.

5. Разработан алгоритм вычисления ИМФ в установившемся режиме для гауссовских линейных стационарных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

6. Предложен на основе полученных рекуррентных аналитических формул алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам вектора начальных условий для гауссовских линейных нестационарных моделей. Данный алгоритм обеспечивает возможность вычисления градиентов в прямой и двойственной процедурах планирования оптимальных начальных условий.

7. Разработаны и программно реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры синтеза А- и D- оптимальных начальных условий для линейных нестационарных дискретных моделей.

## 4 Планирование входных сигналов для моделей стохастических непрерывно-дискретных систем

Рассмотрим особенности планирования входных сигналов для моделей непрерывно-дискретных систем, структурно-вероятностное описание которых дано в п. 1.3.2. К указанной задаче можно прийти от дискретного случая (см. подраздел 3.2) путем предельного перехода, сгущая точки фиксации управляющих импульсов во времени. Таким образом, непрерывный нормированный план (1.7) в данном случае может быть задан в виде

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} u^1(t), u^2(t), \dots, u^q(t) \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad u^i(t) \in \Omega_u, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (4.1)$$

Точки спектра плана (4.1) представляют собой управляющие вектор-функции, определенные на временном интервале  $t \in [t_0, t_N]$ .  $\Omega_u$  - замкнутое ограниченное множество допустимых входных сигналов.

Нормированная информационная матрица плана (4.1) определяется соотношением

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(u^i(t); \theta), \quad (4.2)$$

в котором ИМФ одноточечных планов зависят от подлежащих оцениванию неизвестных параметров.

Построение оптимальных планов может быть связано с представлением компонент входных сигналов в виде линейных комбинаций базисных функций (в качестве таковых можно использовать ортогональные полиномы Лежандра, Чебышева, функции Уолша и т.д.) и с последующим поиском коэффициентов таких линейных комбинаций [24].

Мы пойдем другим путем. Будем считать, что входные сигналы являются кусочно-постоянными функциями, сохраняющими свои значения на интервале между соседними измерениями. В этом случае точки спектра плана (4.1) будут

иметь такую же структуру, как и точки плана (3.53), появится возможность вычислять по рекуррентным аналитическим формулам производные от ИМФ по компонентам входного сигнала и, следовательно, применить прямую и двойственную градиентные процедуры.

#### 4.1 Вычисление информационной матрицы Фишера

Первую попытку получить аналитическое выражение ИМФ для гауссовских стационарных линейных непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний, предприняли А.Ж. Абденюв и А.А. Попов в [194], рассмотрев случай вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления. При этом было использовано представление фильтра Калмана в форме нормированной обновляющей последовательности.

В [184] для такого же характера вхождения неизвестных параметров, но с применением уравнений фильтра Калмана в форме ненормированной обновляющей последовательности, было получено соответствующее выражение, что позволило оптимизировать процедуру вычисления информационной матрицы за счет исключения необходимости извлекать квадратный корень из матрицы в каждый момент времени. Эта идея впоследствии была использована в [94,195] при выводе ИМФ для гауссовских линейных стационарных систем в случае вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы возмущений и ошибок измерений.

Приведем вывод выражения ИМФ для гауссовских линейных нестационарных непрерывно-дискретных систем, которое обобщает все ранее полученные результаты. Сделаем это по возможности кратко, подчеркивая лишь основные моменты, поскольку многие этапы данного вывода совпадают с рассмотренным в п. 3.1.1 случаем гауссовских нестационарных линейных дискретных систем.

#### 4.1.1 Вывод информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей

**Теорема 4.1** [146] Для математической модели (1.45), (1.46) с априорными предположениями из п. 1.3.2 и неизвестными параметрами  $\Theta$ , входящими в матрицы  $F(t)$ ,  $\Gamma(t)$ ,  $H(t_{k+1})$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и векторы  $a(t)$ ,  $A(t_{k+1})$ ,  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях, элементы ИМФ определяются выражением (3.1), в котором матрицы  $B(t_{k+1})$ ,  $\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}$  находятся при помощи уравнений непрерывно-дискретного фильтра Калмана.

##### Доказательство.

В соответствии с (3.2) введем в рассмотрение обновляющую последовательность  $\{\varepsilon(t_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1\}$ . При этом  $\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$  определяется по следующим уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана [151, 154,161,162]:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t|t_k) = F(t)\hat{x}(t|t_k) + a(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} P(t|t_k) = F(t)P(t|t_k) + P(t|t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (4.4)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1}) + R; \quad (4.5)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}); \quad (4.6)$$

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}); \quad (4.7)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k) \quad (4.8)$$

для  $k=0,1,\dots,N-1$  с начальными условиями  $\hat{x}(t_0|t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0|t_0) = P(t_0)$ .

Как и в дискретном случае, логарифмическая функция правдоподобия здесь будет иметь вид (3.9), что позволяет воспользоваться формулой (3.11), в

которой  $E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]$ ,  $E \left[ \frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \right]$  и  $E \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]$

определяются по формулам (3.14)-(3.16) соответственно. Таким образом, для доказательства теоремы нам, как и в п. 3.1.1 необходимо вычислить математические ожидания

$$E \left[ \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]; E \left[ \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]; E \left[ \frac{\partial^2 \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \varepsilon^T(t_{k+1}) \right].$$

Воспользуемся выражением

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) a(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^k \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) K(t_\alpha) \varepsilon(t_\alpha), \quad (4.9)$$

которое выводится по индукции путем записи решения уравнения (4.3) с использованием *переходной матрицы состояния*  $\Phi(t, \tau)$  и формулы (4.7). Положив в равенстве (4.9)

$$d(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) a(\tau) d\tau;$$

$$D(t_{k+1}, t_\alpha) = \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) K(t_\alpha),$$

получим, как и в дискретном варианте, соотношение (3.18). Далее повторяем все выкладки из доказательства теоремы 3.1. Теорема доказана.

**Следствие.** Для математической модели стационарной системы (1.47), (1.48) с неизвестными параметрами  $\Theta$ , входящими в матрицы  $F, \Psi, \Gamma, H, Q, R, P(t_0)$  и вектор  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях, элементы ИМФ определяются выражением (3.30), что совпадает с результатом из [94,195].

Заметим, что если в модели стационарной системы (1.47), (1.48) неизвестные параметры  $\Theta$  входят только в матрицы  $F$  и  $\Psi$  соотношение для элементов ИМФ совпадает с соответствующим аналогом из [184].

Следуя обозначениям п. 3.1.1 и формулам (3.31)-(3.36), (3.40), запишем соотношение (3.1) в виде

$$\begin{aligned}
M_{ij}(\Theta) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right. \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \left( \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^T(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A(t_{k+1}) C_0^T \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \bar{x}_A(t_{k+1}) C_j^T H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Получим рекуррентные соотношения для  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$ .

Положим

$$\tilde{K}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) K(t_k). \quad (4.11)$$

Запишем решение уравнения (4.3) с использованием переходной матрицы состояния  $\Phi(t, \tau)$  и с учетом формулы (4.7) выразим для  $k=1, 2, \dots, N-1$   $\hat{x}(t_{k+1} | t_k)$  через  $\hat{x}(t_k | t_{k-1})$ . Получим

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \hat{x}(t_k | t_{k-1}) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) a(\tau) d\tau + \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \varepsilon(t_k). \quad (4.12)$$

Дифференцируя (4.12) по  $\theta_i$ , с учетом формулы (3.12) приходим к тому, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} = & \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_i} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_i} \right] \hat{x}(t_k | t_{k-1}) + \\ & + \left[ \Phi(t_{k+1}, t_k) - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) H(t_k) \right] \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} + \\ & + \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon(t_k) - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_i} + \\ & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i} a(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_i} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Обозначим

$$\varphi_A(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) H(t_k);$$

$$\begin{aligned} & \Phi_A(t_{k+1}, t_k) = \\ = & \begin{bmatrix} \Phi(t_{k+1}, t_k) & O & \dots & O \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & \varphi_A(t_{k+1}, t_k) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \dots & \varphi_A(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$a_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) a(\tau) d\tau \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} a(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} a(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (4.15)$$

$$K_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

С учетом этих обозначений равенства (4.12) и (4.13) можно объединить следующей компактной формулой

$$\hat{x}_A(t_{k+1}|t_k) = \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \hat{x}_A(t_k|t_{k-1}) + a_A(t_{k+1}, t_k) + K_A(t_{k+1}, t_k) \varepsilon(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.17)$$

Решив уравнение (4.3) при  $k = 0$ , получим

$$\hat{x}(t_1|t_0) = \Phi(t_1, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) a(\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(t_1|t_0)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \Phi(t_1, t_0)}{\partial \theta_i} \bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_i} a(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_i} \right] d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\hat{x}_A(t_1|t_0) = \left[ \begin{array}{l} \Phi(t_1, t_0)\bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)a(\tau)d\tau \\ \frac{\partial\Phi(t_1, t_0)}{\partial\theta_1}\bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0)\frac{\partial\bar{x}(t_0)}{\partial\theta_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial\Phi(t_1, \tau)}{\partial\theta_1}a(\tau) + \Phi(t_1, \tau)\frac{\partial a(\tau)}{\partial\theta_1} \right]d\tau \\ \dots \\ \frac{\partial\Phi(t_1, t_0)}{\partial\theta_s}\bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0)\frac{\partial\bar{x}(t_0)}{\partial\theta_s} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial\Phi(t_1, \tau)}{\partial\theta_s}a(\tau) + \Phi(t_1, \tau)\frac{\partial a(\tau)}{\partial\theta_s} \right]d\tau \end{array} \right]. \quad (4.18)$$

Вычислив математические ожидания от (4.17) и (4.18), приходим к тому, что

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_A(t_{k+1}, t_k)\bar{x}_A(t_k) + a_A(t_{k+1}, t_k), \quad \text{если } k=1, 2, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{l} \Phi(t_1, t_0)\bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)a(\tau)d\tau \\ \frac{\partial\Phi(t_1, t_0)}{\partial\theta_1}\bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0)\frac{\partial\bar{x}(t_0)}{\partial\theta_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial\Phi(t_1, \tau)}{\partial\theta_1}a(\tau) + \Phi(t_1, \tau)\frac{\partial a(\tau)}{\partial\theta_1} \right]d\tau \\ \dots \\ \frac{\partial\Phi(t_1, t_0)}{\partial\theta_s}\bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0)\frac{\partial\bar{x}(t_0)}{\partial\theta_s} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial\Phi(t_1, \tau)}{\partial\theta_s}a(\tau) + \Phi(t_1, \tau)\frac{\partial a(\tau)}{\partial\theta_s} \right]d\tau \end{array} \right], \quad (4.19) \\ \text{если } k=0. \end{array} \right.$$

Повторив далее соответствующие выкладки из п. 3.1.1, получим рекуррентное соотношение для  $\Sigma_A(t_{k+1})$ :

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_A(t_{k+1}, t_k)\Sigma_A(t_k)\Phi_A^T(t_{k+1}, t_k) + K_A(t_{k+1}, t_k)B(t_k)K_A^T(t_{k+1}, t_k), \\ 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{если } k=1, 2, \dots, N-1; \\ \text{если } k=0. \end{array} \quad (4.20)$$

#### 4.1.2 Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления ИМФ для математической модели (1.45), (1.46) с априорными предположениями из п. 1.3.2 при *некотором фиксированном значении вектора оцениваемых параметров* в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [196]:

Шаг 1. Определить

$$\left\{ \Gamma(\tau), \frac{\partial \Gamma(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}, Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0),$$

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 2. Определить

$$\left\{ a(\tau), \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}, \left\{ F(\tau), \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Положить  $M(\Theta) = O$ ,  $k = 0$ ,  $P(t_k | t_k) = P(t_0)$ ,

$$\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 3. Решив следующие матричные дифференциальные уравнения (ДУ) в обратном времени:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t_{k+1}, \tau)}{d\tau} = -\Phi(t_{k+1}, \tau)F(\tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \Phi(t_{k+1}, t_{k+1}) = I, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i} \right) = - \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i} F(\tau) - \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_i}, \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_{k+1})}{\partial \theta_i} = 0, \end{array} \right.$$

найти  $\left\{ \Phi(t_{k+1}, \tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$  и  $\left\{ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s, \tau \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$ .

Шаг 4. Если  $k=0$ , вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (4.19), (4.20) соответственно и перейти на шаг 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_{k+1}, t_k)$  при помощи (4.11) и  $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s \right\}$  по

формуле

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_i} K(t_k) + \Phi(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 6. Сформировать матрицы  $\Phi_A(t_{k+1}, t_k)$ ,  $K_A(t_{k+1}, t_k)$  и вектор  $a_A(t_{k+1}, t_k)$ , воспользовавшись равенствами (4.14)-(4.16).

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  и  $\Sigma_A(t_{k+1})$  по формулам (4.19) и (4.20) соответственно.

Шаг 8. Определить  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s \right\}$ ,  $H(t_{k+1})$ ,  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1}|t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s \right\}$  путем решения матричного ДУ

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} P(\tau | t_k) \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_1} & F(\tau) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\tau | t_k) \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} P(\tau | t_k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_1} & P(t | t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P(\tau | t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & P(\tau | t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T(\tau) \\ \frac{\partial F^T(\tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F^T(\tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \Gamma(\tau)Q\Gamma^T(\tau) \\ \frac{\partial \Gamma(\tau)}{\partial \theta_1} Q\Gamma^T(\tau) + \Gamma(\tau) \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} \Gamma^T(\tau) + \Gamma(\tau)Q \frac{\partial \Gamma^T(\tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Gamma(\tau)}{\partial \theta_s} Q\Gamma^T(\tau) + \Gamma(\tau) \frac{\partial Q}{\partial \theta_s} \Gamma^T(\tau) + \Gamma(\tau)Q \frac{\partial \Gamma^T(\tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}],
\end{aligned}$$

при известных значениях  $P(t_k | t_k)$  и  $\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Вычислить  $B(t_{k+1})$  при помощи равенства (4.5) и

$$\left\{ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\} \text{ по формуле}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = & \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) + \\
& + H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}.
\end{aligned}$$

Определить  $K(t_{k+1})$  по формуле (4.6) и  $\left\{ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$  по

формуле

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = & \left[ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_i} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_i} - \right. \\
& \left. - P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] B^{-1}(t_{k+1}).
\end{aligned}$$

Найти  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$  по формуле (4.8) и  $\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$

по формуле

$$\frac{\partial P(t_{k+1}|t_{k+1})}{\partial \theta_i} = \left[ I - K(t_{k+1})H(t_{k+1}) \right] \frac{\partial P(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_i} - \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right] P(t_{k+1}|t_k).$$

Шаг 10. Используя выражение (4.10), получить приращение  $\Delta M(\theta)$ , отвечающее текущему значению  $k$ .

Шаг 11. Положить  $M(\Theta) = M(\Theta) + \Delta M(\Theta)$ .

Шаг 12. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

#### 4.1.3 Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных нестационарных моделей, полученных в результате линеаризации

В случае применения *линеаризации во временной области* (подробно см. п. 1.3.2) к математической модели (1.43), (1.44) алгоритм вычисления ИМФ из п. 4.1.2 претерпевает незначительные изменения. Следуя [196], уточним, какие именно шаги требуют корректировки и представим их в новой редакции, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений:

Шаг 2. Задать  $\{u_H(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и, решив ДУ

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_H(t) \\ \frac{\partial x_H(t)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial x_H(t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_H(t), u_H(t), t) \\ \frac{\partial f(x_H(t), u_H(t), t)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(x_H(t), u_H(t), t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0, t_N],$$

при начальных условиях  $x_H(t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $\left\{ \frac{\partial x_H(t_0)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,s \right\}$ ,

вычислить  $\{x_H(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и  $\left\{ \frac{\partial x_H(t)}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$  для  $i=1,2,\dots,s$ . Оп-

ределить  $\{u(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и по формулам (1.50) и

$$\frac{\partial a[u(t), t]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial \theta_i} - \frac{\partial^2 f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial \theta_i \partial x(t)} x_H(t) -$$

$$- \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)} \frac{\partial x_H(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial \theta_i \partial u(t)} [u(t) - u_H(t)]$$

найти  $\{a[u(t), t], t \in [t_0, t_N]\}$  и  $\left\{ \frac{\partial a[u(t), t]}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$  для  $i=1,2,\dots,s$ .

Используя выражение (1.51), получить  $\{F(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и  $\left\{ \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$

для  $i=1,2,\dots,s$ .

Положить  $M(\Theta) = O$ ,  $k=0$ ,  $P(t_k | t_k) = P(t_0)$ ,

$$\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,s \right\}.$$

Шаг 8. При помощи равенств (1.52), (1.53) найти  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,s \right\}$ ,  $H(t_{k+1})$

$$\text{и } \left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,s \right\}.$$

В случае применения *статистической линеаризации* (подробно см. п. 1.3.2) к математической модели (1.43), (1.44) алгоритм вычисления ИМФ из п. 4.1.2 претерпевает следующие изменения (шаги, оставшиеся без изменений, опущены):

Шаг 2. Задать  $\{u(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и, решив совместно ДУ (1.59) и

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(\bar{x}(t), P(t), u(t), t) \\ \frac{\partial f_0(\bar{x}(t), P(t), u(t), t)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f_0(\bar{x}(t), P(t), u(t), t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0, t_N],$$

при начальных условиях  $\bar{x}(t_0), \left\{ \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ , вычислить

$\{\bar{x}(t), t \in [t_0, t_N]\}$  и  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$  для  $i=1,2,\dots,s$  и  $\{P(t), t \in [t_0, t_N]\}$ .

По формулам (1.60) и

$$\frac{\partial a[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \theta_i} - \frac{\partial f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \theta_i} \bar{x}(t) - f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial \theta_i}$$

найти  $\{a[\bar{x}(t), P(t), u(t), t], t \in [t_0, t_N]\}$  и  $\left\{ \frac{\partial a[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$

для  $i=1,2,\dots,s$ . Используя выражение (1.61), получить

$$\{F(\bar{x}(t), P(t), u(t), t), t \in [t_0, t_N]\} \text{ и } \left\{ \frac{\partial F(\bar{x}(t), P(t), u(t), t)}{\partial \theta_i}, t \in [t_0, t_N] \right\}$$

для  $i=1,2,\dots,s$ .

Положить  $M(\Theta) = O, k=0, P(t_k | t_k) = P(t_0), \left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}$ .

Шаг 8. При помощи равенств (1.62), (1.63) найти

$$\left\{ \frac{\partial A(\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}, H(t_{k+1}) \text{ и } \left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i=1,2,\dots,s \right\}.$$

## 4.2 Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала

### 4.2.1 Дифференцирование информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей

Будем считать, что в модели состояния управляемой линейной нестационарной системы (1.45), (1.46) на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$

$$a(t) = b(t) + \Psi(t)u(t_k), \quad (4.21)$$

неизвестные параметры  $\Theta$  входят в матрицы  $F(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $\Gamma(t)$ ,  $H(t_{k+1})$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и векторы  $b(t)$ ,  $A(t_{k+1})$ ,  $\bar{x}(t_0)$  и выполнены априорные предположения из п. 1.3.2.

В силу того, что выражение ИМФ для линейных нестационарных непрерывно-дискретных и дискретных моделей имеет один и тот же вид (см. теоремы 3.1 и 4.1), для нахождения производных ИМФ по компонентам входного сигнала воспользуемся уже полученным соотношением (3.59).

Производные  $\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$  найдем при помощи равенства (4.19):

$$\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial \bar{x}_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial a_A(t_{k+1}, t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \left[ \begin{array}{c} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_1} \frac{\partial a(\tau)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial^2 a(\tau)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \right] d\tau \\ \dots \\ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_s} \frac{\partial a(\tau)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial^2 a(\tau)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \right] d\tau \end{array} \right], & \text{если } k = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Перейдем к определению производных  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_{k+1}, t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, k = 1, 2, \dots, N-1 \right\}$ .

Для этого, воспользовавшись формулами (4.15) и (4.21), представим выражение для  $a_A(t_{k+1}, t_k)$  в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не зависит, а другое – зависит от  $u(t_k)$ :

$$a_A(t_{k+1}, t_k) = b_A(t_{k+1}, t_k) + \Psi_A(t_{k+1}, t_k)u(t_k), \quad (4.23)$$

где

$$b_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) b(\tau) d\tau \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} b(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} b(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial b(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (4.24)$$

$$\Psi_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \Psi(\tau) d\tau \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} \Psi(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} \Psi(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Из соотношения (4.23) следует, что

$$\frac{\partial a_A(t_{k+1}, t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \Psi_A(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial u(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \Psi_A(t_{k+1}, t_k) \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi_{A_{1\alpha}}(t_{k+1}, t_k) \\ \Psi_{A_{2\alpha}}(t_{k+1}, t_k) \\ \dots \\ \Psi_{A_{n(s+1),\alpha}}(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix}, & \text{если } \beta = k, \\ 0, & \text{если } \beta \neq k. \end{cases} \quad (4.26)$$

Подставляя равенство (4.21) в формулу (4.22) при  $k=0$ , с учетом выражения (4.25) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} &= \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \Psi(\tau) d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_1} \Psi(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau \\ \dots \\ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_s} \Psi(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau \end{bmatrix} \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \\ &= \begin{cases} \Psi_A(t_1, t_0) \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi_{A_{1\alpha}}(t_1, t_0) \\ \Psi_{A_{2\alpha}}(t_1, t_0) \\ \dots \\ \Psi_{A_{n(s+1),\alpha}}(t_1, t_0) \end{bmatrix}, & \text{если } \beta = k, \\ 0, & \text{если } \beta \neq k. \end{cases} \end{cases} \quad (4.27) \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Алгоритм вычисления производных от информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных моделей

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала  $\left\{ \frac{\partial M(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  при некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров  $\Theta$  в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма (результат получен совместно с аспиранткой Новосибирского государственного технического университета Е.В. Филипповой), следуя с незначительными изменениями [197]:

Шаг 1. Определить  $\{\Gamma(\tau), \tau \in [t_0, t_N]\}$ ,  $Q, R, P(t_0), \bar{x}(t_0)$ ,

$$\left\{ \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 2. Определить

$$\left\{ \mathbf{b}(\tau), \Psi(\tau), F(\tau), \frac{\partial \mathbf{b}(\tau)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

$$\text{Положить } \left\{ \frac{\partial M(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = 0, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0).$$

Шаг 3. Решив матричное ДУ в обратном времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \Phi(t_{k+1}, \tau) \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi(t_{k+1}, \tau)F(\tau) \\ -\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} F(\tau) - \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ -\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} F(\tau) - \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \tau \in [t_k, t_{k+1}]; \\ \begin{bmatrix} \Phi(t_{k+1}, t_{k+1}) \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_{k+1})}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_{k+1})}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ O \\ \dots \\ O \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

найти  $\Phi(t_{k+1}, \tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}]$  и  $\left\{ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_i}, i=1, 2, \dots, s, \tau \in [t_k, t_{k+1}] \right\}$ .

Сформировать матрицу  $\Psi_A(t_k, t_{k+1})$  в соответствии с равенством (4.25).

При помощи выражения (4.21) вычислить  $\left\{ a(\tau), \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_k, t_{k+1}], i=1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 4. Если  $k=0$ , вычислить (см. (4.19))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \Phi(t_1, t_0) \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) a(\tau) d\tau \\ \frac{\partial \Phi(t_1, t_0)}{\partial \theta_1} \bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_1} a(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_1, t_0)}{\partial \theta_s} \bar{x}(t_0) + \Phi(t_1, t_0) \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \Phi(t_1, \tau)}{\partial \theta_s} a(\tau) + \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau \end{bmatrix}$$

и перейти к шагу 8.

Шаг 5. Найти  $\tilde{K}(t_{k+1}, t_k)$  по формуле (см. (4.11))

$$\tilde{K}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) K(t_k).$$

Шаг 6. Сформировать матрицу  $\Phi_A(t_{k+1}, t_k)$  и вектор-столбец  $a_A(t_{k+1}, t_k)$  в соответствии с равенством (4.14):

$$\Phi_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \Phi(t_{k+1}, t_k) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & \varphi_A(t_{k+1}, t_k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & \varphi_A(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix},$$

в котором

$$\varphi_A(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k)H(t_k),$$

и формулой (4.15):

$$a_A(t_{k+1}, t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) a(\tau) d\tau \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_1} a(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_1} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \theta_s} a(\tau) + \Phi(t_{k+1}, \tau) \frac{\partial a(\tau)}{\partial \theta_s} \right] d\tau - \tilde{K}(t_{k+1}, t_k) \frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить  $\bar{x}_A(t_{k+1})$  по формуле (см.(4.19))

$$\bar{x}_A(t_{k+1}) = \Phi_A(t_{k+1}, t_k) \bar{x}_A(t_k) + a_A(t_{k+1}, t_k).$$

Шаг 8. Определить  $H(t_{k+1}), \left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 9. Найти  $P(t_{k+1}|t_k)$  путем решения матричного ДУ (см. (4.4))

$$\frac{d}{d\tau} P(\tau | t_k) = F(\tau)P(\tau | t_k) + P(\tau | t_k)F^T(\tau) + \Gamma(\tau)Q\Gamma^T(\tau), \tau \in [t_k, t_{k+1}],$$

с уже определенным начальным условием  $P(t_k|t_k)$ .

Вычислить  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1}|t_{k+1})$ , используя соотношения (4.5), (4.6), (4.8):

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1}) + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k).$$

Шаг 10. Положить  $\beta = 0$ .

Шаг 11. Если  $k = 0$ , вычислить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  при помощи равенства (4.27) и перейти на шаг 14.

Шаг 12. Сформировать  $\left\{ \frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$ , применяя выражение (4.26).

Шаг 13. Вычислить  $\left\{ \frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}$  по формуле (4.22).

Шаг 14. Используя выражение (3.59), получить приращения

$$\left\{ \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, \text{ отвечающие текущим значениям } \beta \text{ и } k.$$

Шаг 15. Положить  $\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r.$

Шаг 16. Увеличить  $\beta$  на единицу. Если  $\beta \leq N - 1$ , перейти на шаг 11.

Шаг 17. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N - 1$ , перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

### 4.2.3 Вычисление производных от информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для моделей, полученных в результате временной линеаризации

В случае применения *линеаризации во временной области* (подробно см. п. 1.3.2) к математической модели (1.43), (1.44) алгоритм вычисления производных от ИМФ по компонентам входного сигнала из п. 4.2.2 претерпевает незначительные изменения. Следуя [197], уточним, какие именно шаги требуют корректировки и представим их в новой редакции, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений (результат получен совместно с аспиранткой Новосибирского государственного технического университета Е.В. Филипповой):

Шаг 2. Задать  $\{u_H(\tau) \in \Omega_u, \tau \in [t_0, t_N]\}$  и, решив ДУ (см.(1.49))

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_H(\tau) \\ \frac{\partial x_H(\tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial x_H(\tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_H(\tau), u_H(\tau), \tau) \\ \frac{\partial f(x_H(\tau), u_H(\tau), \tau)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(x_H(\tau), u_H(\tau), \tau)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \tau \in [t_0, t_N]; \\ \begin{bmatrix} x_H(t_0) \\ \frac{\partial x_H(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial x_H(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

вычислить  $\left\{ x_H(\tau), \frac{\partial x_H(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Воспользовавшись равенствами (см. (1.50), (4.21), (1.51))

$$b(\tau) = f[x_H(\tau), u_H(\tau), \tau] - \frac{\partial f[x_H(\tau), u_H(\tau), \tau]}{\partial x(\tau)} x_H(\tau) - \frac{\partial f[x_H(\tau), u_H(\tau), \tau]}{\partial u(\tau)} u_H(\tau),$$

$$\Psi(\tau) = \frac{\partial f[x_H(\tau), u_H(\tau), \tau]}{\partial u(\tau)}, \quad F(\tau) = \frac{\partial f[x_H(\tau), u_H(\tau), \tau]}{\partial x(\tau)},$$

$$\text{найти } \left\{ b(\tau), \Psi(\tau), F(\tau), \frac{\partial b(\tau)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F(\tau)}{\partial \theta_i}, \tau \in [t_0, t_N], i = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

$$\text{Положить } \left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = 0, \beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0).$$

$$\text{Шаг 8. Вычислить } \left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}, H(t_{k+1}) \text{ и } \left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

при помощи формул (1.52), (1.53).

### 4.3 Выводы

1. Впервые получено выражение ИМФ для гауссовских линейных нестационарных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

2. Разработаны алгоритмы вычисления ИМФ для гауссовских линейных нестационарных моделей и моделей, полученных в результате временной или статистической линеаризации, с указанным характером вхождения неизвестных параметров. Данные алгоритмы обеспечивают возможность применения прямой и двойственной процедур синтеза оптимальных входных сигналов в классе кусочно-постоянных функций без вычисления соответствующих градиентов.

3. Предложены алгоритмы вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для гауссовских линейных нестационарных моделей и моделей, полученных в результате временной линеаризации, с неизвестными

параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Указанные алгоритмы обеспечивают возможность вычисления градиентов по рекуррентным аналитическим формулам в прямой и двойственной процедурах планирования оптимальных входных сигналов в классе кусочно-постоянных функций.

## **5 Описание программных комплексов активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе планирования входных сигналов**

Современные распространенные отечественные и зарубежные статистические программные продукты (STADIA [198,199], STATGRAPHICS [198], STATISTICA [200,201], SPSS [198,202,203], пакет Statistics Toolbox MATLABa [85,204] и т.д.) позволяют осуществлять активную параметрическую идентификацию систем на основе планирования эксперимента, при этом для описания систем используются статические модели и модели передаточных функций. Пакет System Identification Toolbox [168,169] MATLABa дает возможность выполнять пассивную идентификацию динамических систем и работать как с моделями передаточных функций, так и с линейными стационарными моделями в пространстве состояний. Различные версии пакета ADAPLAB (см., например, [205,206]) позволяют выполнять активную идентификацию линейных стационарных систем на основе конечно-частотного метода. Проведенный в рамках гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт от «05» октября 2010 г, № 14.740.11.0587, научный руководитель Чубич В.М.) поиск патентной документации (просматривались базы данных США, Канады, Японии, Китая, Германии и России) укрепил уверенность автора в том, что в настоящее время как в нашей стране, так и за ее пределами отсутствуют какие-либо аналоги разработанного в диссертации программного обеспечения, позволяющего осуществлять активную параметрическую идентификацию динамических систем на основе планирования эксперимента и работать со стохастическими нелинейными дискретными и непрерывно-дискретными моделями, содержащими неизвестные параметры в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и ковариационных матрицах помех динамики и ошибок измерений.

Остановимся на описании программных комплексов ПК-I и ПК-II активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем [207,208], созданных на основе алгоритмов из разделов 2-4 и позволяющих получать качественные математические модели при минимальных затратах на проведение испытаний.

### 5.1 Назначение и общие сведения о программных комплексах

Программные комплексы ПК-I и ПК-II предназначены для решения задач активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний (1.22), (1.23) и (1.43), (1.44) с априорными предположениями из п. 1.3.1 и п. 1.3.2 соответственно. В ПК-I по выбору пользователя применяется либо временная, либо статистическая линеаризация, в то время как в ПК-II - только временная линеаризация.

Для оценивания параметров модельных структур в программных комплексах используется ММП. Синтез входных сигналов осуществляется в зависимости от выбора прямой, двойственной или комбинированной процедурами в соответствии с критериями А - или D - оптимальности.

Программный комплекс ПК-I создан совместно с доцентом кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета О.С. Черниковой. При этом автором разработаны программы вычисления ИМФ и их производных по компонентам входного сигнала, программы нахождения значений критериев максимального правдоподобия и программы построения А- и D-оптимальных входных сигналов. О.С. Черникова разработала программы вычисления градиентов в процедурах оценивания параметров и синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов.

Программный комплекс ПК-II создан совместно с аспиранткой Новосибирского государственного технического университета Е.В. Филипповой. В нем автором разработаны программа вычисления ИМФ, программы нахождения значения критерия максимального правдоподобия и его градиента, про-

граммы построения А- и D-оптимальных входных сигналов. Е.В. Филиппова разработала программу вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала и программы вычисления градиентов в процедурах планирования А- и D-оптимальных входных сигналов.

Проектирование и реализация интерфейса к программным комплексам ПК-I и ПК-II осуществлялись совместно с О.С. Черниковой и Е.В. Филипповой.

Все программные модули, вошедшие в состав программных комплексов, реализованы на языке программирования MATLAB [209-211]. Программные комплексы ПК-I и ПК-II предполагают эксплуатацию на персональных компьютерах с процессорами не ниже Pentium III или AMD Athlon под управлением операционной системы Microsoft Windows 9X/2000/2003/XP/Vista/7.

Для работы с программными комплексами необходимо иметь установленную программную систему MATLAB версии не ниже 7.10.

## 5.2 Характеристика возможностей и организация программных комплексов

Программные комплексы ПК-I и ПК-II позволяют по определенному плану эксперимента и соответствующим ему выходным данным (они могут моделироваться или считываться из файла в случае проведения натурального эксперимента)

- находить ОМП параметров динамических моделей (структурно-вероятностные элементы этих моделей указываются в специально закрепленных для этой цели m-файлах);
- при фиксированных значениях неизвестных параметров синтезировать А- или D- оптимальный план (планируются входные сигналы) с применением прямой, двойственной или комбинированной процедуры планирования.

Программные комплексы можно использовать как в режиме активной, так и в режиме пассивной параметрической идентификации, когда планирование экспериментов не производится.

Организация программных комплексов ПК-I и ПК-II представлена на рисунке 5.1.

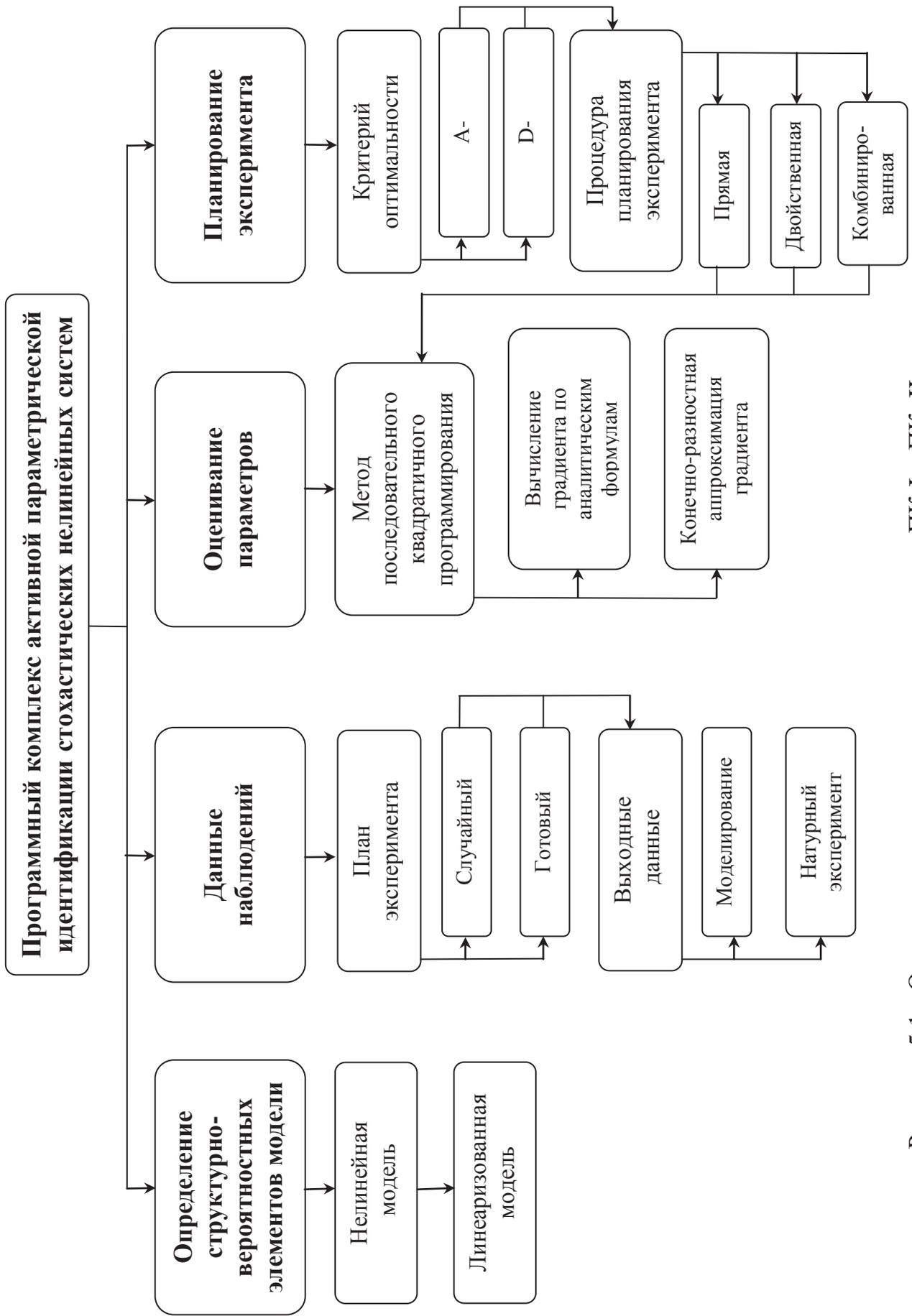


Рисунок 5.1 - Организация программных комплексов ПК-I и ПК-II

### 5.3 Описание интерфейса программных комплексов

В связи с тем, что программные комплексы ПК-I и ПК-II имеют практически одинаковый интерфейс, ограничимся описанием интерфейса программного комплекса ПК-I активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем.

После запуска на выполнение программного модуля `main.m` на экране монитора появляется головное графическое окно, изображенное на рисунке 5.2.

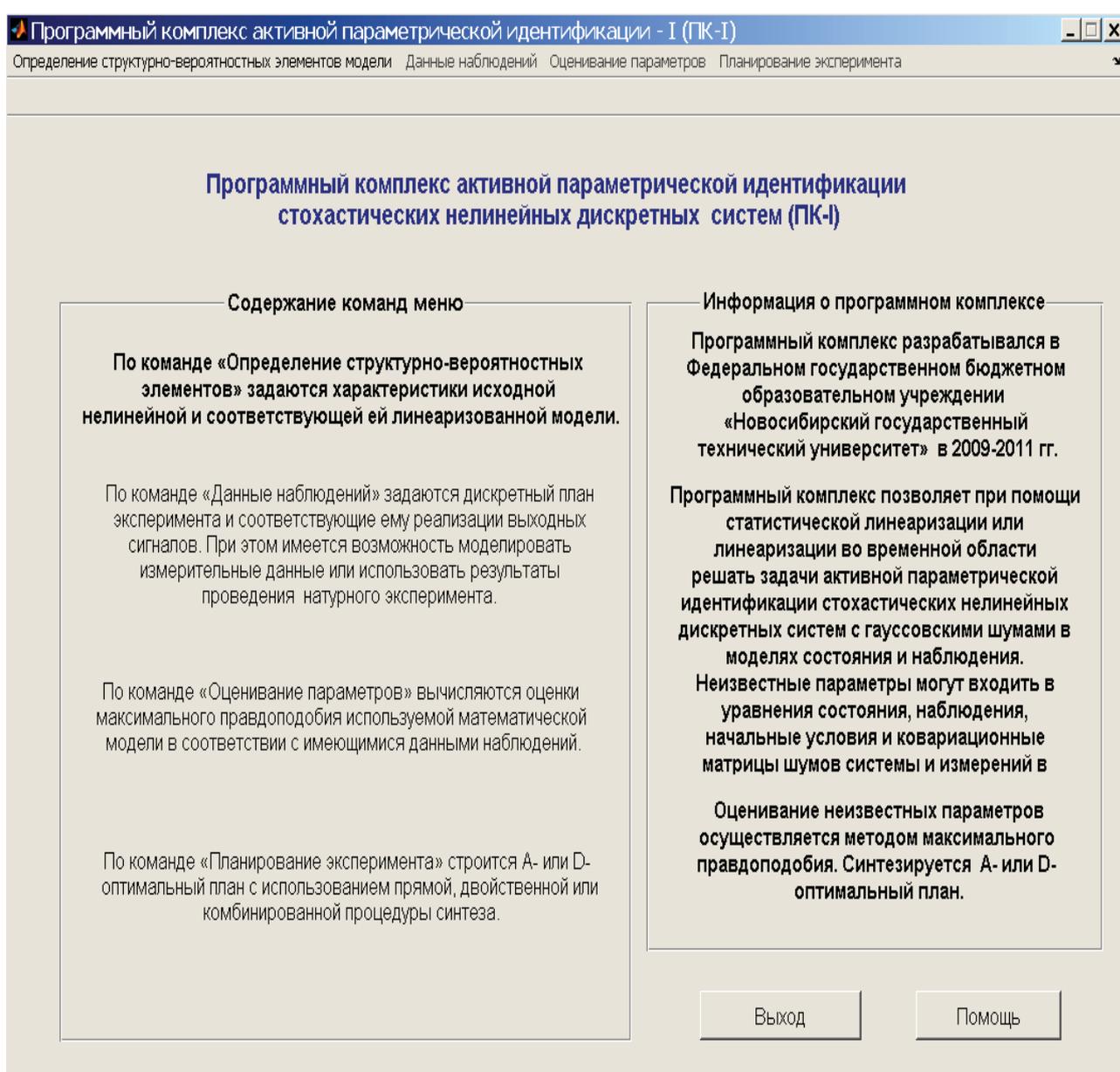


Рисунок 5.2 – Головное графическое окно ПК-I на начальном этапе

Строка меню содержит следующие четыре команды: *Определение структурно-вероятностных элементов модели*, *Данные наблюдений*, *Оценивание параметров* и *Планирование эксперимента*. При работе с программным комплексом следует иметь в виду, что активизация каждой последующей команды строки меню становится возможной только после выполнения всех предыдущих команд. На начальном этапе активна команда *Определение структурно-вероятностных элементов модели*. Остановимся на каждой из команд отдельно.

Выполнение команды *Определение структурно-вероятностных элементов модели* → *Нелинейная модель* начинается с определения характеристик нелинейной модели (1.22), (1.23). В соответствии с рисунком 5.3 необходимо подготовить m-файлы, отвечающие за вычисление значений вектор-функций  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матрицы  $\Gamma(t_k)$ , ковариационных матриц  $Q = E[w(t_k)w^T(t_k)]$ ,  $R = E[v(t_{k+1})v^T(t_{k+1})]$ ,  $P(t_0) = E\left\{ [x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T \right\}$  и вектора  $\bar{x}(t_0) = E[x(t_0)]$ . Определенные программные модули отвечают за вычисление значений соответствующих производных по компонентам вектора неизвестных параметров. Также задаются размерность вектора управления и количество неизвестных параметров.

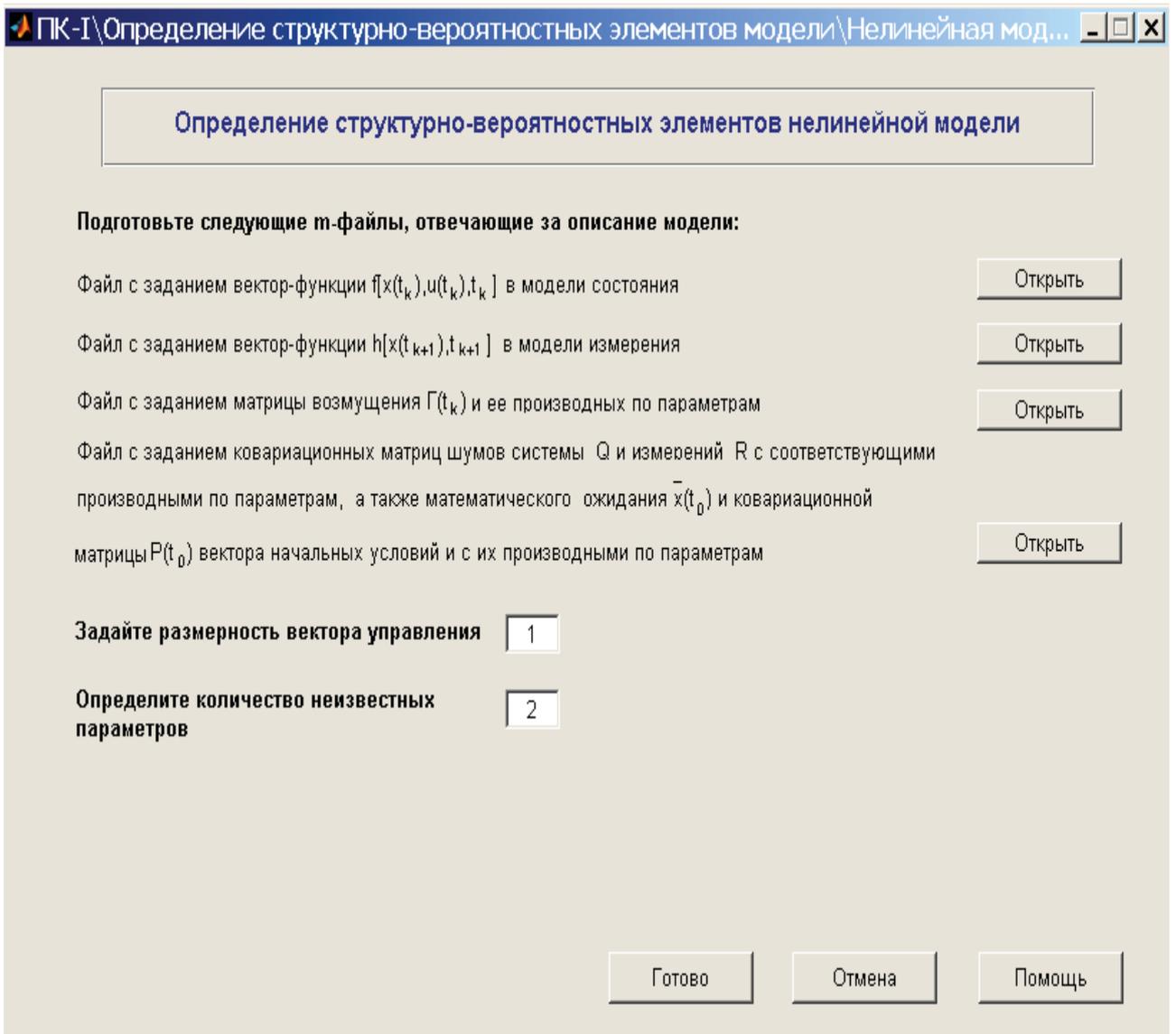


Рисунок 5.3 – Графическое окно для определения структурно-вероятностных элементов нелинейной модели

После подготовки файлов, отвечающих за структурно-вероятностное описание нелинейной модели, по команде *Определение структурно-вероятностных элементов модели* → *Линеаризованная модель* выбирается тип линеаризации и определяются структурные элементы линеаризованной модели (1.24), (1.25). Как показано на рисунке 5.4, необходимо подготовить m-файлы, отвечающие за вычисление значений векторов  $a(t_k)$  и  $A(t_{k+1})$ , матриц состояния  $F(t_k)$  и наблюдения  $H(t_{k+1})$ . Эти же программные модули отвечают за вычисление значений соответствующих производных по компонентам вектора неизвестных параметров.

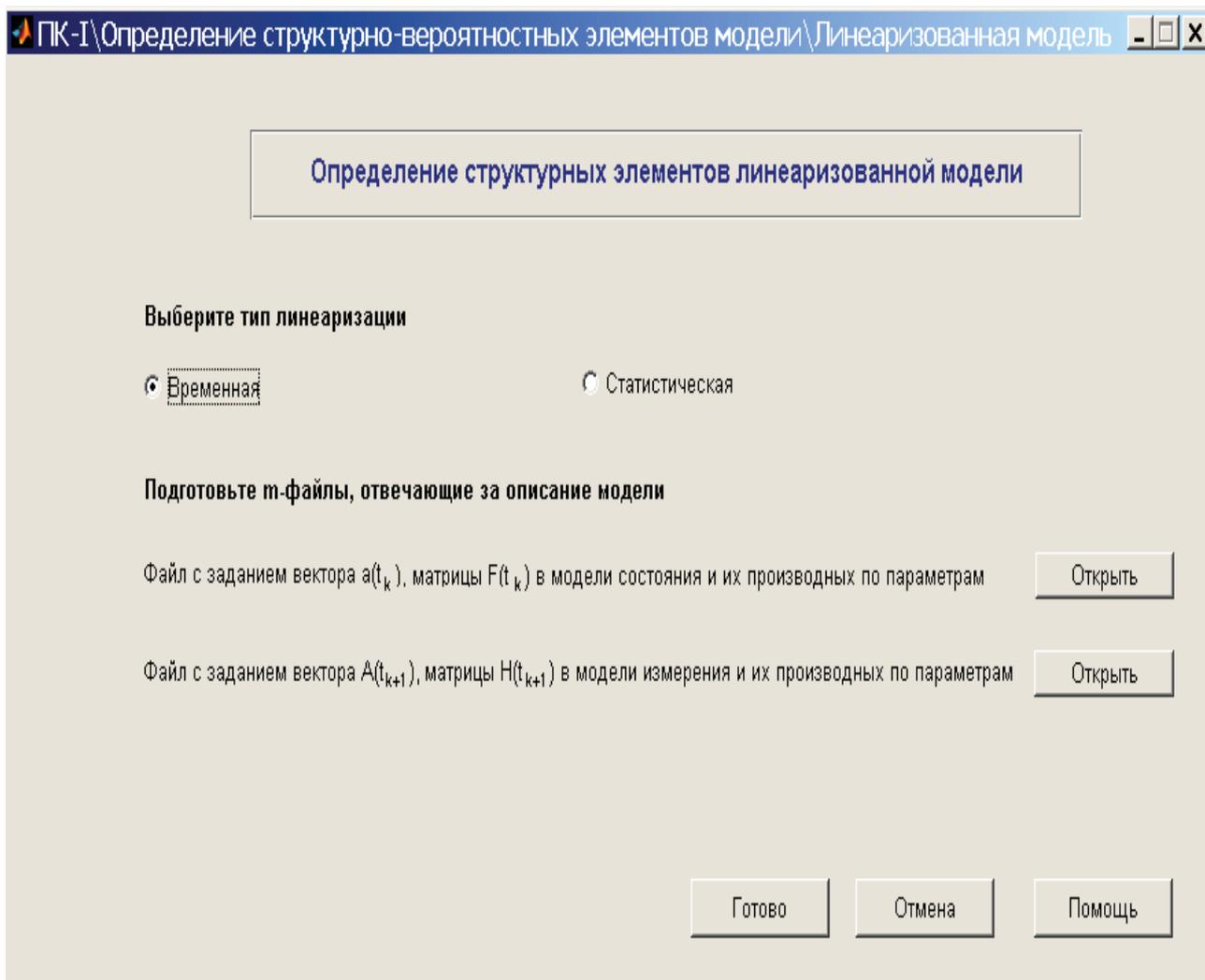


Рисунок 5.4- Графическое окно для определения структурных элементов линеаризованной модели

Возвращение в головное графическое окно программного комплекса происходит при нажатии кнопки «Готово». Становится активной команда меню *Данные наблюдений* (см. рисунок 5.5).

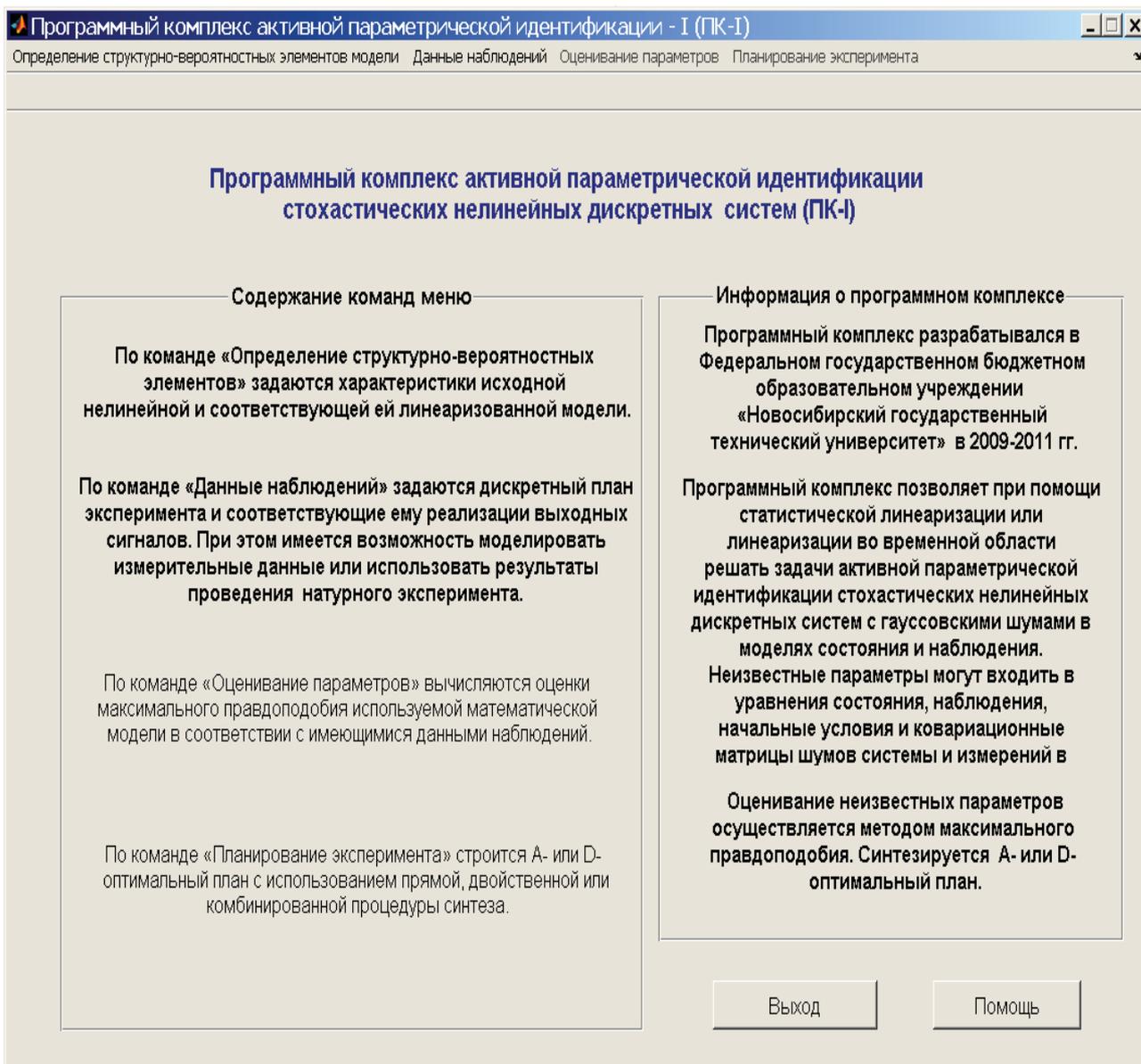


Рисунок 5.5 – Головное графическое окно ПК-I после выполнения команды *Определение структурно-вероятностных элементов модели*

По команде меню *Данные наблюдений* задаются дискретный план эксперимента (2.1) и соответствующие ему реализации выходных сигналов, в результате чего формируется множество  $\Xi$ .

По команде меню *Данные наблюдений* → *План эксперимента* → *Случайный* появляется графическое окно, представленное на рисунке 5.6. Задаются границы области допустимых входных сигналов, интервал проведения эксперимента, количество наблюдений за входами и выходами системы, количество точек в плане, общее количество запусков системы, количество запусков системы в

точках спектра плана. При нажатии кнопки «Генерировать план» с учетом введенных ограничений моделируются псевдослучайные двоичные входные сигналы, которые записываются в файл u.txt. Соответствующие им количества повторных запусков хранятся в файле k.txt. Происходит переход к заданию выходных данных.

ПК-1\Данные наблюдений\План эксперимента\Случайный

### Задание дискретного плана эксперимента с генерацией входных сигналов

**Определите границы области допустимых входных сигналов**

Нижние ограничения на компоненты вектора управления

Верхние ограничения на компоненты вектора управления

**Задайте интервал проведения эксперимента**

Время начала

Время окончания

Укажите количество наблюдений за входами и выходами системы

Введите количество точек в плане

Определите общее количество запусков системы

Задайте количество запусков системы в точках спектра плана

Рисунок 5.6 – Графическое окно для задания дискретного плана с генерацией входных сигналов

По командам меню *Данные наблюдений*→*План эксперимента*→*Готовый*→*Оптимальный* или *Данные наблюдений*→*План эксперимента*→*Готовый*→*Неоптимальный* появляется графическое окно, изображенное на рисунке 5.7.

Программный комплекс предоставляет пользователю возможность осуществлять корректировку плана. Для этого нужно установить флажок в ответном поле и внести соответствующие изменения в файлы `u_opt.txt` и `k_opt.txt` при использовании оптимального плана эксперимента либо в файлы `u.txt` и `k.txt` при работе с неоптимальным планом (в файлах `u_opt.txt` и `u.txt` хранится информация о входных сигналах, а в файлах `k_opt.txt` и `k.txt` - о количествах повторных запусков).

Возвращение в головное графическое окно программного комплекса или переход к заданию выходных данных происходит при нажатии кнопки «Далее».

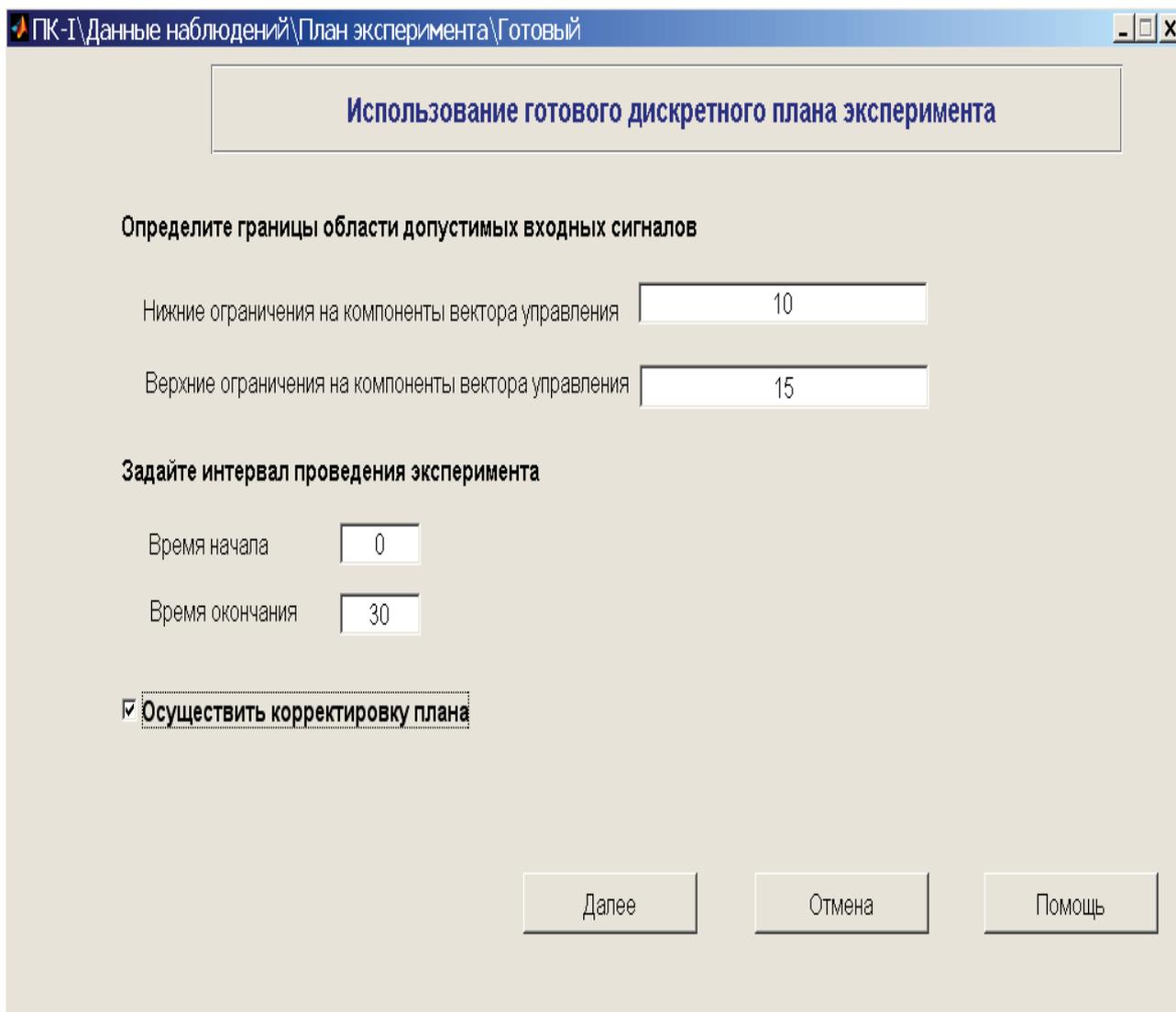


Рисунок 5.7 – Графическое окно при использовании готового плана эксперимента

По команде меню *Данные наблюдений*→*Выходные данные* указывается способ задания выходных данных, после чего моделируются либо задаются сами данные в соответствии с выбранным планом эксперимента.

Для моделирования выходных данных необходимо ввести через пробел в отведенном поле (см. рисунок 5.8) истинные значения параметров математической модели. При нажатии кнопки «Далее» данные моделируются, заносятся в файл u.txt и происходит возвращение в головное графическое окно программного комплекса. Становится активной команда меню *Оценивание параметров*.

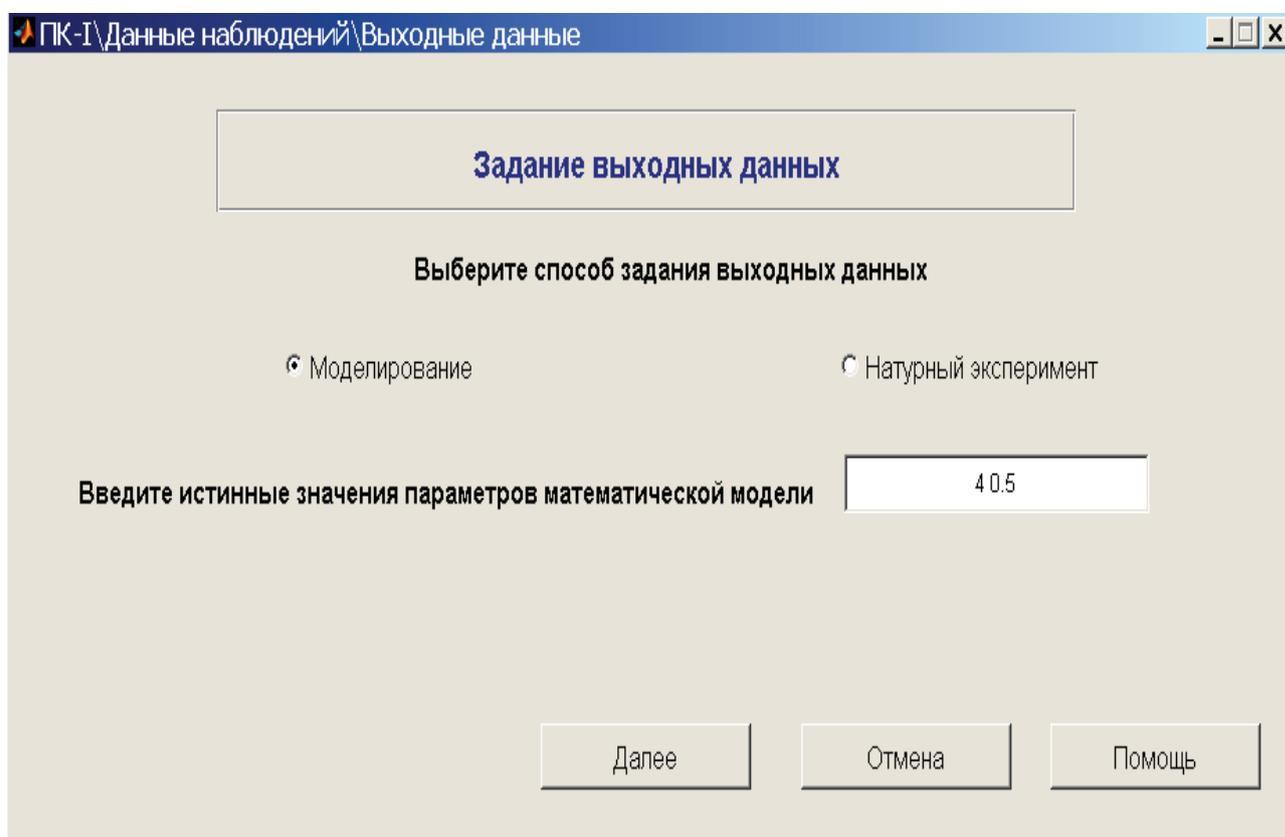


Рисунок 5.8 – Графическое окно в случае моделирования выходных данных

В случае использования данных, полученных в результате проведения натурального эксперимента (см. рисунок 5.9), можно осуществить после нажатия соответствующей кнопки ввод данных в файл u.txt с результатами измерений.

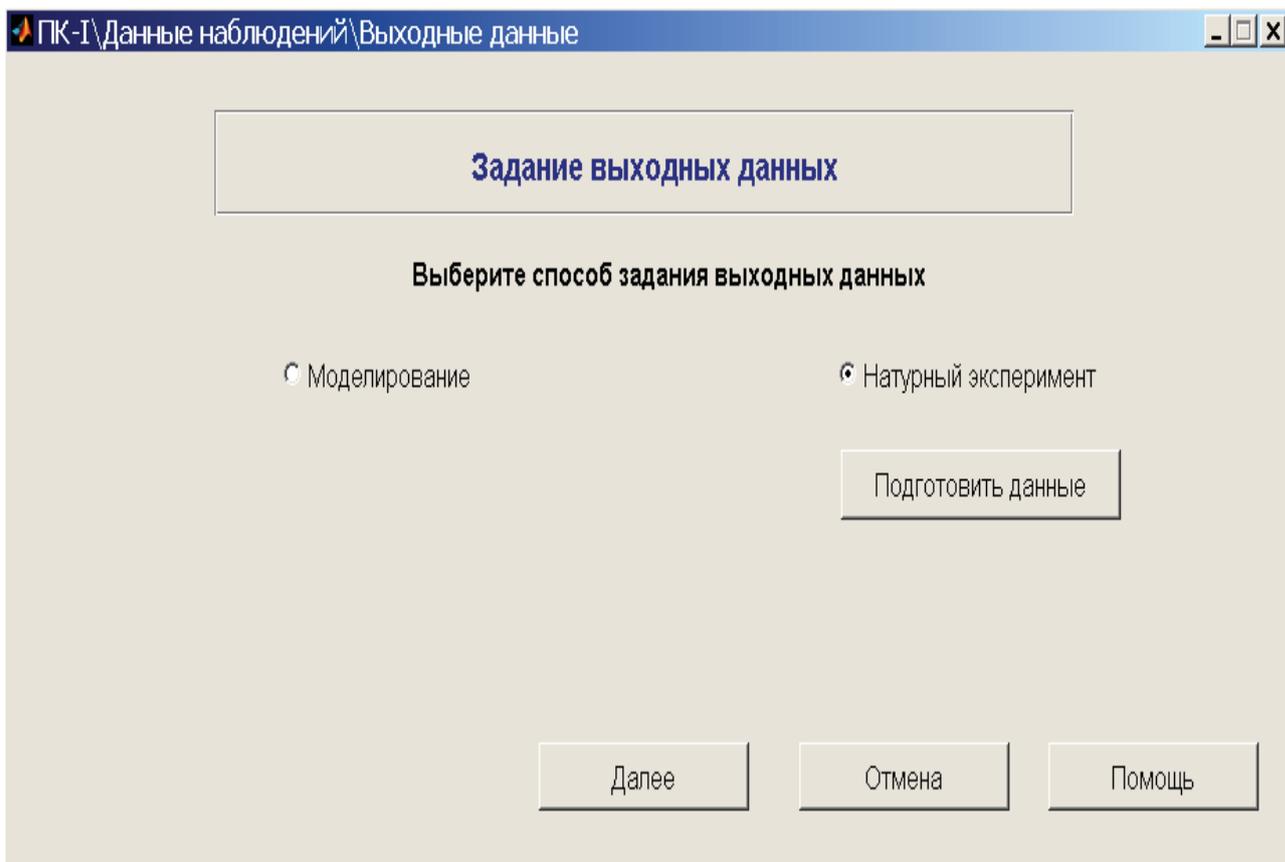


Рисунок 5.9 - Графическое окно в случае использования данных натурального эксперимента

При нажатии кнопки «Далее» происходит возвращение в головное графическое окно программного комплекса и становится активной команда меню *Оценивание параметров* (см. рисунок 5.10).

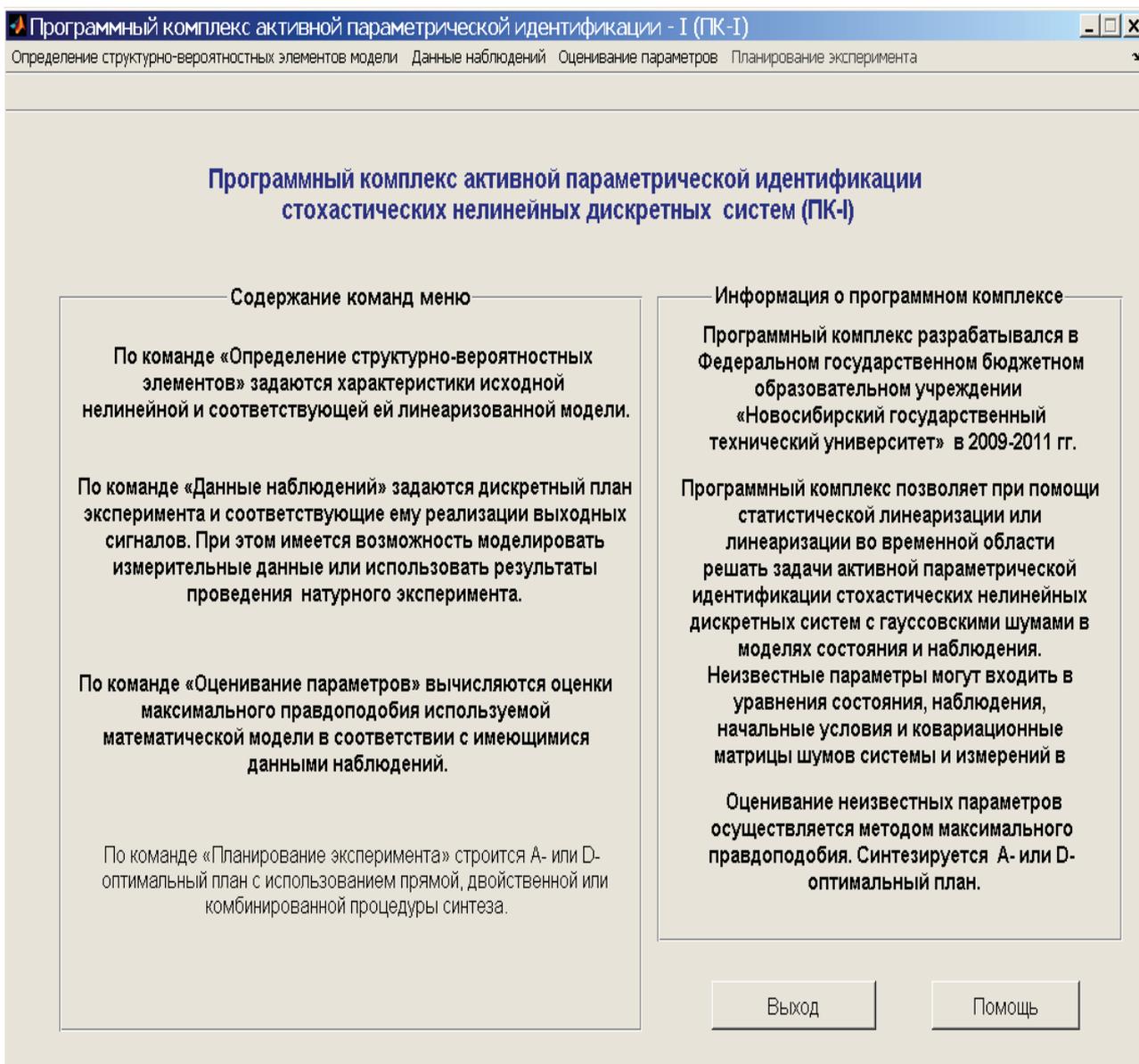


Рисунок 5.10 – Головное графическое окно программного комплекса после выполнения команды *Данные наблюдений*

По команде меню *Оценивание параметров* вычисляются ОМП параметров используемой математической модели в соответствии с имеющимися данными наблюдений.

При выборе этой команды появляется графическое окно, в отведенных полях которого вводятся через пробел границы области допустимых значений параметров, начальное приближение для поиска неизвестных параметров и указывается способ вычисления градиента (см. рисунок 5.11).

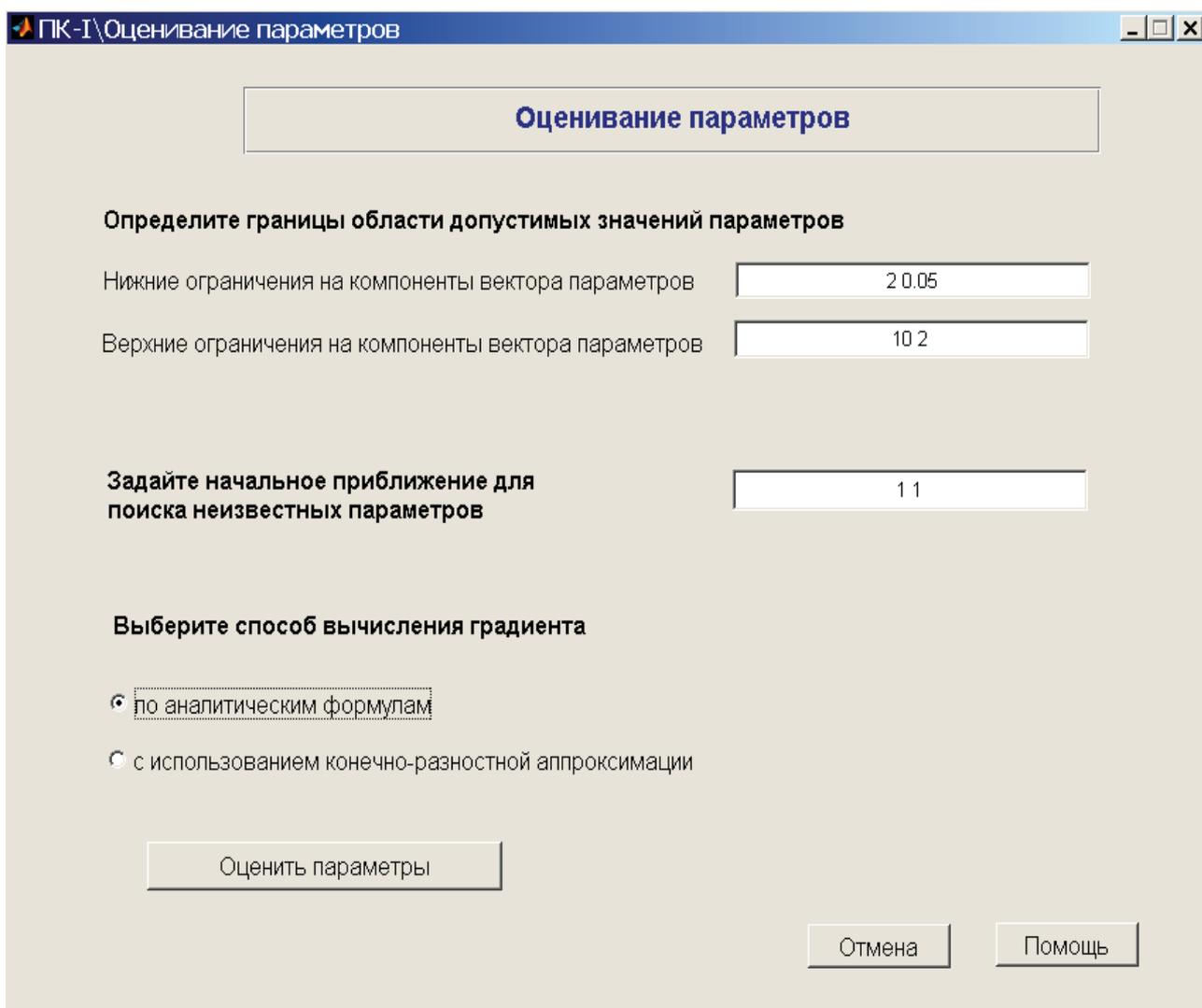


Рисунок 5.11 - Графическое окно при оценивании параметров

После нажатия кнопки «Оценить параметры» происходит обработка экспериментальных данных. Результаты вычислений записываются в файл `teta.txt`. Открывается графическое окно, показанное на рисунке 5.12, в котором содержится информация о полученных оценках неизвестных параметров и относительной ошибке оценивания в пространстве откликов. При этом если измерительные данные были получены компьютерным моделированием, выводится также относительная ошибка оценивания в пространстве параметров.

После нажатия кнопки «Далее» происходит возвращение в головное графическое окно программного комплекса. Становится активной команда *Планирование эксперимента* (см. рисунок 5.13).

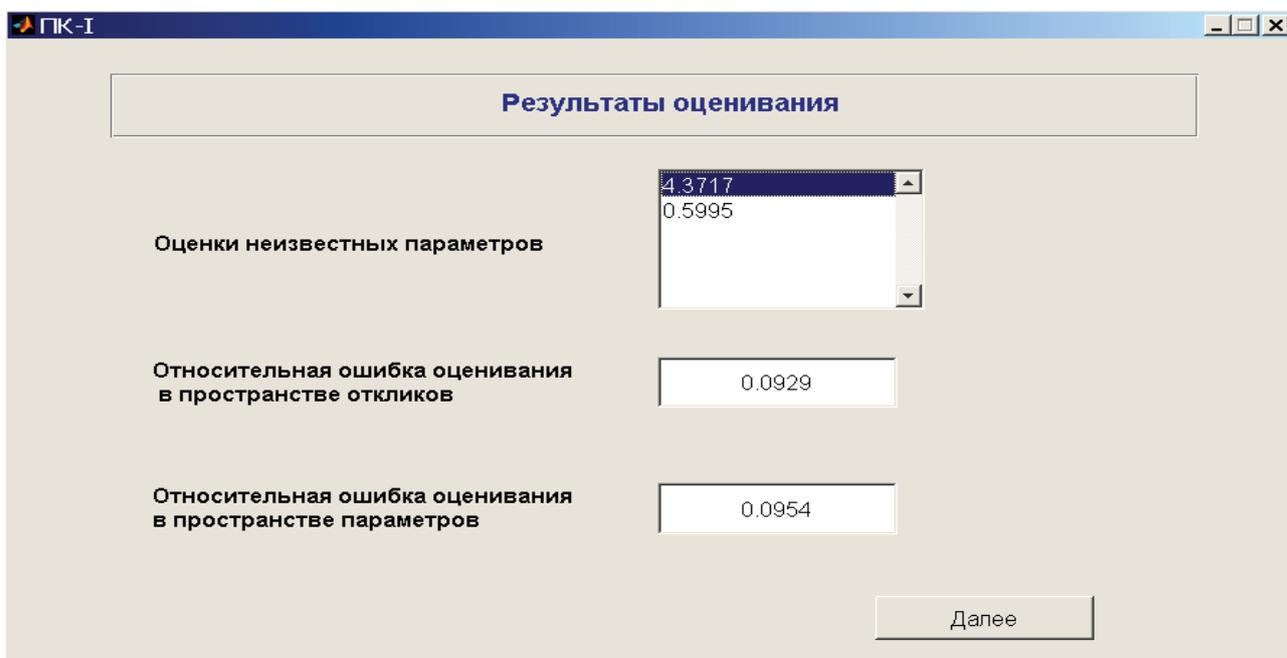


Рисунок 5.12 – Графическое окно с информацией о результатах оценивания

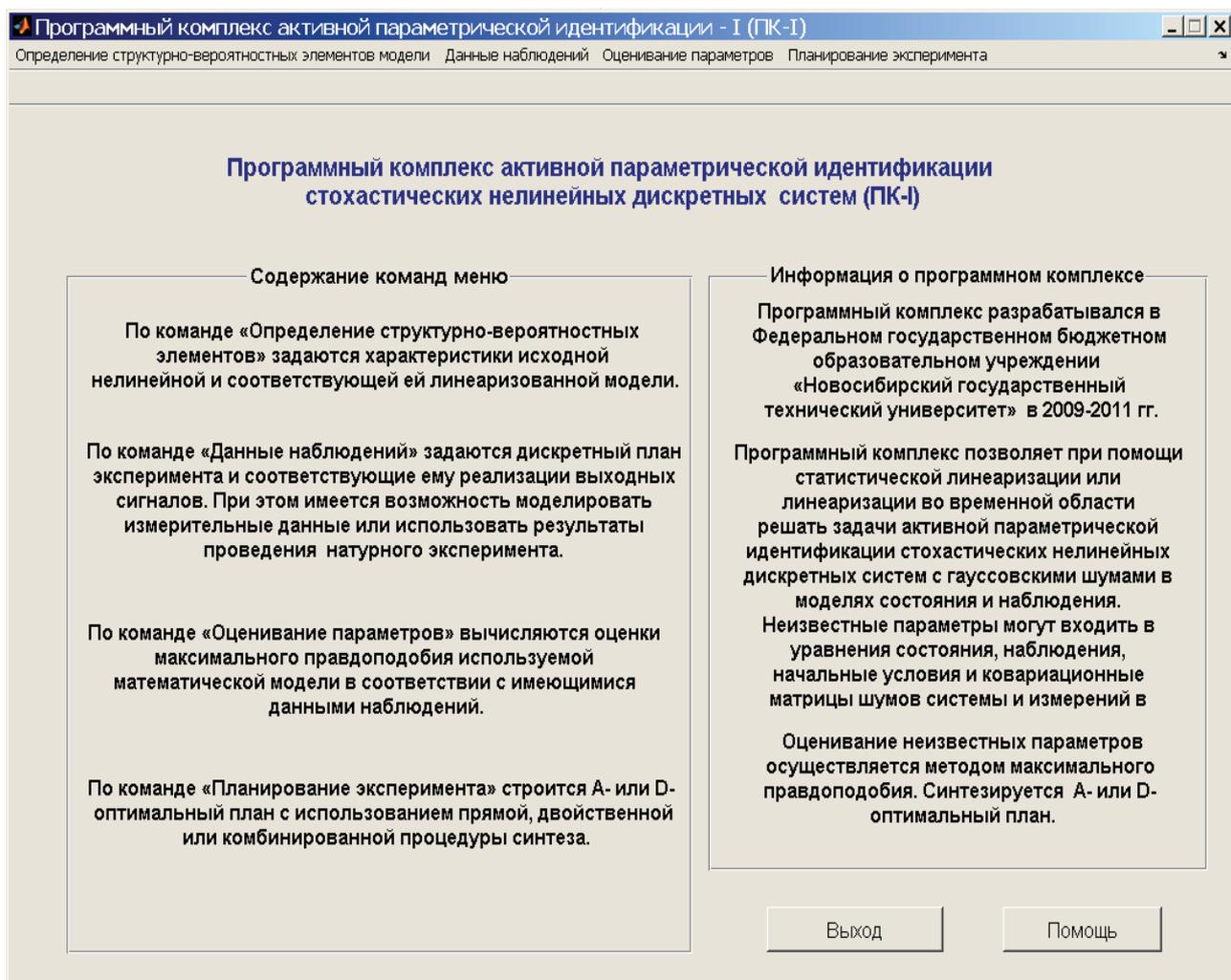


Рисунок 5.13 – Головное графическое окно программного комплекса после выполнения команды *Оценивание параметров*

По команде меню *Планирование эксперимента* синтезируется A- или D-оптимальный план. При выборе этой команды в зависимости от типа линеаризации (см. описание команды *Определение структурно-вероятностных элементов модели* → *Линеаризованная модель*) появляется одно из графических окон, представленных на рисунках 5.14, 5.15. Задается критерий оптимальности, выбираются процедура планирования эксперимента и способ вычисления градиентов в ней. Вычисление градиентов по аналитическим формулам в случае временной линеаризации предполагает подготовку m-файла, отвечающего за вычисление производных вектора  $a(t_k)$  в модели состояния по компонентам входного сигнала. В случае статистической линеаризации необходимо дополнительно подготовить m-файлы, отвечающие за вычисление производных матриц  $F(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$  и вектора  $A(t_{k+1})$  в моделях состояния и измерения по компонентам входного сигнала.

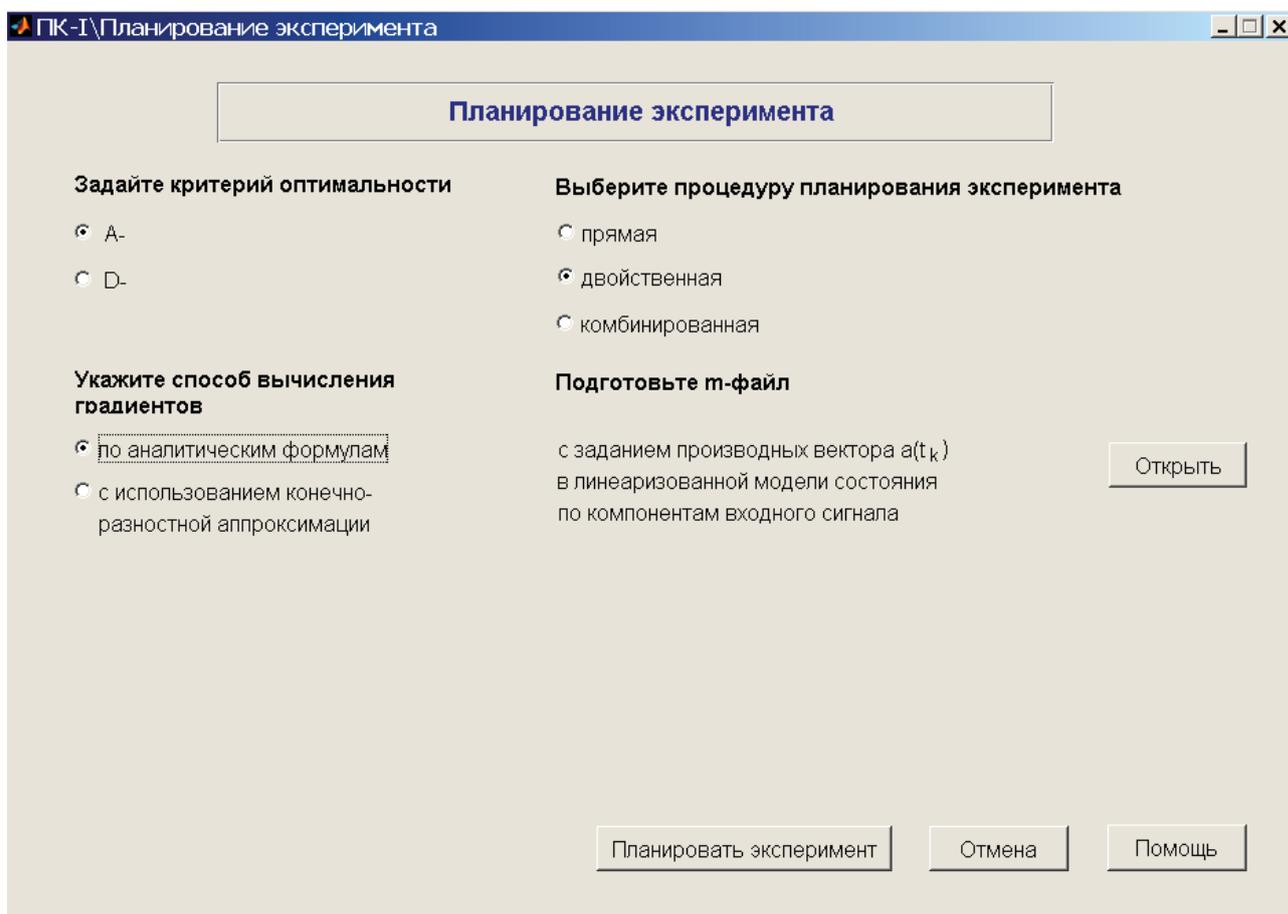


Рисунок 5.14 – Графическое окно при планировании эксперимента в случае использования временной линеаризации

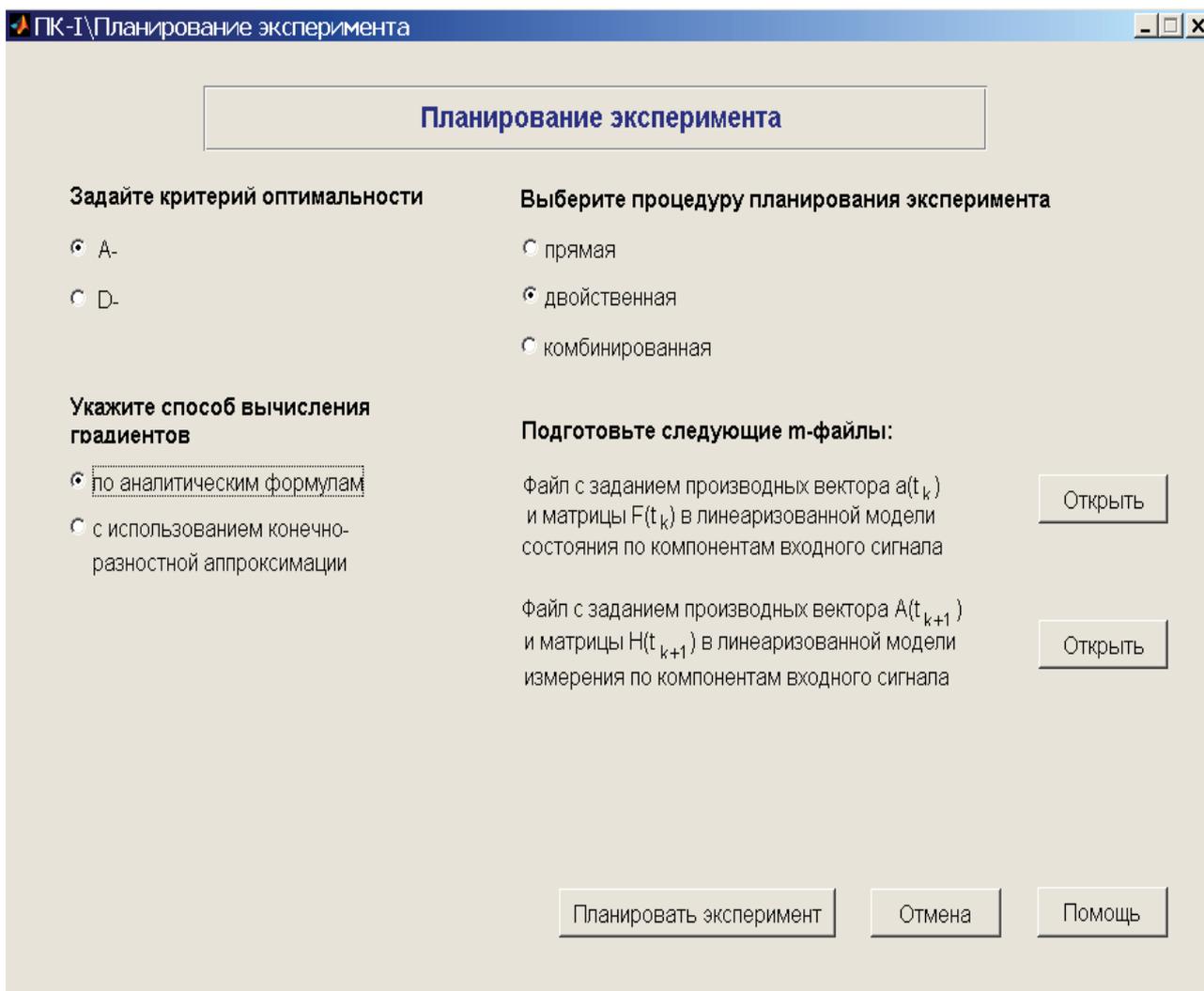


Рисунок 5.15 – Графическое окно при планировании эксперимента в случае использования статистической линеаризации

При нажатии кнопки «Планировать эксперимент» производится построение оптимального непрерывного плана и его округление до дискретного. Точки спектра результирующего плана хранятся в файле `u_opt.txt`, а соответствующие им количества повторных запусков – в файле `k_opt.txt`. Автоматически происходит возвращение в головное графическое окно.

Для завершения процедуры активной параметрической идентификации необходимо повторно выполнить команды *Данные наблюдений*→*План эксперимента*→*Готовый*→*Оптимальный* и *Оценивание параметров*.

## 5.4 Выводы

В соответствии с целью исследования разработаны не имеющие аналогов программные комплексы ПК-I и ПК-II активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем. ПК-I и ПК-II, созданные на основе алгоритмов из разделов 2-4, включают в себя модули, связанные с оцениванием неизвестных параметров математических моделей методом максимального правдоподобия и планированием А- и D-оптимальных входных сигналов, снабжены пользовательским интерфейсом и зарегистрированы как программы для ЭВМ (номера государственной регистрации 2011612716 и 20111612718 соответственно).

## 6 Примеры активной параметрической идентификации стохастических динамических систем

Результаты авторских исследований, представленные в [94,103-105,118,131], показали эффективность и целесообразность применения концепции активной параметрической идентификации при построении математических моделей стохастических стационарных линейных систем в пространстве состояний. В данном разделе нашли отражение результаты последующих исследований, преимущественно относящиеся к стохастическим системам, описываемым нелинейными дискретными и непрерывно-дискретными моделями из подраздела 1.3. Это стало возможным благодаря разработанному программному обеспечению и, прежде всего, программным комплексам активной параметрической идентификации стохастических динамических систем, описанным в разделе 5. Рассмотренные примеры в нелинейном случае могут соответствовать замкнутым системам регулирования электропривода постоянного тока и следящим системам. Линейный вариант представлен моделью процесса изменения температуры в двухкомнатной квартире.

О качестве идентификации в пространстве параметров и в пространстве откликов будем судить по значениям относительных ошибок оценивания  $\delta_\theta$ ,  $\delta_\theta^*$  и  $\delta_Y, \delta_Y^*$ , вычисляющихся, соответственно, по формулам

$$\delta_\theta = \frac{\|\theta^* - \hat{\theta}_{\text{ср}}\|}{\|\theta^*\|}, \quad \delta_\theta^* = \frac{\|\theta^* - \hat{\theta}_{\text{ср}}^*\|}{\|\theta^*\|}; \quad (6.1)$$

$$\delta_Y = \frac{\|Y_{\text{ср}} - \hat{Y}_{\text{ср}}\|}{\|Y_{\text{ср}}\|}, \quad \delta_Y^* = \frac{\|Y_{\text{ср}} - \hat{Y}_{\text{ср}}^*\|}{\|Y_{\text{ср}}\|}, \quad (6.2)$$

где  $\theta^*$  – вектор истинных значений параметров;  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$  – вектор усредненных оценок параметров, соответствующих исходному входному сигналу;  $\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$  –

вектор усредненных оценок параметров, соответствующих синтезированному входному сигналу;  $Y_{cp} = \{y_{cp}(t_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1\}$ ,  $\hat{Y}_{cp} = \{\hat{y}_{cp}(t_{k+1}|t_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1\}$ ,  $\hat{Y}_{cp}^* = \{\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1}|t_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1\}$  – усредненные по всем запускам последовательности измерений для вектора  $\theta$ , равного  $\theta^*$ ,  $\hat{\theta}_{cp}$ ,  $\hat{\theta}_{cp}^*$  соответственно, отвечающие выбранному допустимому входному сигналу  $U \in \Omega_U$ ;  $\hat{y}(t_{k+1}|t_{k+1})$  находятся при помощи равенства

$$\hat{y}(t_{k+1}|t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}), \quad (6.3)$$

в котором  $\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = E\left[x(t_{k+1}|Y_1^{k+1})\right]$  вычисляются по уравнениям дискретного или непрерывно-дискретного фильтра Калмана из п.п. 3.1.1, 4.1.1.

## 6.1 Активная параметрическая идентификация дискретных систем

### 6.1.1 Идентификация системы с применением линеаризации во временной области

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной системы:

$$x(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x(t_k) + \frac{0.01}{\theta_1}[u(t_k) - x(t_k)]e^{0.25[u(t_k) - x(t_k)]} + \frac{0.1}{\theta_1}w(t_k) \quad (6.4)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (6.5)$$

где  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  – неизвестные параметры, причем  $2 \leq \theta_1 \leq 10$ ,  $0.05 \leq \theta_2 \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из п. 1.3.1, причем

$$E[w(t_k)w(t_i)] = 0.6\delta_{ki} = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.3\delta_{ki} = R\delta_{ki};$$

$$E[x(t_0)] = 0 = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^2\right\} = 0.01 = P(t_0).$$

Выполнив линеаризацию модели состояний (6.4) во временной области относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} x_H(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) x_H(t_k) + \frac{0.01}{\theta_1} [u_H(t_k) - x_H(t_k)] e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]}, \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (6.6)$$

получим линеаризованную модель вида (1.24), (1.25), в которой

$$a(t_k) = \frac{0.01}{\theta_1} \left\{ [1 + 0.25(u_H(t_k) - x_H(t_k))] u(t_k) - 0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]^2 \right\} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]};$$

$$F(t_k) = 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.01}{\theta_1} \left\{ 1 + 0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)] \right\} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]};$$

$$\Gamma(t_k) = \frac{0.1}{\theta_1}; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1.$$

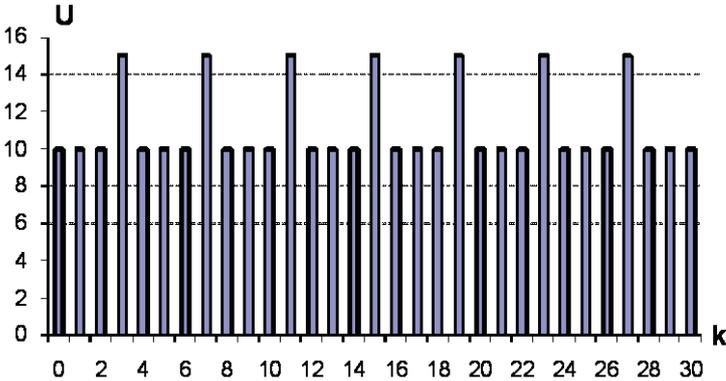
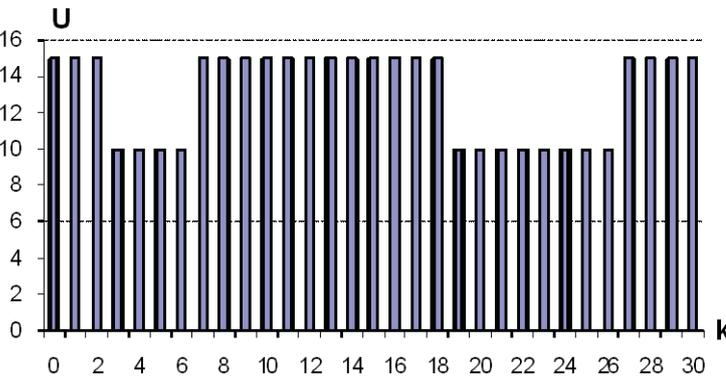
Таким образом, необходимо оценить параметры  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , функционально входящие в выражения для  $a(t_k)$ ,  $F(t_k)$  и  $\Gamma(t_k)$ .

Считая, что для номинальной траектории (6.6)  $u_H(t_k) = u(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , обеспечим наилучшее приближение построенной линеаризованной модели к своему нелинейному аналогу.

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять запусков системы с исходным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 4$ ,  $\theta_2^* = 0.5$  и  $N = 31$ . Для каждого запуска, применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценки неизвестных параметров, усредним их и найдем  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$ . Выберем область планирования  $\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^N \mid 10 \leq u(t_k) \leq 15, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ . Используя критерий А-оптимальности, синтезируем непрерывный план (в данном случае он оказался однотоочечным), в соответствии с которым снова осуществим пять независимых

запусков системы, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров, усредним их и получим  $\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$ . Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представим в таблице 6.1 [44].

Таблица 6.1 - Результаты выполнения процедуры активной идентификации модели (6.4), (6.5)

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценок параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
<p style="text-align: center;">Исходный</p> 	1	6.678	0.452
	2	6.192	0.401
	3	3.238	0.522
	4	3.867	0.581
	5	4.779	0.549
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>4.951</b>	<b>0.501</b>
<p style="text-align: center;">Синтезированный</p> 	1	4.796	0.489
	2	4.535	0.496
	3	3.668	0.497
	4	3.248	0.498
	5	4.828	0.534
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$	<b>4.215</b>	<b>0.503</b>

Воспользовавшись соотношением (6.1), найдем значения относительных ошибок оценивания в пространстве параметров  $\delta_\theta$  и  $\delta_\theta^*$ . Получим, что  $\delta_\theta = 0.236$  и  $\delta_\theta^* = 0.053$ .

При решении реальных задач истинные значения параметров неизвестны и, таким образом, сравнение качества оценивания в пространстве параметров невозможно. В связи с этим более показательным является сравнение качества идентификации в пространстве откликов.

Выполним пять запусков системы, подав на ее вход псевдослучайный двоичный сигнал  $U$ , изображенный на рисунке 6.1. Для каждого запуска при  $\theta = \theta^*$  смоделируем по уравнениям (6.4), (6.5) выборку измерений  $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ , используя которую для линеаризованной модели сформируем с помощью выражения (6.3) последовательности  $\hat{Y} = \{\hat{y}(t_1 | t_1), \hat{y}(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}^* = \{\hat{y}^*(t_1 | t_1), \hat{y}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}^*(t_N | t_N)\}$ , полагая  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}$  и  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}^*$  соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем  $Y_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ , представленные на рисунках 6.2 и 6.3.

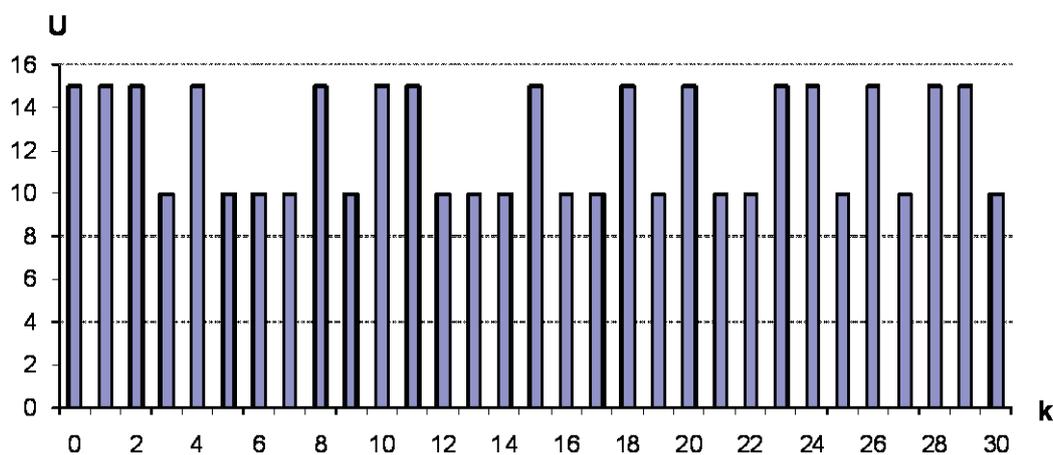


Рисунок 6.1 - Тестовый сигнал  $U$  для анализа качества прогнозирования на основе результатов из таблицы 6.1

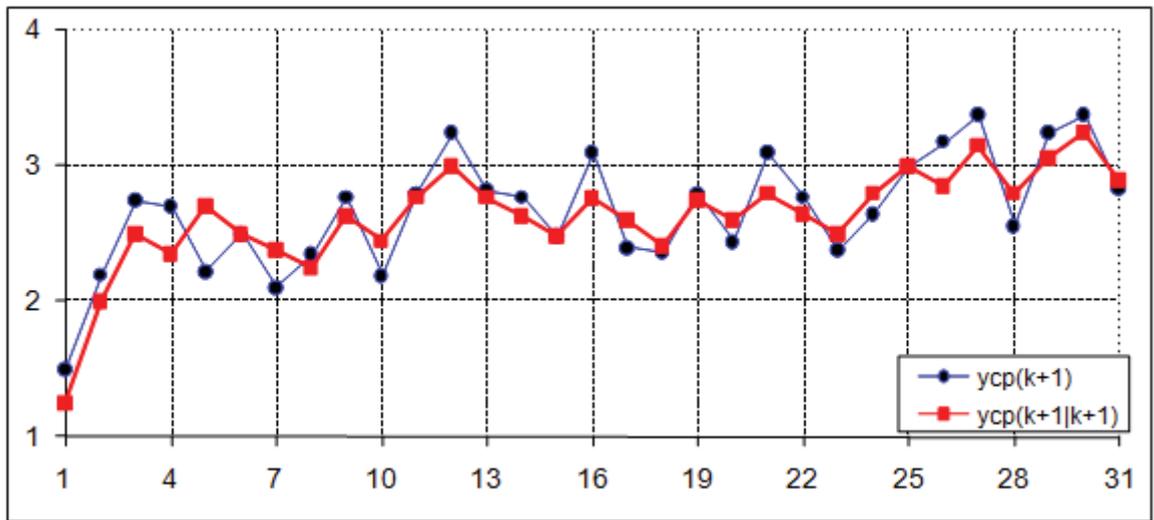


Рисунок 6.2<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}$

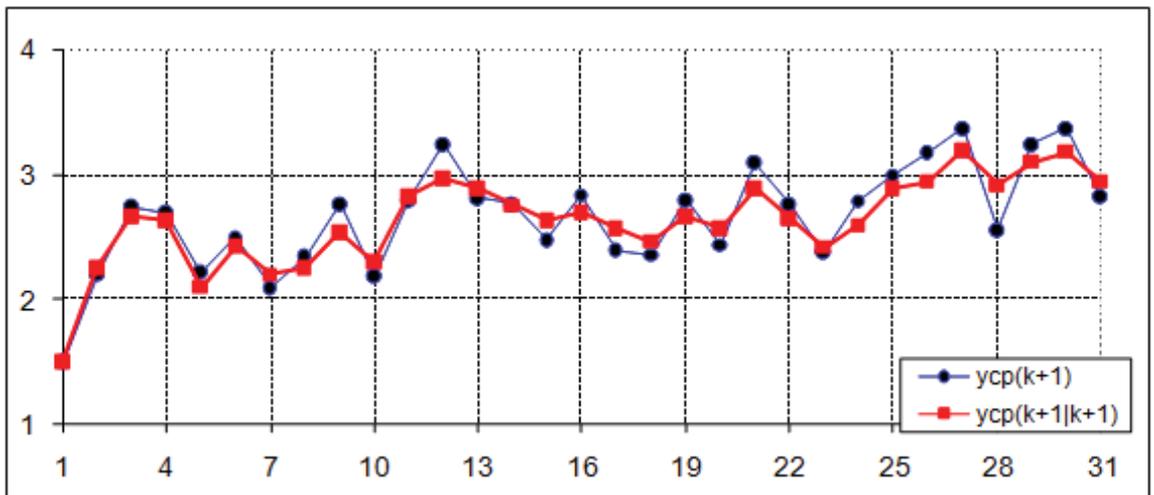


Рисунок 6.3<sup>2</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}^*$

Воспользовавшись соотношением (6.2), найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов  $\delta_Y$  и  $\delta_Y^*$ . Получим, что  $\delta_Y = 0.078$  и  $\delta_Y^* = 0.060$ .

<sup>1</sup>  $y_{cp}(k+1)$  соответствует  $y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}(t_{k+1}|t_{k+1})$

<sup>2</sup>  $y_{cp}(k+1)$  соответствует  $y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$

Таким образом, в рассмотренной задаче удалось понизить относительную ошибку оценивания с 23.6% до 5.3% в пространстве параметров и с 7.8% до 6% в пространстве откликов.

Похожий пример, но с экспоненциальной нелинейностью приведен в [39].

### 6.1.2 Идентификация системы с применением статистической линеаризации

Рассмотрим следующую модель стохастической системы, содержащей нелинейный элемент с характеристикой релейного типа и зоной нечувствительности:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + 0.05\theta\varphi[x(t_k), u(t_k)] + 0.05\theta w(t_k), \quad (6.7)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.8)$$

Здесь

$$\varphi[x(t_k), u(t_k)] = \begin{cases} -25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) < -0.75; \\ 0, & \text{если } -0.75 \leq u(t_k) - x(t_k) \leq 0.75; \\ 25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) > 0.75, \end{cases}$$

$\theta$  – неизвестный параметр, причем  $0.5 \leq \theta \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из п. 1.3.1, причем

$$E[w(t_k)w(t_i)] = 0.4\delta_{ki} = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.4\delta_{ki} = R\delta_{ki};$$

$$E[x(t_0)] = 0.5 = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^2\right\} = 0.05 = P(t_0).$$

Выполнив статистическую линеаризацию модели состояний (6.7), получим линеаризованную модель вида (1.24), (1.25), в которой в соответствии с выражениями п. 1.3.1

$$\begin{aligned}
& f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t_k) + 0.05\theta\varphi[x(t_k), u(t_k)]\} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{P(t_k)}\right] dx(t_k) = \\
& = \bar{x}(t_k) + 1.25\theta \left[ \Phi\left(\frac{0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}}\right) - \Phi\left(\frac{0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}}\right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = \\
& = 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] + \exp\left[-\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] \right\}; \\
& a(t_k) = 1.25\theta \left[ \Phi\left(\frac{0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}}\right) - \Phi\left(\frac{0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}}\right) \right] + \\
& + \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] + \exp\left[-\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] \right\}; \\
& F(t_k) = 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] + \exp\left[-\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)}\right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\Gamma(t_k) = 0.05\theta; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1.$$

Здесь  $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - функция Крампа (Лапласа);  $\bar{x}(t_k)$  и  $P(t_k)$  определяются по рекуррентным соотношениям

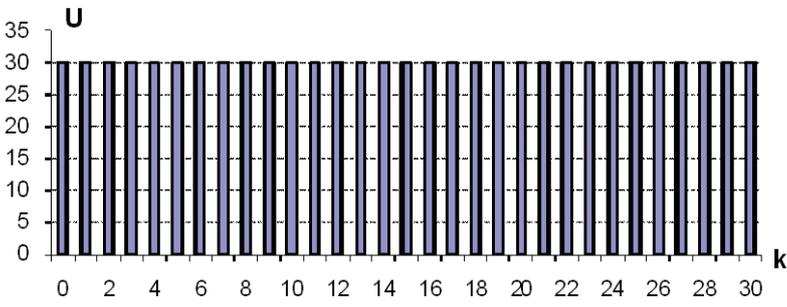
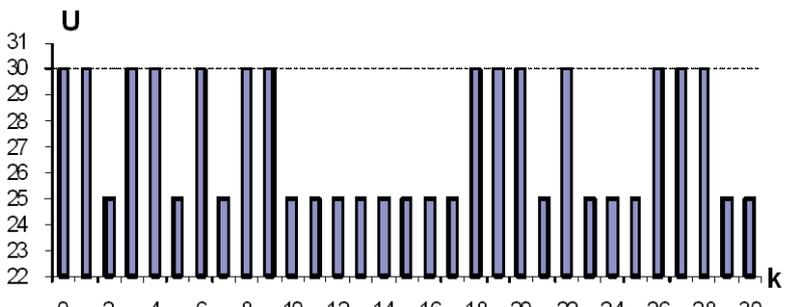
$$\bar{x}(t_k) = \begin{cases} \bar{x}(t_{k-1}) + 1.25\theta \left[ \Phi \left( \frac{0.75 + u(t_{k-1}) - \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) - \Phi \left( \frac{0.75 - u(t_{k-1}) + \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) \right], & \text{если } k=1,2,\dots,N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k=0; \end{cases}$$

$$P(t_k) = \begin{cases} F^2(t_{k-1})P(t_{k-1}) + \Gamma^2(t_k)Q, & \text{если } k=1,2,\dots,N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k=0. \end{cases}$$

Таким образом, необходимо оценить параметр  $\theta$ , функционально входящий в выражения для  $a(t_k)$ ,  $F(t_k)$  и  $\Gamma(t_k)$ .

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять запусков системы с исходным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинном значении параметра  $\theta^* = 1$  и  $N = 31$ . Для каждого запуска, применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценку неизвестного параметра, усредним полученные оценки и найдем  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$ . Выберем область планирования  $\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^N \mid 25 \leq u(t_k) \leq 30, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ . Используя критерий А-оптимальности синтезируем непрерывный план (в данном случае он оказался одноточечным), в соответствии с которым снова осуществим пять независимых запусков системы, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров, усредним их и получим  $\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$ . Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представим в таблице 6.2 [106].

Таблица 6.2 - Результаты выполнения процедуры активной идентификации модели (6.7), (6.8)

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценок параметра
<p style="text-align: center;">Исходный</p> 	1	0.972
	2	0.950
	3	1.641
	4	1.295
	5	1.194
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>1.210</b>
<p style="text-align: center;">Синтезированный</p> 	1	0.978
	2	1.025
	3	1.189
	4	0.982
	5	0.903
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$	<b>1.015</b>

Воспользовавшись соотношением (6.1), найдем значения относительных ошибок оценивания в пространстве параметров  $\delta_{\theta}$  и  $\delta_{\theta}^*$ . Получим, что  $\delta_{\theta} = 0.210$  и  $\delta_{\theta}^* = 0.015$ .

Выполним пять запусков системы, подав на ее вход псевдослучайный двоичный сигнал  $U$ , изображенный на рисунке 6.4. Для каждого запуска при  $\theta = \theta^*$  смоделируем по уравнениям (6.7), (6.8) выборку измерений  $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ , используя которую для линеаризованной модели сформируем с помощью выражения (6.3) последовательности  $\hat{Y} = \{\hat{y}(t_1 | t_1), \hat{y}(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}^* = \{\hat{y}^*(t_1 | t_1), \hat{y}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}^*(t_N | t_N)\}$ , полагая  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}$  и  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}^*$  соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем  $Y_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ , представленные на рисунках 6.5 и 6.6.

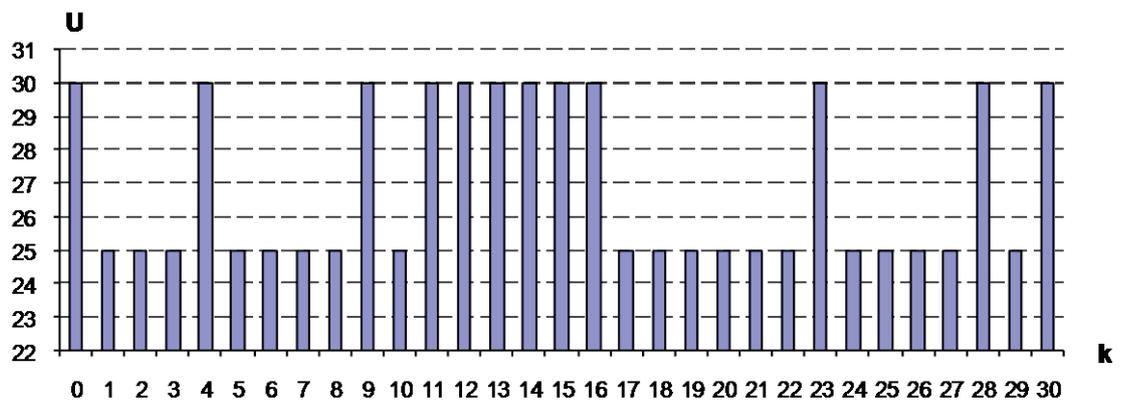


Рисунок 6.4 - Тестовый сигнал  $U$  для анализа качества прогнозирования на основе результатов из таблицы 6.2

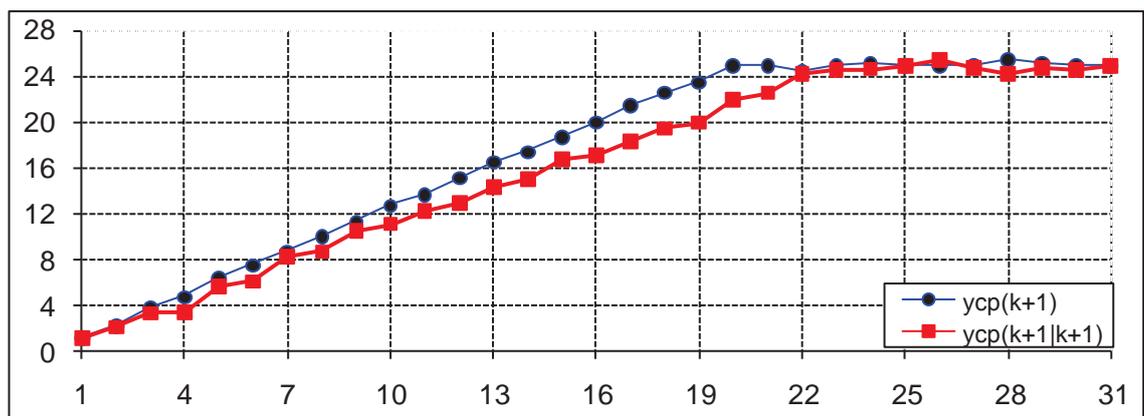


Рисунок 6.5<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{\text{ср}}$  и  $\hat{Y}_{\text{ср}}$

<sup>1</sup>  $Y_{\text{ср}}(k+1)$  соответствует  $y_{\text{ср}}(t_{k+1})$ , а  $Y_{\text{ср}}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{\text{ср}}(t_{k+1}|t_{k+1})$

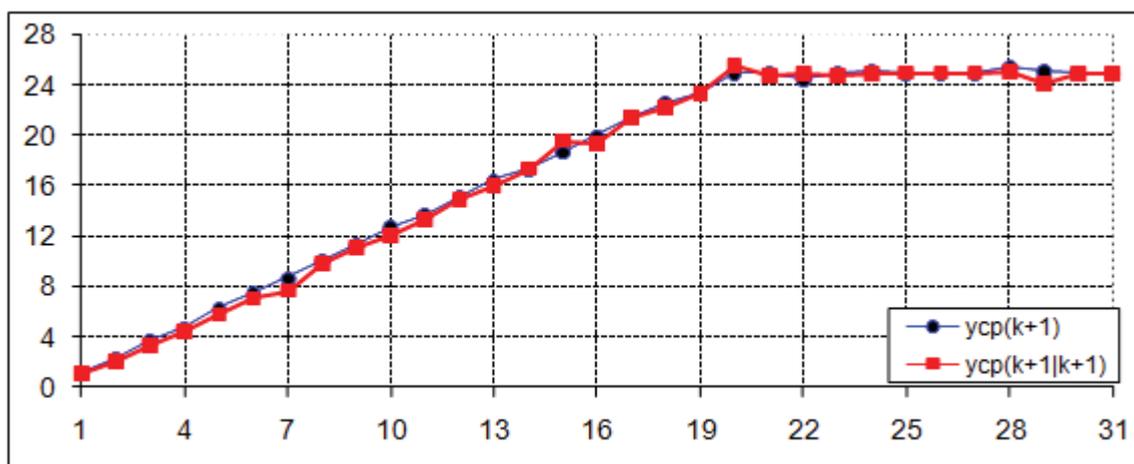


Рисунок 6.6<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{\text{ср}}$  и  $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$

Воспользовавшись соотношением (6.2), найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов  $\delta_Y$  и  $\delta_Y^*$ . Получим, что  $\delta_Y = 0.134$  и  $\delta_Y^* = 0.022$ .

Таким образом, в рассмотренной задаче удалось понизить относительную ошибку оценивания с 21.0% до 1.5% в пространстве параметров и с 13.4% до 2.2% в пространстве откликов.

Похожий пример, но с другим исходным входным сигналом, рассмотрен в [41].

### 6.1.3 Идентификация системы с использованием решения задачи дискретного оптимального управления

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной системы:

$$x(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x(t_k) + \frac{0.1}{\theta_1} e^{0.25[u(t_k) - x(t_k)]} + \frac{0.1}{\theta_1} w(t_k); \quad (6.9)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.10)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – неизвестные параметры системы, причем  $3 \leq \theta_1 \leq 10$ ,  $0.05 \leq \theta_2 \leq 1.25$ .

---

<sup>1</sup>  $Y_{\text{ср}}(k+1)$  соответствует  $y_{\text{ср}}(t_{k+1})$ , а  $y_{\text{ср}}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{\text{ср}}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из п. 1.3.1, причем

$$\begin{aligned} E[w(t_k)w(t_i)] &= 0.6\delta_{ki} = Q\delta_{ki}; \\ E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] &= 0.6\delta_{ki} = R\delta_{ki}; \\ E[x(t_0)] &= 0 = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^2\right\} = 0.01 = P(t_0). \end{aligned}$$

Выполнив линеаризацию модели состояний (6.9) относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} x_H(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x_H(t_k) + \frac{0.1}{\theta_1}e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

получим линеаризованную модель вида (1.24), (1.25), в которой

$$a(t_k) = \frac{0.1}{\theta_1} \left\{ 1 - 0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)] + 0.25u(t_k) \right\} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]},$$

$$F(t_k) = 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.025}{\theta_1} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]},$$

$$\Gamma(t_k) = \frac{0.1}{\theta_1}; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1.$$

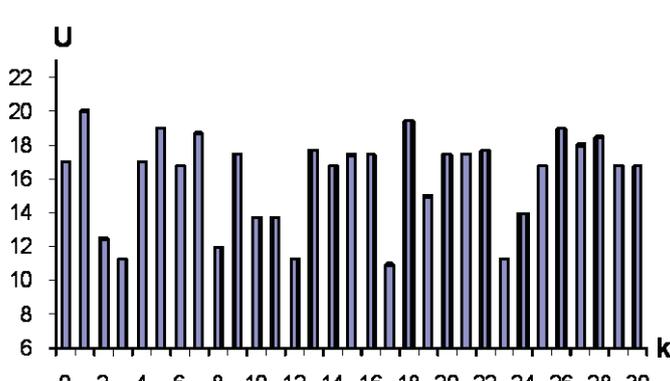
Таким образом, необходимо оценить параметры  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , функционально входящие в выражения для  $a(t_k)$ ,  $F(t_k)$  и  $\Gamma(t_k)$ .

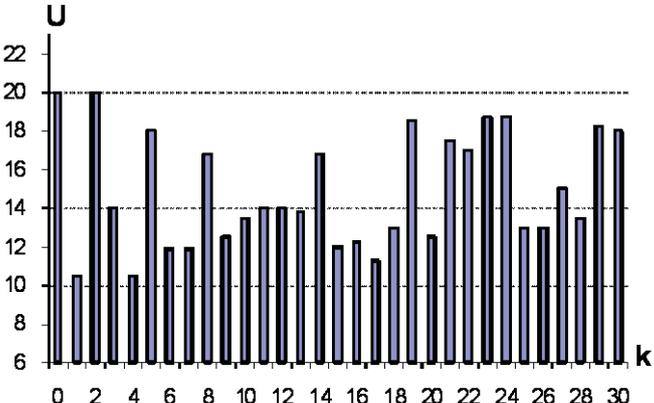
Считая, что для номинальной траектории (6.11)  $u_H(t_k) = u(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , обеспечим наилучшее приближение построенной линеаризованной модели к своему нелинейному аналогу.

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять запусков системы с исходным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 4$ ,  $\theta_2^* = 0.5$  и  $N = 31$ . Для каждого запуска, применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценки не-

известных параметров, усредним их и найдем  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$ . Выберем область планирования  $\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^N \mid 10 \leq u(t_k) \leq 20, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ . При помощи методов последовательного квадратичного программирования и Шатровского синтезируем входные сигналы, в соответствии с которыми снова осуществим пять независимых запусков системы, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров, усредним их и получим  $\hat{\theta}_{\text{срSQP}}^*$  и  $\hat{\theta}_{\text{срSH}}^*$  соответственно. Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представим в таблице 6.3 [45].

Таблица 6.3 - Результаты выполнения процедуры активной идентификации модели (6.9), (6.10)

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценок параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
1	2	3	4
<p style="text-align: center;">Исходный</p> 	1	4.686	0.432
	2	3.277	0.553
	3	5.067	0.423
	4	6.482	0.609
	5	7.424	0.282
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>5.387</b>	<b>0.460</b>

1	2	3	4
<p>Синтезированный методом последовательного квадратичного программирования</p> 	1	4.190	0.561
	2	4.043	0.502
	3	3.785	0.461
	4	3.803	0.498
	5	4.495	0.567
	$\hat{\theta}_{\text{cpSQP}}^*$	<b>4.063</b>	<b>0.518</b>
<p>Синтезированный методом Шатровского</p> 	1	4.695	0.492
	2	4.231	0.506
	3	3.139	0.497
	4	3.625	0.522
	5	4.723	0.538
	$\hat{\theta}_{\text{cpSH}}^*$	<b>4.083</b>	<b>0.511</b>

Воспользовавшись соотношением (6.1), найдем значения относительных ошибок оценивания в пространстве параметров  $\delta_{\theta}$ ,  $\delta_{\theta\text{SQP}}^*$  и  $\delta_{\theta\text{SH}}^*$ . Получим, что  $\delta_{\theta} = 0.344$ ,  $\delta_{\theta\text{SQP}}^* = 0.016$  и  $\delta_{\theta\text{SH}}^* = 0.021$ . Факт  $\delta_{\theta\text{SQP}}^* < \delta_{\theta\text{SH}}^*$ , объясняется

тем, что метод Шатровского позволяет получать, вообще говоря, не оптимальное, а достаточно хорошее допустимое управление. Применение методов нелинейного программирования обеспечивает более качественные результаты оценивания.

Выполним пять запусков системы, подав на ее вход псевдослучайный двоичный сигнал  $U$ , изображенный на рисунке 6.7. Для каждого запуска при  $\theta = \theta^*$  смоделируем по уравнениям (6.9), (6.10) выборку измерений  $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ , используя которую для линеаризованной модели сформируем с помощью выражения (6.3) последовательности  $\hat{Y} = \{\hat{y}(t_1 | t_1), \hat{y}(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}_{SQP} = \{\hat{y}_{SQP}^*(t_1 | t_1), \hat{y}_{SQP}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}_{SQP}^*(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}_{SH} = \{\hat{y}_{SH}^*(t_1 | t_1), \hat{y}_{SH}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}_{SH}^*(t_N | t_N)\}$ , полагая  $\theta = \hat{\theta}_{cp}$ ,  $\theta = \hat{\theta}_{cpSQP}$  и  $\theta = \hat{\theta}_{cpSH}$  соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем  $Y_{cp}$ ,  $\hat{Y}_{cp}$ ,  $\hat{Y}_{cpSQP}$  и  $\hat{Y}_{cpSH}$ , представленные на рисунках 6.8-6.10.

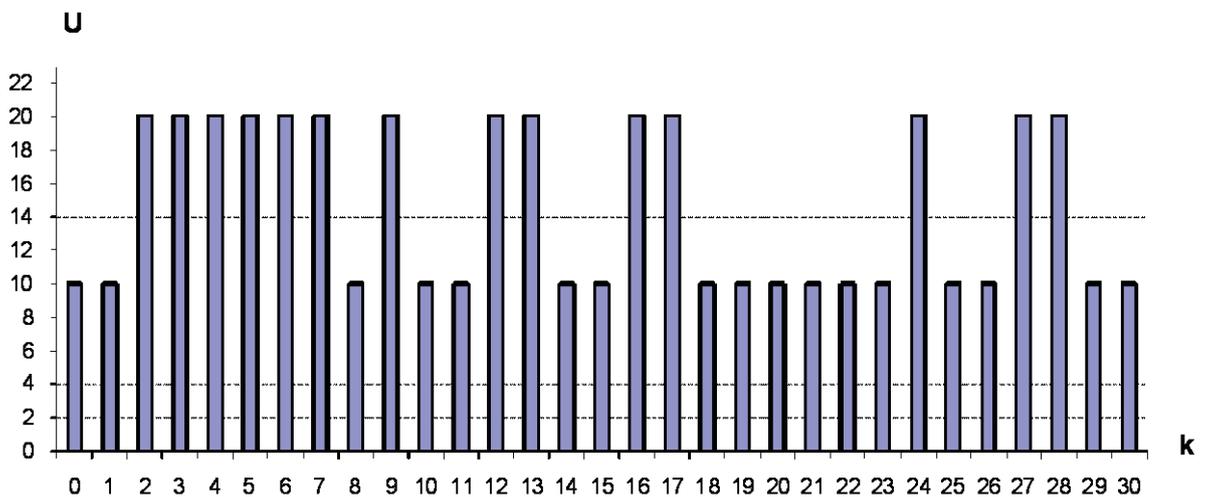


Рисунок 6.7 - Тестовый сигнал  $U$  для анализа качества прогнозирования на основе результатов из таблицы 6.3

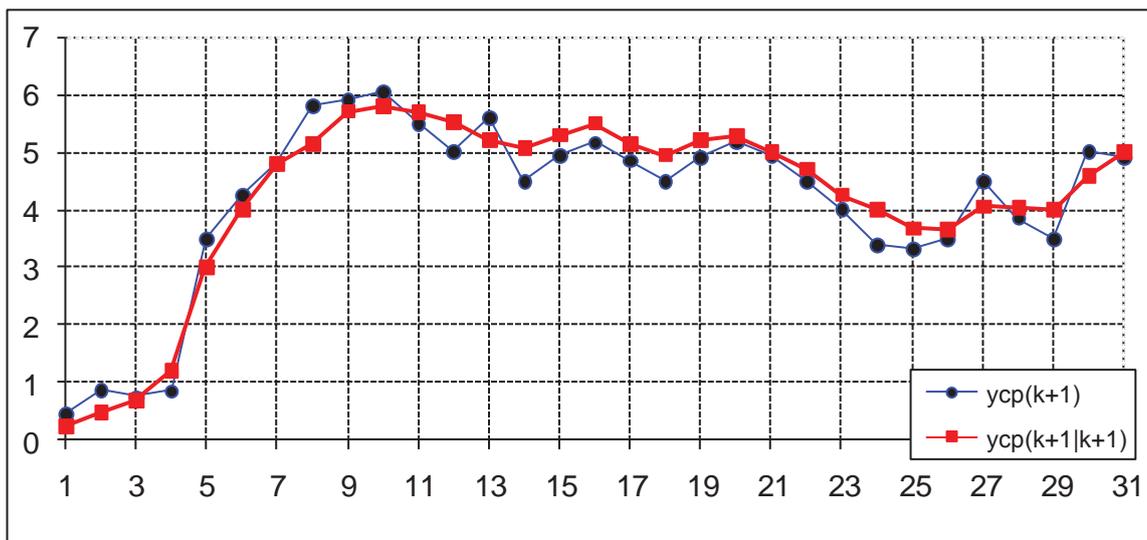


Рисунок 6.8<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}$

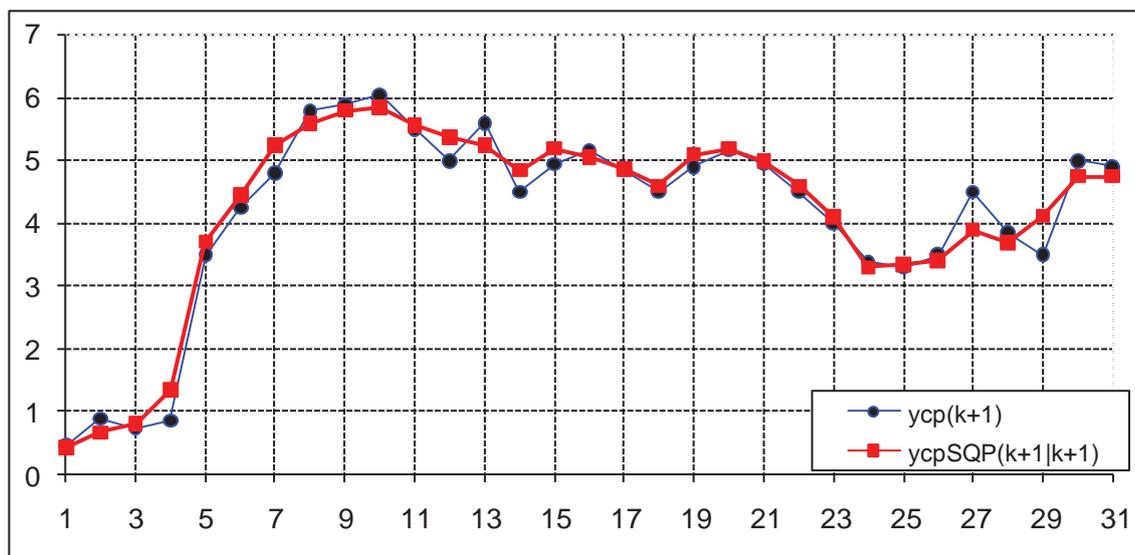


Рисунок 6.9<sup>2</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cpSQP}^*$

<sup>1</sup>  $y_{cp}(k+1)$  соответствует  $y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}(t_{k+1}|t_{k+1})$

<sup>2</sup>  $y_{cp}(k+1)$  соответствует  $y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $y_{cpSQP}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cpSQP}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$

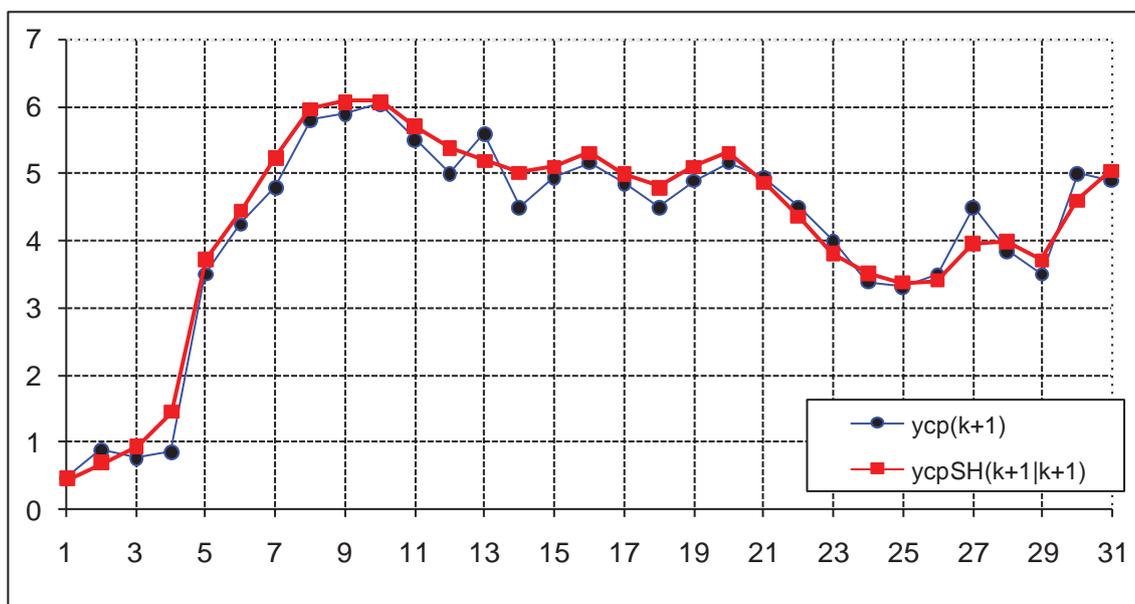


Рисунок 6.10<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cpSH}^*$

Воспользовавшись соотношением (6.2), найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов  $\delta_Y$ ,  $\delta_{Y_{SQP}}^*$  и  $\delta_{Y_{SH}}^*$ . Получим, что  $\delta_Y = 0.080$  и  $\delta_{Y_{SQP}}^* = 0.059$ ,  $\delta_{Y_{SH}}^* = 0.061$ .

Таким образом, в рассмотренной задаче удалось понизить относительную ошибку оценивания с 34.4% до 1.6% в пространстве параметров и с 8.0% до 5.9% в пространстве откликов при выполнении расчетов методом последовательного квадратичного программирования. При расчетах методом Шатровского относительная ошибка оценивания понизилась с 34.4% до 2.1% в пространстве параметров и с 8.0% до 6.1% в пространстве откликов.

<sup>1</sup>  $Y_{cp}(k+1)$  соответствует  $Y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $Y_{cpSH}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{Y}_{cpSH}(t_{k+1}|t_{k+1})$

#### 6.1.4 Идентификация линейной стационарной системы на основе планирования входных сигналов в установившемся режиме

Вернемся к дискретизованной стохастической модели процесса изменения температуры в двухкомнатной квартире со смежными комнатами и нагревателем, расположенным в первой из них. Для нее

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}) &= \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} u(t_k) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} w(t_k) = \\ &= \mathbf{F} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{\Psi} u(t_k) + \mathbf{\Gamma} w(t_k); \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{k+1}) &= \begin{bmatrix} y_1(t_{k+1}) \\ y_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t_{k+1}) \\ v_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{v}(t_{k+1}), \quad k=0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Подлежащие оцениванию параметры  $\theta_1, \theta_2$  функционально входят в элементы матриц  $\mathbf{F}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{\Gamma}$ , формальные выражения для которых приведены в п. 3.3.3. Будем считать, что  $\theta_i \in (0,1]$  для  $i=1,2$  и выполнены все априорные предположения из п. 1.3.1, причем

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(t_k) \mathbf{w}(t_i)] &= 0.1 \delta_{ki} = \mathbf{Q} \delta_{ki}; \\ E[\mathbf{v}(t_{k+1}) \mathbf{v}^T(t_{i+1})] &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \delta_{ki}; \end{aligned}$$

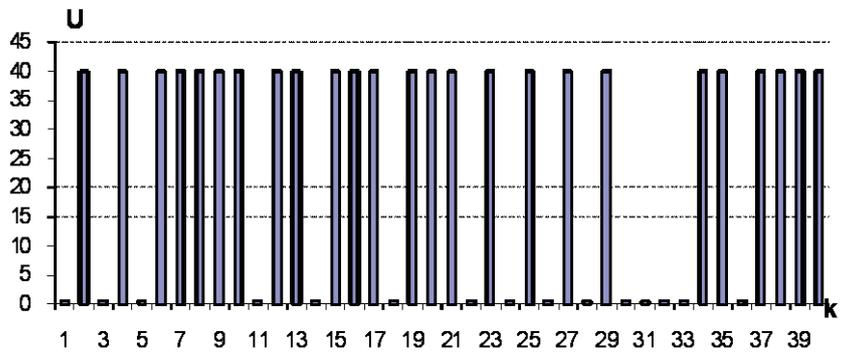
$$E[\mathbf{x}(t_0)] = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}}(t_0),$$

$$E\left\{ \begin{bmatrix} x_1(t_0) - \bar{x}_1(t_0) \\ x_2(t_0) - \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) - \bar{x}_1(t_0) \\ x_2(t_0) - \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.001 \\ 0.001 & 0.0015 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(t_0).$$

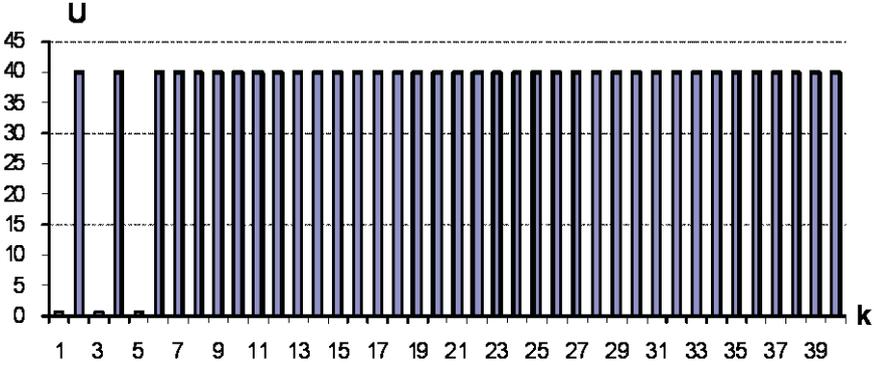
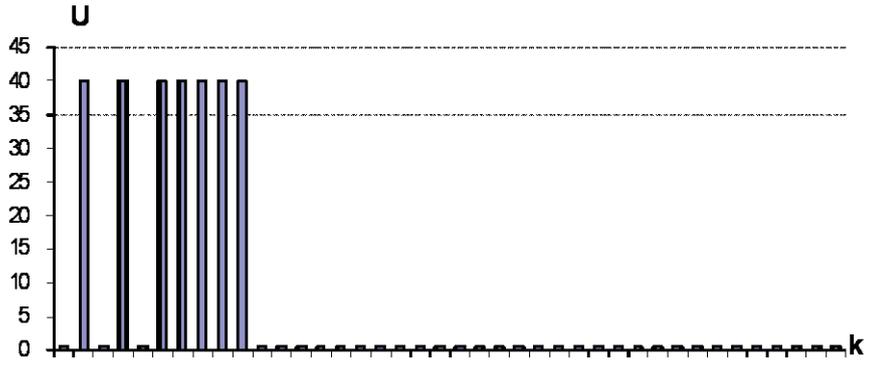
Произведем пять независимых запусков системы с исходным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделиро-

ванием<sup>1</sup> при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 0.2$ ,  $\theta_2^* = 0.8$  и  $N = 40$ . Отметим, что для модели (6.12), (6.13) с приведенными значениями  $Q, R, \bar{x}(t_0), P(t_0)$  установившийся режим достигался за  $k^* = 9$  шагов. Применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценки неизвестных параметров  $\hat{\theta}$ . Выберем область планирования  $\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^N \mid 10^{-3} \leq u(t_k) \leq 40, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ . Воспользовавшись критерием D-оптимальности, синтезируем непрерывный план эксперимента и «округлим» его до дискретного из расчета возможности проведения пяти запусков. В результате получим план, состоящий из двух точек. Подав первый сигнал на вход три раза, а второй сигнал – два раза, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров и получим  $\hat{\theta}^*$ . Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представим в таблице 6.4 [42].

Таблица 6.4 - Результаты выполнения процедуры активной идентификации модели (6.12), (6.13)

Входные сигналы	Значения оценок параметров
1	2
<p style="text-align: center;">Исходный <math>k_1 = 5</math></p> 	<p style="text-align: center;"><math>\hat{\theta}_1 = 0.194</math></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><math>\hat{\theta}_2 = 0.539</math></p> <hr/> <p style="text-align: center;"><math>\delta_\theta = \frac{\ \theta^* - \hat{\theta}\ }{\ \theta^*\ } = 0.317</math></p>

<sup>1</sup> Алгоритм компьютерного моделирования выборки измерений по уравнениям стохастической линейной стационарной системы в пространстве состояний предложен в [212].

1	2
<p style="text-align: center;">Синтезированные</p> <p style="text-align: center;"><math>k_1 = 3</math></p> 	$\hat{\theta}_1^* = 0.199$
<p style="text-align: center;"><math>k_2 = 2</math></p> 	$\hat{\theta}_2^* = 0.838$
	$\delta_{\theta}^* = \frac{\ \theta^* - \hat{\theta}^*\ }{\ \theta^*\ } = 0.046$

Для оценки качества идентификации в пространстве откликов выполним еще пять запусков системы, подав на ее вход псевдослучайный двоичный сигнал  $U$ , изображенный на рисунке 6.11. Для каждого запуска при  $\theta = \theta^*$  смоделируем выборку измерений  $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ , используя которую сформируем с помощью выражения (6.3) последовательности  $\hat{Y} = \{\hat{y}(t_1 | t_1), \hat{y}(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}^* = \{\hat{y}^*(t_1 | t_1), \hat{y}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}^*(t_N | t_N)\}$ ,

полагая  $\theta = \hat{\theta}$  и  $\theta = \hat{\theta}^*$  соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем  $Y_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ , представленные на рисунках 6.12 и 6.13.

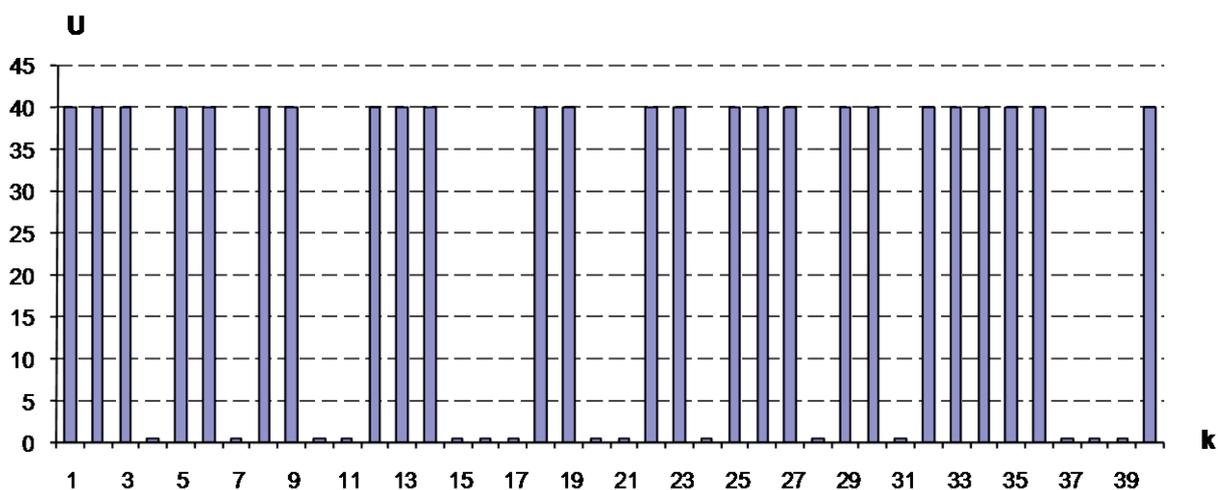


Рисунок 6.11 - Тестовый сигнал  $U$  для анализа качества прогнозирования на основе результатов из таблицы 6.4

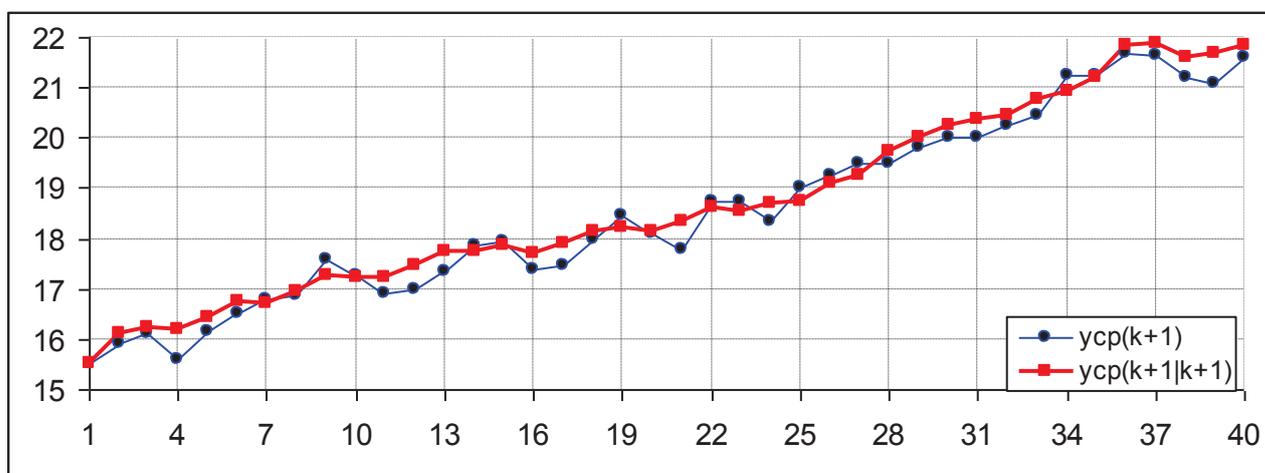


Рисунок 6.12<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{\text{ср}}$  и  $\hat{Y}_{\text{ср}}$

<sup>1</sup>  $Y_{\text{ср}}(k+1)$  соответствует  $Y_{\text{ср}}(t_{k+1})$ , а  $Y_{\text{ср}}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{Y}_{\text{ср}}(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

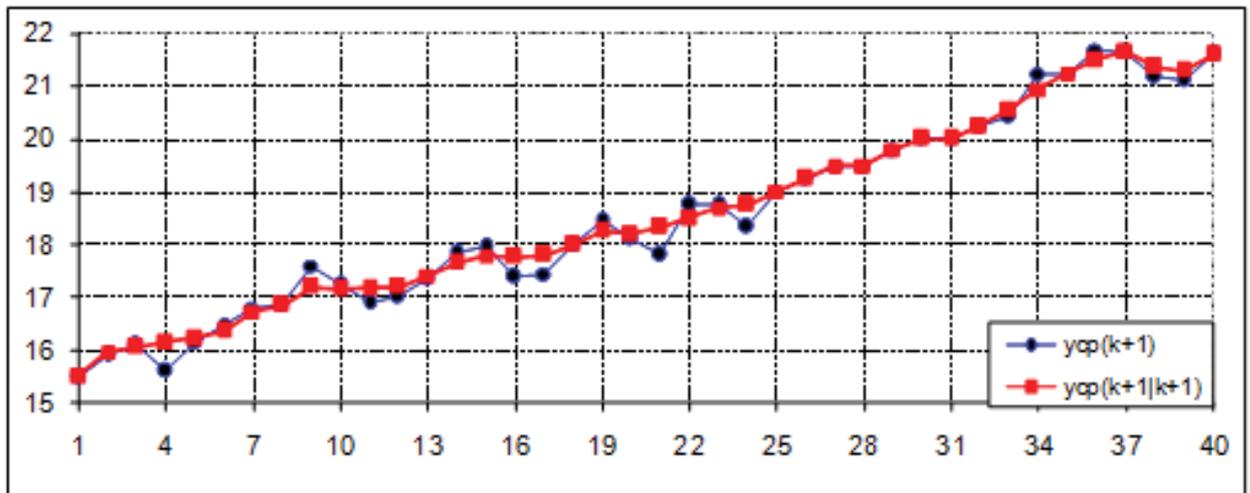


Рисунок 6.13<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}^*$

Воспользовавшись соотношением (6.2), найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов  $\delta_Y$  и  $\delta_Y^*$ . Получим, что  $\delta_Y = 0.016$  и  $\delta_Y^* = 0.011$ .

Таким образом, в рассмотренной задаче удалось понизить относительную ошибку оценивания с 31.7% до 4.6% в пространстве параметров и с 1.6% до 1.1% в пространстве откликов.

## 6.2 Активная параметрическая идентификация нелинейной непрерывно-дискретной системы с применением линеаризации во временной области

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной системы:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1}x(t) + \frac{0.01}{\theta_1}[u(t) - x(t)]e^{0.25[u(t) - x(t)]} + \frac{0.1}{\theta_1}w(t), t \in [t_0, t_N]; \quad (6.14)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.15)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – неизвестные параметры, причем  $2 \leq \theta_1 \leq 10$ ,  $0.05 \leq \theta_2 \leq 2$ .

<sup>1</sup>  $y_{cp}(k+1)$  соответствует  $y_{cp}(t_{k+1})$ , а  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из п. 1.3.2, причем

$$\begin{aligned} E[w(t)w(\tau)] &= 0.8\delta(t-\tau) = Q\delta(t-\tau); \\ E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] &= 0.4\delta_{ki} = R\delta_{ki}; \\ E[x(t_0)] &= 0 = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^2\right\} = 0.01 = P(t_0). \end{aligned}$$

Выполнив линейризацию модели состояний (6.14) во временной области относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_H(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1}x_H(t) + \frac{0.01}{\theta_1}[u_H(t) - x_H(t)]e^{0.25[u_H(t) - x_H(t)]}, & t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

получим линейризованную модель вида (1.45), (1.46), в которой

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{0.01}{\theta_1} \left\{ [1 + 0.25(u_H(t) - x_H(t))]u(t) - 0.25[u_H(t) - x_H(t)]^2 \right\} e^{0.25[u_H(t) - x_H(t)]}; \\ F(t) &= -\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.01}{\theta_1} \{1 + 0.25[u_H(t) - x_H(t)]\} e^{0.25[u_H(t) - x_H(t)]}; \\ \Gamma(t) &= \frac{0.1}{\theta_1}; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо оценить параметры  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , функционально входящие в выражения для  $a(t)$ ,  $F(t)$  и  $\Gamma(t)$ .

Считая, что для номинальной траектории (6.16)  $u_H(t) = u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_N]$ , обеспечим наилучшее приближение построенной линейризованной модели к своему нелинейному аналогу.

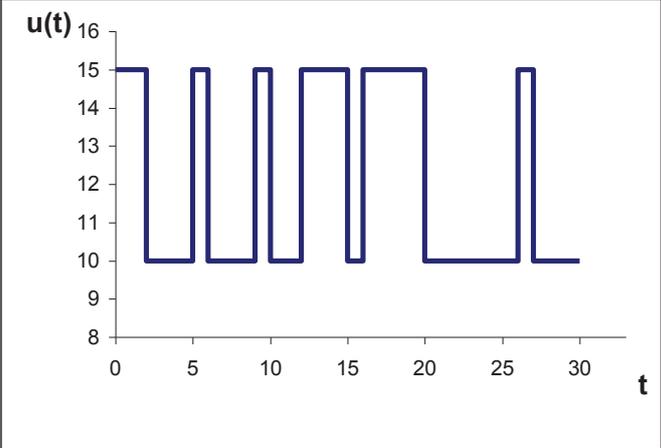
Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем шесть запусков системы с исходным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 4$ ,  $\theta_2^* = 0.5$  и  $t_0 = 0, t_N = 30, N = 31$ . Измерения будем проводить через одинаковые моменты

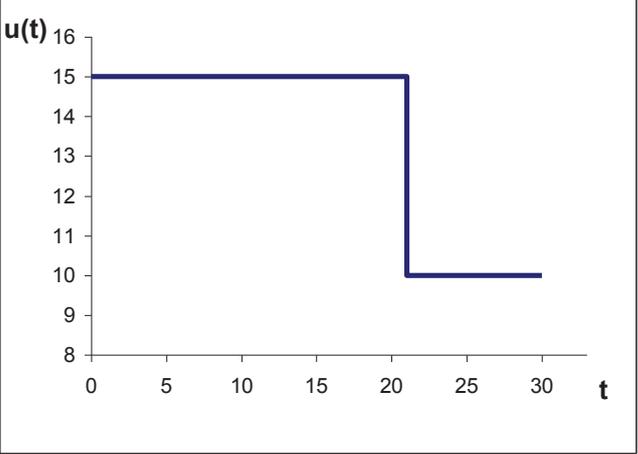
времени. Для каждого запуска, применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценки неизвестных параметров, усредним их и найдем  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$ . Следуя разделу 4, будем искать входной сигнал в классе кусочно-постоянных функций.

Выберем область планирования  $\Omega_U = \left\{ U \in \mathbb{R}^N \mid 10 \leq u(t_k) \leq 15, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ .

Синтезируем D-оптимальный план (в данном случае он оказался одноточечным), в соответствии с которым снова осуществим шесть независимых запусков системы, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров, усредним их и получим  $\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$ . Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представим в таблице 6.5 [43].

Таблица 6.5 - Результат выполнения процедуры активной идентификации модели (6.14), (6.15)

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценок параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
1	2	3	4
<p>Исходный</p> 	1	3.587	0.434
	2	6.099	0.565
	3	5.735	0.486
	4	3.158	0.504
	5	3.354	0.484
	6	4.002	0.413
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>4.322</b>	<b>0.481</b>

1	2	3	4
<p style="text-align: center;">Синтезированный</p> 	1	3.156	0.522
	2	4.724	0.587
	3	4.917	0.537
	4	3.320	0.460
	5	3.865	0.463
	6	4.375	0.500
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}^*$	<b>4.060</b>	<b>0.512</b>

Воспользовавшись соотношением (6.1), найдем значения относительных ошибок оценивания в пространстве параметров  $\delta_{\theta}$  и  $\delta_{\theta}^*$ . Получим, что  $\delta_{\theta} = 0.080$  и  $\delta_{\theta}^* = 0.015$ .

Выполним шесть запусков системы, подав на ее вход псевдослучайный двоичный сигнал  $U$ , изображенный на рисунке 6.14. Для каждого запуска при  $\theta = \theta^*$  смоделируем по уравнениям (6.14), (6.15) выборку измерений  $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ , используя которую для линеаризованной модели сформируем с помощью выражения (6.3) последовательности  $\hat{Y} = \{\hat{y}(t_1 | t_1), \hat{y}(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}(t_N | t_N)\}$ ,  $\hat{Y}^* = \{\hat{y}^*(t_1 | t_1), \hat{y}^*(t_2 | t_2), \dots, \hat{y}^*(t_N | t_N)\}$ , полагая  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}$  и  $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}^*$  соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем  $Y_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}$ ,  $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ , представленные на рисунках 6.15 и 6.16.

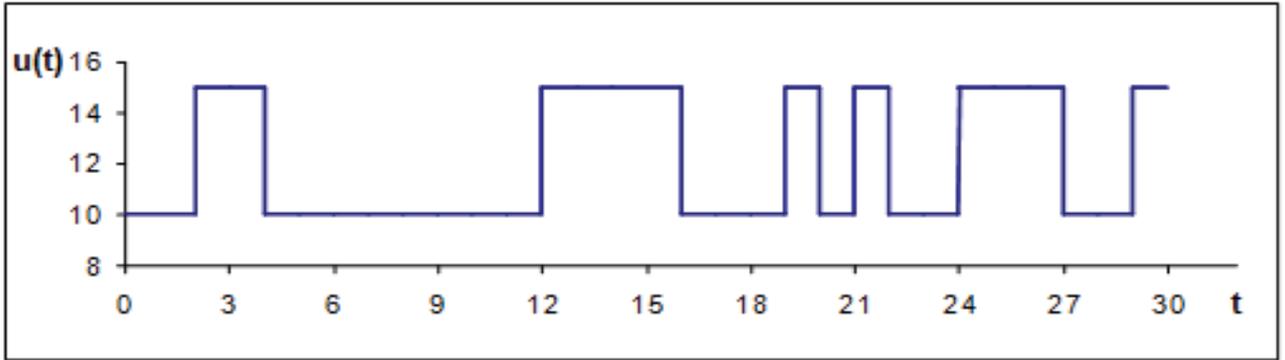


Рисунок 6.14 - Тестовый сигнал  $u(t)$  для анализа качества прогнозирования на основе результатов из таблицы 6.5

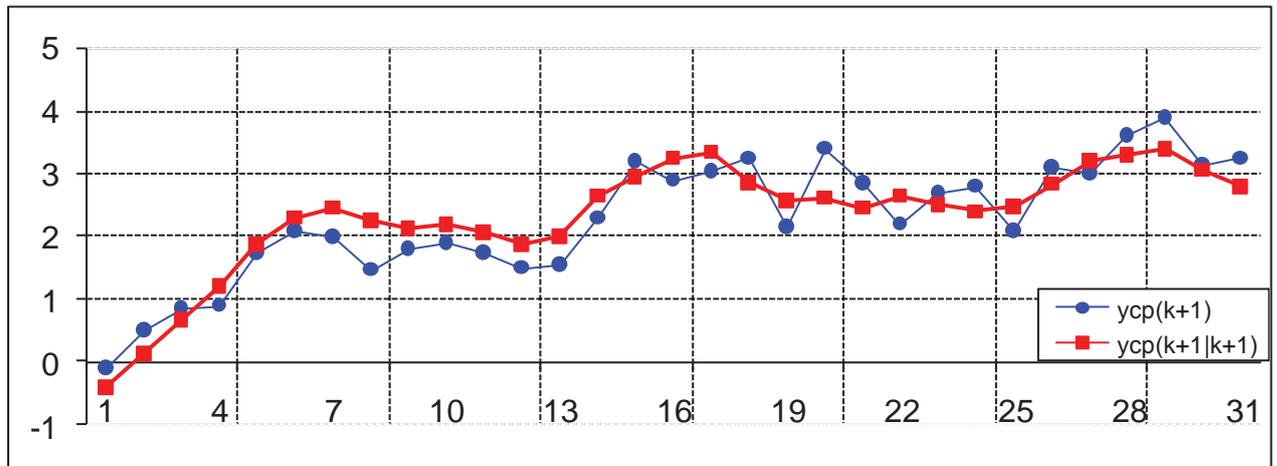


Рисунок 6.15<sup>1</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}$

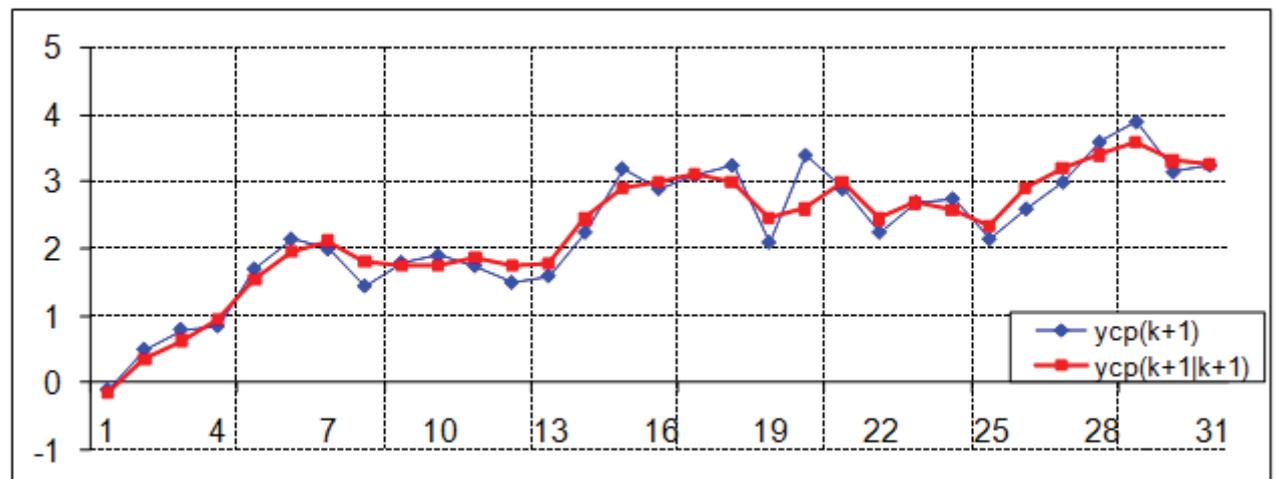


Рисунок 6.16<sup>2</sup> - Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}^*$

<sup>1</sup>  $u_{cp}(k+1)$  соответствует  $u_{cp}(t_{k+1})$ , а  $u_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

<sup>2</sup>  $u_{cp}(k+1)$  соответствует  $u_{cp}(t_{k+1})$ , а  $u_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

Воспользовавшись соотношением (6.2), найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов  $\delta_Y$  и  $\delta_Y^*$ . Получим, что  $\delta_Y = 0.155$  и  $\delta_Y^* = 0.137$ .

Таким образом, в рассмотренной задаче удалось понизить относительную ошибку оценивания с 8.0% до 1.5% в пространстве параметров и с 15.5% до 13.7% в пространстве откликов.

Похожий пример, но с экспоненциальной нелинейностью приведен в [40].

### 6.3. Выводы

1. Во всех рассмотренных примерах применение процедуры активной параметрической идентификации стохастических динамических систем способствовало (как правило, существенно) уменьшению относительных ошибок оценивания, как в пространстве параметров, так и в пространстве откликов, и обеспечивало построение более качественных моделей по сравнению с процедурой пассивной параметрической идентификации. Так, например, для модели, представленной в п. 6.1.1, относительная ошибка снизилась с 23.6% до 5.3% в пространстве параметров и с 7.8% до 6% в пространстве откликов.

2. Применение разработанного в диссертации математического и программного обеспечения целесообразно и эффективно при параметрической идентификации стохастических динамических систем, описываемых (в том числе) нелинейными уравнениями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с целью исследования разработано математическое и программное обеспечение активной параметрической идентификации динамических систем, ориентированное преимущественно на гауссовские линейные нестационарные и линеаризованные дискретные и непрерывно-дискретные модели с параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

Решение поставленных задач исследования позволило получить следующие новые научные результаты:

1. Впервые выведены выражения ИМФ для гауссовских линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей.

2. Разработаны алгоритмы вычисления ИМФ для гауссовских линейных нестационарных и линеаризованных дискретных и непрерывно-дискретных моделей.

3. На основе полученных рекуррентных соотношений разработаны алгоритмы вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для линейных нестационарных дискретных и непрерывно-дискретных моделей, дискретных моделей, полученных в результате временной или статистической линеаризации и непрерывно-дискретных моделей, полученных в результате временной линеаризации.

4. Разработаны прямые и двойственные градиентные процедуры синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов для перечисленных в предыдущем пункте моделей.

5. На основе полученных рекуррентных соотношений разработан алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам вектора начальных условий для линейных нестационарных дискретных моделей.

6. Разработаны и программно реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры синтеза А- и D- оптимальных начальных условий для линейных нестационарных дискретных моделей.

7. Показано, что в случае использования следа ИМФ в качестве критерия оптимальности задача планирования входных сигналов для гауссовских дискретных моделей, полученных в результате временной линейаризации, может быть сведена к задаче дискретного оптимального управления. Разработана и программно реализована соответствующая процедура синтеза оптимальных входных сигналов.

8. Разработаны и программно реализованы прямая и двойственная процедуры синтеза А- и D- оптимальных входных сигналов для установившегося режима гауссовских линейных стационарных дискретных моделей с неизвестными параметрами в уравнениях состояния и измерения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений.

9. Разработаны не имеющие аналогов программные комплексы ПК-I и ПК-II, предназначенные для активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем соответственно.

Приведенные результаты обобщают и развивают результаты, полученные автором применительно к гауссовским линейным стационарным дискретным и непрерывно-дискретным моделям.

Численные исследования показывают, что применение разработанного математического и программного обеспечения способствует существенному уменьшению относительных ошибок оценивания, как в пространстве параметров, так и в пространстве откликов, и обеспечивает построение более качественных моделей по сравнению с процедурой пассивной параметрической идентификации. Для рассмотренных примеров (в п.6.1.3 во внимание принимался результат, полученный методом последовательного квадратичного программирования) в среднем относительная ошибка оценивания снизилась с 23.7% до 2.9% в пространстве параметров и с 9.3% до 5.8% в пространстве откликов.

В диссертации разработан комплексный подход к решению задач активной параметрической идентификации стохастических динамических систем на основе планирования эксперимента, обеспечивающий построение качественных математических моделей в пространстве.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. Пащенко Ф.Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем: учеб. пособие в 2-х ч. Ч.1. Математические основы моделирования систем / Ф.Ф. Пащенко. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 328 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х т. Т.1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
4. Сейдж Э.П. Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Дж. Л. Мелса. – М.: Наука, 1974. – 248 с.
5. Райбман Н. С. Построение моделей процессов производства / Н.С. Райбман, В.С. Чадеев. – М.: Энергия, 1975. – 376 с.
6. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
7. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
8. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
9. Кашьяп Р.Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р.Л. Кашьяп, А.Р. Рао. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
10. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления / Ш.Е. Штейнберг. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 80 с.
11. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
12. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации / Я. З. Цыпкин. – М.: Наука, 1995. – 336 с.
13. Walter E. Identification of parametric models from experimental data / E. Walter, L. Pronzato. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 413 P.

14. Verhaegen M. Filtering and system identification. A least squares approach / M. Verhaegen, V. Verdult. – New York: Cambridge university press, 2007. – 422 P.
15. Рубан А.И. Методы анализа данных / А.И. Рубан. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 319 с.
16. Alexandrov A.G. Finite – frequency method of identification / A.G. Alexandrov // Preprints of 10<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification. – Copenhagen, Denmark, 1994. – V.2. – P.523-527.
17. Александров А.Г. Конечно – частотная идентификация: определение границ испытательных частот / А.Г. Александров // Автоматика и телемеханика. – 2001. - №11. – с. 3-14.
18. Александров А.Г. Конечно – частотная идентификация: динамический алгоритм / А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов // Проблемы управления. – 2009. – №4. – с. 2-8.
19. Налимов В.В. Теория эксперимента / В.В. Налимов. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
20. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
21. Денисов В.И. Математическое обеспечение системы ЭВМ - экспериментатор (регрессионный и дисперсионный анализы) / В.И. Денисов. – М.: Наука, 1977. – 251 с.
22. Круг Г.К. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г.К. Круг, Ю.А. Сосулин, В.А. Фатуев. – М.: Наука, 1977.–208 с.
23. Хартман К. Планирование эксперимента в исследованиях технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шеффер. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
24. Горский В.Г. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики) / В.Г. Горский, Ю.П. Адлер, А.М. Талалай. – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.
25. Ермаков С.М. Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

26. Handbook of statistics 13: Design and analysis of experiments / C.R. Rao, S. Ghosh, eds. – Amsterdam: Elsevier North Holland, 1996. – 1216 P.
27. Pukelsheim F. Optimal design of experiments / F. Pukelsheim. – Philadelphia: SIAM, 2006. – 487 P.
28. Toutenburg H. Statistical analysis of designed experiments / H. Toutenburg, Shalabh. – New York: Springer, 2009. – 624 P.
29. Авдеенко Т.В. Построение динамических моделей в пространстве состояний: анализ структурной идентифицируемости: монография / Т.В. Авдеенко, В.Г. Горский. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 292 с.
30. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
31. Заде Л. Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер. – М.: Наука, 1970. – 704 с.
32. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
33. Денисов В.И. Пакет программ оптимального планирования эксперимента / В.И. Денисов, А.А. Попов. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 159 с.
34. Чубич В.М. Введение в оценивание и планирование экспериментов для стохастических динамических систем: учеб. пособие / А.Ж. Абденов, В.И. Денисов, В.М. Чубич. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1993. – 45 с.
35. Burnham K.P. Model selection and multimodel inference / K.P. Burnham, D.R. Anderson. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 496 P.
36. Greene W.H. Econometric analysis / W.H. Greene. – New Jersey: Prentice Hall, 2003. – 1024 P.
37. Чубич В.М. Концепция активной параметрической идентификации и ее применение к построению моделей стохастических динамических систем / В.М. Чубич // САИТ 2010. Системный анализ и информационные технологии: материалы 12 Международной науч.-практ. конф., Киев, Украина. – Киев, 2010. – С. 176.

38. Чубич В.М. Синтез оптимального входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Перспективы развития информационных технологий: материалы 2 Всероссийской науч.-практ. конф. - Новосибирск, 2010. – С. 139-144.
39. Chubich V.M. Application of methods of experiment design theory in problem of stochastic nonlinear discrete systems identification / V.M. Chubich // ACIT-CDA 2010. The IASTED intern. conf. on automation, control, and information technology - control, diagnostics, and automation, Novosibirsk, Russia: proceedings. – Novosibirsk, 2010. - P. 272-279.
40. Чубич В.М. Применение методов теории планирования экспериментов при параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // АПЭП 2010. Актуальные проблемы электронного приборостроения: материалы X Международной конф. - Новосибирск, 2010. – Т.6.– С. 85-93.
41. Чубич В.М. Оптимальная идентификация дискретных систем на основе метода статистической линеаризации / В.М. Чубич // Информационные технологии и вычислительные системы. - 2010. - №4. – С. 47-56.
42. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация гауссовских стационарных линейных дискретных систем на основе планирования эксперимента в установившемся режиме / В.М. Чубич, М.И. Вершинина // Научный вестник НГТУ. - 2010. - №4(41). – С. 29-40.
43. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем на основе линеаризации во временной области / В.М. Чубич // Информационно-управляющие системы. - 2010. - №6(49). – С. 54-61.
44. Чубич В.М. Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем / В.М. Чубич // Информатика и ее применения. - 2011. – Т.5. – Вып.1. – С. 46-57.

45. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация нелинейных дискретных систем на основе линеаризации во временной области и оптимального управления / В.М. Чубич, О.С. Черникова // Проблемы управления. - 2011. - №2. – С. 9-15.
46. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 435 с.
47. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения / С.Р. Рао. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
48. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
49. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
50. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
51. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров / Й. Бард. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
52. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
53. Разоренов Г.Н. Введение в теорию оценивания состояния динамических систем по результатам измерений / Г.Н. Разоренов. – М.: Изд-во министерства обороны СССР, 1981. – 272 с.
54. Мудров В.И. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.
55. Бикел П. Математическая статистика. – Вып. 1 / П. Бикел, К. Доксам. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 278 с.
56. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.

- 57.Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
- 58.Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х кн. Кн. 1 / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.
- 59.Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х кн. Кн. 2 / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 351 с.
- 60.Справочник по прикладной статистике: в 2-х т. Т.1 / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 510 с.
- 61.Брандт З. Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров / З. Брандт. – М.: Мир, ООО «Изд-во АСТ», 2003. – 686 с.
- 62.Волков И.К. Случайные процессы / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 448 с.
- 63.Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
- 64.Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс.–М.: Мир, 1975. – 776 с.
- 65.Кокс Д. Теоретическая статистика / Д. Кокс, Д. Хинкли. – М.: Мир, 1978. – 560 с.
- 66.Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана / А. Балакришнан. – М.: Мир, 1988. – 168 с.
- 67.Леман Э. Теория точечного оценивания / Э. Леман. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
- 68.Боровков А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Изд-во Ин-та математики, 1997. – 772 с.
- 69.Ивченко Г.И. Введение в математическую статистику / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 600 с.
- 70.Справочник по прикладной статистике: в 2-х т. Т.2 / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 526 с.

71. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
72. Базара М. Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
73. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
74. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 252 с.
75. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
76. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы Лагранжа / Д. Бертсекас. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.
77. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
78. Васильев Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
79. Bonnans J.F. Numerical optimization: theoretical and practical aspects / J.F. Bonnans, J.Ch. Gilbert, C. Lemarechal, C.A. Sagastizabal. – Berlin: Springer – Verlag, 2003. – 419 P.
80. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
81. Antoniou A. Practical optimization: algorithms and engineering applications / A. Antoniou, W.-S. Lu. – New York: Springer, 2007. – 669 P.
82. Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 320 с.
83. Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч. 2. Нелинейное и динамическое программирование / Б.А. Гладких. — Томск: Изд-во НТЛ, 2011. — 264 с.
84. Трифонов А.Г. Optimization Toolbox 2.2. Руководство пользователя [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book\\_1/15.php](http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/15.php).

85. Дьяконов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.
86. Жиглявский А.А. Методы поиска глобального экстремума / А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
87. Сергеев Я.Д. Диагональные методы глобальной оптимизации / Я.Д. Сергеев, Д.Е. Квасов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
88. Mehra R.K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems: survey and new results / R. K. Mehra //IEEE Trans. On Automat. Control. – 1974. – v.19. - №6. – P.753 – 768.
89. Mehra R.K. Synthesis of optimal inputs for multiinput – multioutput (MIMO) systems with process noise. Part II: time domain synthesis / R. K. Mehra //System identification – advances and case studies. – New York: Academic press, 1976. – P. 230-249.
90. Чубич В.М. Основные свойства информационных матриц в задачах планирования оптимальных входных сигналов для стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич // Информатика и проблемы телекоммуникаций: материалы Международной науч.-техн. конф.- Новосибирск, 1995. – Т.1. – С. 65-68.
91. Чубич В.М. Планирование D-оптимальных управляющих сигналов для стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. - 1995. - №1. – С. 17-31.
92. Абденов А.Ж. Активная идентификация линейных динамических систем для решения задач калмановской фильтрации. I. Теоретические и алгоритмические аспекты / А.Ж. Абденов // Научный вестник НГТУ. - 1998. - №1(4). – С. 3-18.
93. Абденов А.Ж. Активная идентификация для стохастических динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний: дис...д-ра техн. наук: 05.13.01 / А.Ж. Абденов. - Новосибирск, 1999. – 370 с.
94. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография /В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова,

- Д.И. Бобылева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с.
95. Mehra R.K. Optimal inputs for linear system identification / R. K. Mehra // IEEE Trans. On Automat. Control. – 1974. – v.19. - №3. – P.192 – 200.
96. Абденов А.Ж. Планирование входных сигналов с помощью методов оптимального управления / А. Ж. Абденов // Сборник научных трудов НГТУ – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. - №4(13). – С. 31–46.
97. Чубич В.М. А-оптимальное планирование на примере одной стохастической линейной дискретной системы / В.И. Денисов, В.М. Чубич // Информатика и проблемы телекоммуникаций: материалы Международной науч.-техн. конф. - Новосибирск, 1997. – С.112-117.
98. Чубич В.М. Построение оптимальных планов экспериментов в задачах идентификации стохастических линейных непрерывно-дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, Д.И. Бобылева // Научный вестник НГТУ. - 2006. - № 4(25) – С. 25-43.
99. Чубич В.М. Планирование D-оптимальных входных сигналов для стохастических линейных дискретных систем / И.Л. Полетаева, В.М. Чубич // Информатика и проблемы телекоммуникаций: тез. докл. Российской науч.-техн. конф. - Новосибирск, 1994. – С. 135-136.
100. Чубич В.М. Программно - математическое обеспечение задачи планирования D- оптимальных управляющих сигналов для стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, И.Л. Полетаева, В.М. Чубич // Актуальные проблемы электронного приборостроения. - АПЭП-94: труды 2 Международной науч. – техн. конф. - Новосибирск, 1994. – Т.2. Моделирование и вычислительная техника. – С. 56-64.
101. Чубич В.М. Алгоритмы синтеза планов экспериментов для стохастических динамических систем: учебное пособие / В.И. Денисов, В.М. Чубич. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996. – 36 с.
102. Чубич В.М. Сравнение алгоритмов планирования D- оптимальных входных сигналов для стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, И.Л. Еланцева, В.М. Чубич // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новоси-

бирск : Изд-во НГТУ, 1997. - № 3(8) – С. 31-40.

103. Чубич В.М. Активная идентификация стохастических линейных дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний и ARMAX-моделями / В.И. Денисов, И.Л. Еланцева, В.М. Чубич // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2000. – Т.3. - №1(5) – С. 87-100.
104. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация стохастических дискретных систем во временной области / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2003. - Т.6. - №3(15). - С. 70-87.
105. Чубич В.М. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем в частотной области / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2007. - Т.10. - №1(29). - С. 71-89 (V.M. Chubich. Active parametric identification of stochastic linear discrete systems in the frequency domain / V.I. Denisov, V.M. Chubich, O.S. Chernikova // Journal of applied and industrial mathematics. – 2009. – V.3. - №2. – P. 183-200 - на англ. яз.).
106. Чубич В.М. Применение метода статистической линеаризации при активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич, Е.С. Коновальчик // АПЭП 2010. Актуальные проблемы электронного приборостроения: материалы X Международной конф. – Новосибирск, 2010. – Т.6. – С. 94-102.
107. Goodwin G.C. Dynamic system identification: experiment design and data analysis / G.C. Goodwin, R.L. Payne. – New York: Academic Press, 1977. – 302 P.
108. Zarrop M.B. Optimal experiment design for dynamic system identification / M.B. Zarrop. – New York: Springer-Verlag, 1979.
109. Pronzato L. Optimal experimental design and some related control problems / L. Pronzato // Automatica. – 2008. – V. 44. – P.303 – 325.
110. Денисов В.И. Активная идентификация авторегрессионных моделей со скользящим средним: учебное пособие / В.И. Денисов, И.Л. Еланцева, И.А. Полетаева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 49 с.

111. Денисов В.И. Активная идентификация авторегрессионных моделей со скользящим средним / В.И. Денисов, И.Л. Еланцева, И.А. Полетаева // Научный вестник НГТУ. - 2006. - №3(24). – С. 27-34.
112. Абденюв А.Ж. Теоретические и алгоритмические аспекты D-оптимального планирования входного сигнала линейных дискретных динамических систем на основе оптимизации его спектральной плотности мощности / А.Ж. Абденюв // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. -1997. -№3(8). –С. 3-18.
113. Абденюв А.Ж. Активная идентификация линейных динамических систем для решения задач калмановской фильтрации. II. Практические аспекты / А.Ж. Абденюв // Научный вестник НГТУ. - 1998. - № 1(4) – С. 19-29.
114. Абденюв А.Ж. Практические аспекты D-оптимального планирования входного сигнала линейных динамических систем на основе оптимизации его спектральной плотности мощности / А.Ж. Абденюв, В.Ю. Пейсахович // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. -1997. -№3(8). –С. 19-30.
115. Попов А.А. Свойства задачи синтеза оптимального плана входного сигнала для линейных динамических систем / А.А. Попов // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. -1998. -№4(13). –С. 19-29.
116. Chubich V.M. Active identification of stochastic linear discrete - time systems / V.I. Denisov, V.M. Chubich, O.S. Chernikova// KORUS 2003. The 7 Korea - Russia intern. symp. on science and technology, Ulsan, Korea: proceedings. – Ulsan, 2003. - Vol.3. - P. 71-75.
117. Chubich V.M. Conclusion of the formula for the Fisher information matrix for stochastic linear discrete-time systems in frequency domain / V.I. Denisov, V.M. Chubich, O.S. Chernikova // KORUS 2004. The 8 Russia-Korea intern. symp. on science and technology, Tomsk, Russia: proceedings. – Tomsk, 2004. - Vol.2. - P. 117-120.
118. Chubich V.M. D-optimum parameters estimation of models of stochastic linear discrete-time systems in frequency domain / V.I. Denisov, V.M. Chubich, O.S. Chernikova // KORUS 2005. The 9 Russia-Korea intern. symp. on science

- and technology, Novosibirsk, Russia: proceedings. – Novosibirsk, 2005. - Vol.1. - P. 57-61.
119. Овчаренко В.Н. Активная идентификация стохастических дискретных динамических систем / В.Н. Овчаренко // Автоматика и телемеханика. - 1983. - № 4 – С. 84-93.
120. Овчаренко В.Н. Выбор входных сигналов при идентификации линейных непрерывных динамических систем по дискретным наблюдениям / В.Н. Овчаренко // Автоматика и телемеханика. - 1989. - № 2 – С. 87-95.
121. Идентификация модели и параметров летательного аппарата по результатам летных экспериментов / В.П. Беляев, В.А. Леонов, В.Н. Овчаренко, А.И. Перегудов, Б.К. Поплавский, Г.Н. Сироткин, А.В. Чернышев, В.Ф. Шевченко // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. - 1996. – №4. – С. 138–145.
122. Овчаренко В.Н. Оптимизация входных сигналов в задаче идентификации линейных динамических систем / В.Н. Овчаренко // Автоматика и телемеханика. - 1997. - № 5 – С. 72-81.
123. Овчаренко В.Н. Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах / В.Н. Овчаренко // Автоматика и телемеханика. - 2001. - № 2 – С. 75-87.
124. Овчаренко В.Н. Планирование гармонических входных сигналов в задаче идентификации динамических систем / В.Н. Овчаренко // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. - 2001. - № 5 – С. 39-46.
125. Morelli E.A. Flight test of optimal inputs and comparison with Conventional Inputs/ E. A. Morelli // Journal of aircraft. – 1999. – V. 36. - №2. – P.389 – 397.
126. Jauberthie C. Optimal input design for aircraft parameter / C. Jauberthie, F. Bournonville, P. Coton, F. Rendell // Aerospace science and technology. – 2006. – №10. – P.331 – 337.
127. Jauberthie C. An optimal input design procedure / C. Jauberthie, L. Denis-Vidal, P. Coton, G. Joly-Blanchard // Automatica. – 2006. – V. 42. – P.881 – 884.

128. Абденев А.Ж. Планирование автокорреляционной функции входного сигнала для стохастических непрерывно-дискретных динамических систем / А.Ж. Абденев // Автометрия. - 2005. – Т. 41. - № 2 – С. 85-97.
129. Чубич В.М. Оптимальная идентификация параметров стохастических систем / А.Ж. Абденев, В.И. Денисов, В.М. Чубич // Электронная техника. – 1992. – Серия 7. Технология, организация производства и оборудование. – Выпуск 3(172) – С. 44-48.
130. Чубич В.М. Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем. I. Теоретические аспекты / В.И. Денисов, В.М. Чубич, Д.И. Бобылева // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. - № 3(41) – С.3-10.
131. Чубич В.М. Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем. II. Практические аспекты / В.И. Денисов, В.М. Чубич, Д.И. Бобылева // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. - № 4(42) – С.3-10.
132. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчеев. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
133. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
134. Математические основы теории автоматического управления: учеб. пособие в 3-х т. Т. 1. / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 552 с.
135. Гудвин Г.К. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Греббе, М.Э. Сальгадо. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 911 с.
136. Казаков И.Е. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем / И.Е. Казаков, Б.Г. Доступов. – М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.
137. Казаков И.Е. Статистический анализ систем с многомерными нелинейностями / И.Е. Казаков // Автоматика и телемеханика, 1965. – № 3. – С. 463-469.

138. Казаков И.Е. Статистические методы проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1969. – 261 с.
139. Пугачев В.С. Основы статистической теории автоматических систем / В.С. Пугачев, И.Е. Казаков, Л.Г. Евланов. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.
140. Сеницын И.Н. Методы статистической линеаризации (обзор) / И.Н. Сеницын // Автоматика и телемеханика, 1974. – № 5. – С. 82-94.
141. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева / И.Н. Сеницын. – М.: Логос, 2007. – 776 с.
142. Математические основы теории автоматического управления: учеб. пособие в 3-х т. Т. 3. / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 352 с.
143. Чубич В.М. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. - 2009. - №1(34). – С. 23-40.
144. Чубич В.М. Сравнение двух подходов к нелинейной фильтрации на примере стохастической модели электрогидравлического следящего вибратора / В.И. Денисов, В.М. Чубич, К.С. Кирякин, А.В. Шилак // Научный вестник НГТУ. - 2008. - № 4(33) – С. 3-16.
145. Чубич В.М. Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации гауссовских нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич, Е.С. Коновальчик // Научный вестник НГТУ. - 2010. - №3(40). – С. 27-40.
146. Чубич В.М. Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. - 2009. - №1(34). – С. 41-54.

147. Ljung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems / L. Ljung // IEEE Trans. Automat. Control. – 1979. – V.24 – №1. – P.36-50.
148. Yoshimura T. A modified extended Kalman filter for linear discrete-time systems with unknown parameters / T. Yoshimura, K. Konishi, T. Soeda // Automatica. – 1981. – V.17. - №4. – P.657-660.
149. Isermann R. Identification of dynamic systems. An Introduction with applications / R. Isermann, M. Munchhof. – Berlin: Springer – Verlag, 2011. – 705 P.
150. Raol J.R. Modelling and parameter estimation of dynamic system / J.R. Raol, G. Girija, J. Singh. – London: The Institution of engineering and technology, 2004. – 405 P.
151. Jazwinski A.H. Stochastic processes and filtering theory / A.H. Jazwinski. – New York: Academic press, 1970. – 376 p.
152. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
153. Anderson B.D.O. Optimal filtering / B.D.O. Anderson, J.B. Moore. – New Jersey: Prentice Hall, 1979. – 357 P.
154. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с
155. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации / О.А. Степанов. – СПб: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», 1998. – 370 с.
156. Kailath T. Linear estimation / T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi. – New Jersey: Prentice Hall, 2000. – 854 p.
157. Богуславский И.А. Об идентификации параметров нелинейных динамических систем / И.А. Богуславский, В.И. Щербаков // Изв. Академии наук. Теория и системы управления, 2001. – №6. – С. 14-20.
158. Van Zee G.A. Gradient computation in prediction error identification of linear discrete-time systems / G.A. Van Zee, O.H. Bosgra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1982. – V.27 – №3. – P.738-739.

159. David B. An estimator of the inverse covariance matrix and its application to ML parameter estimation in dynamical systems / B. David, G. Bastin // *Automatica*. – 2001. – V.37– P.99-106.
160. Цыганова Ю.В. Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем / Ю.В. Цыганова, М. В. Куликова // *Автоматика и телемеханика*, 2012. - № 6 – С. 34-51.
161. Gupta N.K., Mehra R.K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations / N.K. Gupta, R.K. Mehra // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1974. – V. 19 – №6. – P.774-783.
162. Åström K.J. Maximum likelihood and prediction errors methods / K.J. Åström // *Automatica*. – 1980. – V.16– P.551-574.
163. Bierman G.J. Maximum likelihood estimation using square root information filters / G.J. Bierman, M.R. Belzer, J.S. Vandergraft, D.W. Porter // *IEEE Trans. Automat. Control*. - 1990. – V.35 – №12. – P.1293-1298.
164. Kulikova M.V. Likelihood gradient evaluation using square-root covariance filters // *IEEE Trans. Automat. Control*. - 2009. – V.54 – №3. – P.646-651.
165. Bierman G.J. Factorization methods for discrete sequential estimation / G.J. Bierman. – New York: Academic Press, 1977. – 241P.
166. Verhaegen M. Numerical aspects of different Kalman filter implementations / M. Verhaegen, P. Van Dooren // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1986. – V.31 – №10. – P.907-917.
167. Petridis V. A multi-model algorithm for parameter estimation of time-varying nonlinear systems / V. Petridis, Ath. Kehagias // *Automatica*. – 1998. – V.34. - №4. – P.469-475.
168. Ljung L. System identification toolbox user's guide / L. Ljung. – Natick: The Math Works, Inc. - 2002. – 366P.
169. Дьяконов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб.: Питер, 2002. – 448 с.

170. Van Overschee P. Subspace algorithms for the stochastic identification problem / P. Van Overschee, B. De Moor // *Automatica*. - 1993. - V.29 - №3. - P.649-660.
171. Van Overschee P. N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic - stochastic systems / P. Van Overschee, B. De Moor // *Automatica*. - 1994. - V.30 - №1. - P.75-93.
172. Van Overschee P. Subspace identification for linear systems: theory – implementation – applications / P. Van Overschee, B. De Moor. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1996. –268 P.
173. Katayama T. Subspace methods for system identification / T. Katayama. – London: Springer-Verlag, 2005. – 400 P.
174. Verhaegen M. Subspace model identification. Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms / M. Verhaegen, P. Dewilde // *Int. J. Control*. - 1992. - V.56 - №5. - P.1187- 1210.
175. Verhaegen M. Subspace model identification. Part 2. Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm / M. Verhaegen, P. Dewilde // *Int. J. Control*. - 1992. - V.56 - №5. - P.1211- 1241.
176. Larimore W. E. System identification, reduced-order filtering and modeling via canonical variate analysis / W.E. Larimore // *Proc. 1983 American Control Conference*. - San Francisco, 1983. - P. 445–451.
177. Larimore W. E. Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control / W.E. Larimore // *Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control*. - Honolulu, 1990. - P. 596–604.
178. Glover K. Parametrizations of linear dynamical systems: canonical forms and identifiability / K. Glover, J.C. Willems // *IEEE Trans. Automat. Control*. - 1974. - V.19 - №6. - P.640-645.
179. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
180. Кузовков Н.Т. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация / Н.Т. Кузовков, О.С. Салычев. – М.: Машиностроение, 1982. – 216 с.

181. Браммер К. Фильтр Калмана – Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффлинг. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
182. Абденов А.Ж. Планирование D – оптимальных входных воздействий при идентификации линейных систем /А.Ж. Абденов, А.А. Попов. – Новосибирск, 1981. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 19.02.82, №771 – 82.
183. Абденов А.Ж. Планирование эксперимента при неопределенностях параметров в моделях динамики и измерителя / А. Ж. Абденов, В.И. Денисов // Машинные методы планирования эксперимента и оптимизации многофакторных систем: межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск: Изд-во НЭТИ, 1987. – С. 29–37.
184. Попов А.А. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче планирования входного сигнала для динамических систем / А. А. Попов //Сборник научных трудов НГТУ – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. - №2(11). – С. 8–16.
185. Чубич В.М. Новое обобщенное выражение для информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Рябых // Научный вестник НГТУ. - 2001. - №2(1). – С. 29-42.
186. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. –М.: Наука, 1973. – 256 с.
187. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.
188. Шатровский Л.И. Об одном численном методе решении задач оптимального управления /Л.И. Шатровский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. - №2. – С. 488-491.
189. Воевода А.А. Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных стационарных дискретных систем в установившемся режиме / А. А. Воевода, Г.В. Трошина //Сборник научных трудов НГТУ – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. - №1(43). – С. 3–8.

190. Воевода А.А. Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных стационарных дискретных систем с неизвестными параметрами в моделях динамики и наблюдения / А. А. Воевода, Г.В. Трошина // Сборник научных трудов НГТУ – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. - №2(44). – С. 29–34.
191. Воевода А.А. Оценивание параметров моделей динамики и наблюдения для линейных стационарных дискретных систем с использованием информационной матрицы Фишера/ А.А. Воевода, Г.В. Трошина // Научный вестник НГТУ. - 2006. - №3(24). – С. 199-200.
192. Чубич В.М. Планирование начальных условий в задаче активной параметрической идентификации гауссовских линейных дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. - 2011. - №1(42). – С. 39-46.
193. Чубич В.М. Программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нестационарных линейных дискретных систем (ПК-III) / В.М. Чубич, О.С. Черникова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012612281. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). – 2012.
194. Абденов А.Ж. Планирование D-оптимальных входных сигналов для непрерывно-дискретных систем при некоррелированных и взаимно коррелированных шумах объекта и измерителя / А. Ж. Абденов, А.А. Попов // Алгоритмическое и программное обеспечение задач оптимального планирования и проектирования: межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск: Изд-во НЭТИ, 1983. – С. 7–13.
195. Денисов В.И. Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических линейных непрерывно-дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, Д.И. Бобылева // Научный вестник НГТУ. - 2004. - №2(17). – С. 45-57.
196. Чубич В.М. Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нели-

- нейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. - 2009. - №3(36). – С. 15-22.
197. Чубич В.М. Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Научный вестник НГТУ. - 2010. – №2(39). – С. 53-63.
198. Тюрин Ю.Н. Анализ данных на компьютере / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров. – М.: Форум, 2010. – 368 с.
199. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных / А.П. Кулаичев. – М.: Форум, Инфра-М, 2011. – 512 с.
200. Боровиков В.П. Прогнозирование в системе Statistica в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере / В.П. Боровиков, Г.И. Ивченко. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.
201. Халафян А.А. Statistica 6. Математическая статистика с элементами теории вероятностей / А.А. Халафян. – М.: Бином, 2010. – 496 с.
202. Бююль А. SPSS. Искусство обработки информации / А. Бююль, П. Цецфель. – М.: ДиаСофтЮП, 2005. – 608 с.
203. Наследов А. SPSS: Профессиональный статистический анализ данных / А. Наследов. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.
204. Мещеряков В.В. Задачи по статистике и регрессионному анализу с MATLAB / В.В. Мещеряков. – М.: Диалог - МИФИ, 2009. – 448 с.
205. Александров А.Г. Пакет программ АДАПЛАБ для идентификации и адаптивного управления / А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов // Автоматизация в промышленности. – 2003. - №8. – с.16-19.
206. Alexandrov A.G. ADAPLAB-3: finite – frequency identification and adaptation toolbox for MATLAB / A.G. Alexandrov, Yu. F. Orlov, L.S. Mikhailova // Preprints of 15<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification. – Saint-Malo, France, 2009. – P.498-503.

207. Чубич В.М. Программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем (ПК-I) / В.М. Чубич, О.С. Черникова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011612716. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). - 2011.
208. Чубич В.М. Программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно - дискретных систем (ПК-II) / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011612718. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). - 2011.
209. Кетков Ю. MATLAB 6.x: программирование численных методов / Ю. Кетков, А. Кетков, М. Шульц. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.
210. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 768 с.
211. Поршнева С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования / С.В. Поршнева. – М.: Бином-Пресс, 2010. – 320 с.
212. Чубич В.М. Моделирование выборки измерений по описанию стохастической линейной стационарной системы с дискретным временем в пространстве состояний / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Рябых // Научный вестник НГТУ. - 2002. - №2(13). – С. 63-70.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**Справки о внедрении результатов диссертационной работы**

УТВЕРЖДАЮ

Главный инженер ОАО  
«Новосибирский авиаремонтный завод»

Ю.Н. Липатников



«04» 06 2012 г.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НГТУ  
по научной работе, профессор

А.Г. Вострецов



«05» 06 2012 г.

### СПРАВКА

**о внедрении результатов диссертационной работы В.М. Чубича  
«Активная параметрическая идентификация стохастических  
динамических систем на основе планирования эксперимента»**

Разработанные Чубичем Владимиром Михайловичем в результате выполнения диссертационной работы программные комплексы ПК-I и ПК-II активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем переданы на кафедру электропривода и автоматизации промышленных установок (ЭАПУ) ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет» для проектирования в рамках хоздоговоров с ОАО «Новосибирский авиаремонтный завод» (номера договоров ЭАПУ 1-09 и ЭАПУ 2-11) многомерных систем управления трансмиссией вертолетов.

Научный руководитель хоздоговоров  
№ЭАПУ 1-09 и №ЭАПУ 2-11,  
к.т.н., доцент кафедры ЭАПУ

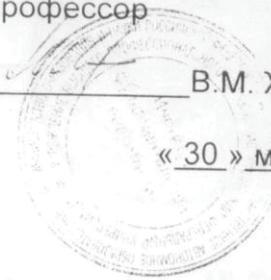
А.М. Бородин

## УТВЕРЖДАЮ

Директор Института  
фундаментальной подготовки СФУ,  
д.т.н., профессор

  
В.М. Журавлев

« 30 » мая 2013 г.



## СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационной работы В.М. Чубича  
«Активная параметрическая идентификация стохастических динамических  
систем на основе планирования эксперимента»

Разработанные Чубичем Владимиром Михайловичем в результате выполнения диссертационной работы программные комплексы ПК-I и ПК-II активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных и непрерывно-дискретных систем переданы на кафедру математического обеспечения дискретных устройств и систем (МОДУС) Института фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета. Результаты Чубича В.М. используются в научных исследованиях по теме «Разработка численных методов решения жестких стохастических задач» и в учебном процессе по курсу «Вычислительная математика».

Заведующий кафедрой МОДУС  
д.ф.-м.н., профессор



Е.А. Новиков

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НГТУ по учебной работе,  
д.т.н., профессор

А.А. Батаев

«20»

02

2012 г.



## СПРАВКА

### о внедрении результатов диссертационной работы В.М. Чубича «Активная параметрическая идентификация стохастических динамических систем на основе планирования эксперимента»

Результаты диссертационной работы Чубича Владимира Михайловича «Активная параметрическая идентификация стохастических динамических систем на основе планирования эксперимента» внедрены в учебный процесс на факультете прикладной математики и информатики (ФПМИ) ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет» и используются при изучении дисциплины «Математические методы планирования экспериментов» по направлению 010400.68 – «Прикладная математика и информатика» в рамках учебного плана магистерской подготовки. Освоение магистрантами соответствующих разделов дисциплины способствует приобретению необходимых знаний и умений для применения на практике современных эффективных методов построения моделей стохастических динамических систем.

Декан ФПМИ,  
д.т.н., профессор

Б.Ю. Лемешко

Заведующий кафедрой  
прикладной математики,  
д.т.н., профессор

Ю.Г. Соловейчик