

АБДЕНОВА Гаухар Амирзаевна

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ
РАЗНОСТНЫМИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
В ФОРМЕ КОШИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ АРГУМЕНТОМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (промышленность)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

НОВОСИБИРСК – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель: Воевода Александр Александрович
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: Куцый Николай Николаевич,
доктор технических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет», кафедра автоматизированных систем, профессор

Толстикова Александр Сергеевич,
доктор технических наук, доцент,
Федеральное государственное унитарное предприятие «Сибирский государственный ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский институт метрологии»,
отдел государственной службы времени, частоты и определения параметров вращения Земли,
начальник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Защита состоится «19» февраля 2013 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.05 при ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, д. 20, корпус 1, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета.

Автореферат разослан «__» января 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шпилева Ольга Яковлевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. На практике многие объекты в большинстве своем являются нестабильными, часто имеют малое количество наблюдений¹, характеризуются наличием ряда циклов или этапов развития, на каждом из которых достаточно сильно изменяются тенденции поведения. Математически поведение этих объектов можно описывать разными видами моделей.

На сегодняшний день методика построения моделей достаточно хорошо проработана для стационарных объектов, менее – для нестационарных объектов, зависящих от временного параметра, и не рассмотрена вовсе в случае объектов с явно выраженными изменяющимися тенденциями в поведении, входные и выходные данные которых зависят от невременного аргумента² и содержат в себе малое количество наблюдений. Проблемы возникают при построении модели на участке, содержащий изменения тенденций поведения. Наличие изменений тенденции поведения на всем интервале наблюдения приводит к построению ошибочной модели. Поэтому в процессе построения модели очень важно выделять участки данных наблюдений, на которых модель строится на основе данных наблюдений с неизменяющимися статистическими свойствами. Объединение локальных моделей и построение при малом объеме выборки единой адекватной модели на всем участке наблюдения, где переменные состояния зависят не обязательно от временного (вещественного) аргумента, является актуальной задачей.

Теоретико-методологической основой исследования по вопросам параметрической идентификации, по оцениванию состояния и управления в технических и других системах послужил обзор концепций, сформулированных в работах зарубежных теоретиков и практиков, авторами которых являются: П. Эйкхофф, К. Острем, Р. Мехра, Р. Бен Мрад, Е. Фараг, А. Кисикайя, Х. Кайран Ахмет, Л.С. Льюнг, Р.Л. Кашьяп, А.Р. Рао, М.С. Гревел и др. Эти задачи решались и в трудах отечественных ученых: А.С. Анисимова, Ю.Е. Воскобойникова, В.Г. Горского, Н.Д. Егупова, А.А. Ломова, В.Н. Овчаренко, М.А. Огаркова, В.Н. Подладчикова, И.Н. Сеницына, В.А. Фурсова и др.

Целью диссертационной работы является повышение эффективности оценивания состояния объектов с малым объемом наблюдения и с явно выраженными изменяющимися тенденциями в поведении путем идентификации объекта математическими моделями в форме Коши с вещественным аргументом.

Задачи исследования. Для достижения заданной цели поставлены следующие задачи исследования.

1. При малом объеме наблюдений разработать методику построения линейной кусочно-разностной и кусочно-дифференциальной стохастической модели

¹ Под малым количеством наблюдений в данной работе понимается, такое количество наблюдений, которое превышает число неизвестных параметров модели динамики в 3-5 раз.

² Пример: результаты выхода некоторого сорта стали в зависимости от угара кремния, измеряемого в процентах.

в форме Коши, где переменные входа, состояния и выхода, а также переменные параметры в модели зависят не обязательно от временного аргумента.

2. Рассмотреть объект с нестабильной динамикой развития, состояние которого зависит от невременного аргумента и ранее описываемый линейными и нелинейными регрессионными зависимостями с целью перехода к описанию с помощью разностной модели в форме Коши.

3. Рассмотреть случай, преобразования модели с распределенными параметрами в форме Коши к стохастической линейной модели в форме Коши сосредоточенного типа.

4. Для малого количества фиксированных данных наблюдений разработать алгоритм расчета шумовых характеристик одномерной модели в форме Коши без учета оценок параметров модели динамики.

5. Для повышения точности оценок параметров модели динамики в непрерывно-дискретной модели в форме Коши необходимо исследовать вопрос уменьшения числа обусловленности информационной матрицы Грама с помощью процедуры масштабирования входных и выходных данных.

Объектом исследования являются объекты, с изменяющимися тенденциями в поведении, при малом объеме наблюдений и функционирующие в условиях неопределенности.

Предметом исследования выступают аналитический и численный анализы некоторых типов моделей, их модификации с целью перехода к описанию поведения исследуемого объекта линейной стохастической моделью в форме Коши.

Методы исследования. Поставленные в работе задачи решены с использованием методов и положений математического анализа, дифференциального исчисления, теории фильтрации, теории математической статистики, методов вычислительной математики.

Научная новизна работы и результаты, выносимые на защиту.

1. Алгоритм построения стохастической линейной модели в форме Коши для линейных и нелинейных регрессионных уравнений в случае зашумленных входных и выходных переменных.

2. Алгоритм преобразования модели объекта, описываемого стохастическими моделями распределенного типа к адекватной стохастической модели в форме Коши сосредоточенного типа.

3. Алгоритм уменьшения числа обусловленности информационной матрицы Грама на основе масштабирования исходных входных и выходных данных наблюдений в линейных непрерывно-дискретных моделях в форме Коши.

4. Алгоритм рекуррентного оценивания дисперсий шумов в моделях динамики объекта и измерительной системы на основе дискретных наблюдений.

5. Методика построения единой линейной кусочно-разностной и кусочно-дифференциальной модели в форме Коши для решений задач тестового и практического характеров.

Теоретическая значимость. Разработанные в диссертации методика и алгоритмы позволяют при малых выборках построить в виде одной линейной стохастической кусочно-разностной и/или кусочно-дифференциальной модели в форме Коши, в которых переменные параметры, состояния объекта и выход измерительной системы зависят от невременного аргумента.

Практическая значимость научных результатов состоит в разработанной методике и алгоритмов, направленных на повышение эффективности оценивания состояния объекта с нестабильной динамикой развития, позволяющая решать задачи прогнозирования производственных показателей, планирования, управления в разных отраслях промышленности.

Внедрение результатов исследования. Методика построения кусочно-разностной модели в форме Коши внедрена в ООО «Монтажстрой» (г. Новосибирск, РФ) для оценивания прочности цементного камня в зависимости от количества вводимой минеральной вяжущей добавки.

Методика построения кусочно-дифференциальной модели в форме Коши внедрена как инструмент, позволяющий осуществлять оперативный контроль качества продукции на АО «Востокмашзавод» (г. Усть-Каменогорск, РК) для изготовленных деталей металлургического оборудования.

Методика построения стохастической дифференциальной модели в форме Коши внедрена для расчета индуктивных и емкостных параметров элементов аттенюатора в ФГУП «РТРС», филиал «Липецкий областной радиотелевизионный передающий центр» (г. Липецк, РФ).

Методика построения стохастической кусочно-дифференциальной модели внедрена с целью использования полученной модели для расчета количества прогнозных поставок зернового сырья в мукомольно-комбикормовые комбинаты при решении задач транспортной логистики. Методика апробирована на реальных данных объема поставок сельскохозяйственной продукции в течение периода с 2001 по 2004 год в ОАО «Восточно-Казахстанский мукомольно-комбикормовый комбинат» (г. Семей, РК).

Подтверждением практической ценности результатов исследования служат акты о внедрениях, полученные в вышеупомянутых организациях, а также справка об использовании результатов научно-практических исследований в учебном процессе кафедры автоматике НГТУ.

Следует отметить, что диссертационная работа поддержана грантом по заданию Министерства образования и науки РФ, по проекту № 7.559.2011, «Исследование предельных точностей оптических методов измерения параметров движения и мехатронных методов управления движением и разработка новых робототехнических и электромеханических систем», Темплан, гос. рег. номер НИР 01201255056.

Апробация результатов исследования. Основные положения и выводы исследования докладывались и обсуждались на: 7-м Российско-Корейском международном симпозиуме науки и техники, 2003; Международном симпозиуме науки и техники (Новосибирск, 2003); Международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления»

(Томск, 2004); III Международной научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых «Страны СНГ в условиях глобализации» (Москва, РУДН, 2004); VI Среднеевропейской научно-технической конференции «Компьютерные методы и системы в автоматике и электротехнике» (Ченстохова, Польша, 2005); Международной научно-технической конференции «ИКИ-2001», «Измерение, контроль, информатизация» (Барнаул, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2010); II Российско-индийском объединенном семинаре «Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics», 10–13 сентября 2011 г.; XI Международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения», Новосибирск, 2–4 октября 2012 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 15 печатных работ, в том числе 6 работ в журналах из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, 6 статей в сборниках научных трудов и 3 работы в материалах международных конференций.

Личный вклад автора. Все результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором лично. Из 15 опубликованных статей 8 работ написаны в соавторстве, в них автором сформулированы задачи и получены теоретические результаты; в работе, связанной с процедурой масштабирования, задача поставлена научным руководителем, а алгоритм решения и вычислительные расчеты получены автором самостоятельно.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов подтверждаются результатами теоретических, экспериментальных исследований и расчетов, публикациями в рецензируемых изданиях, апробацией на международных конференциях, а также использованием результатов диссертационной работы при решении задач производственного характера.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 137 наименований и восьми приложений. Общий объем работы составляет 190 страниц, включая 33 таблицы и 36 рисунков. Основное содержание работы изложено на 139 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна и практическая ценность работы, дана характеристика полученных результатов.

В **первой главе** рассмотрены проблемы и задачи идентификации в целом, сделан краткий обзор литературы по вопросам идентификации объектов с изменяющимися тенденциями в поведении, рассмотрены линейные и нелинейные регрессионные модели, модели с распределенными параметрами, поставлена задача альтернативного представления этих моделей в виде линейных моделей в форме Коши сосредоточенного типа. Поставлена задача повышения точности параметров для непрерывно-дискретной модели в форме

Коши с целью уменьшения числа обусловленности матрицы Грама.

В главе дан краткий теоретический материал по инструментариям, которые применяются в исследовании вышеперечисленных задач. Так, для построенной стохастической модели в форме Коши используется фильтр Калмана. Известно, что этот аппарат содержит в себе много трудностей, связанных с наиболее точным оцениванием параметров уравнений динамики, характеристик шумов измерительной системы, начального состояния и динамики исследуемого объекта. Чтобы избежать проблем с расходимостью при калмановской оценке состояния, требуется, чтобы построенная модель прежде всего удовлетворяла четырем свойствам: устойчивости, наблюдаемости, управляемости, идентифицируемости. Поэтому в работе приведены известные критерии проверок этих свойств. Для применения методов параметрической идентификации, когда в поведении объекта происходят изменения тенденции, весь интервал наблюдения за объектом при малом объеме выборки визуально разделяется на подынтервалы, где объект не испытывает изменения тенденции в поведении. В связи с этим в главе изложен критерий Грегори Чоу, с помощью которого проверяются границы подынтервалов, где происходят изменения тенденции в поведении объекта.

К описанию динамических систем моделями в форме Коши исследователи прибегают все чаще. В данной работе под *динамической системой* будем понимать любой объект, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин, зависящих не только от времени, но и от любого другого независимого аргумента и задан закон, который описывает изменение начального состояния в зависимости от значений другого независимого аргумента. Поэтому такие ключевые понятия параметрической идентификации, как «модели в пространстве состояний», «стационарные», «нестационарные модели» и т. д., в данной работе рассматриваются как понятия, связанные с переменными, которые зависят необязательно от временного (вещественного) аргумента и заменяются терминами «модели в форме Коши», «модели с постоянными и переменными коэффициентами».

В модели в форме Коши динамика системы описывается стохастическими конечно-разностными или дифференциальными уравнениями, а измерительная система – в форме стохастических дискретных алгебраических уравнений. Исходя из этого, *линейная система* на подынтервалах может быть описана *линейной стохастической дискретной моделью с постоянными параметрами в зависимости от вещественного аргумента k* в стандартной форме вида (1),(2):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(k); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ – соответственно векторы выхода, переменных состояния, управляющих входных сигналов, шума динамики объекта, ошибок измерений (наблюдений).

Линейная непрерывно-дискретная система на подынтервалах может быть описана моделью с постоянными коэффициентами в уравнениях в зависимости от вещественного аргумента l в виде:

$$\frac{d\mathbf{x}(l)}{dl} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(l) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(l) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}(l); \quad \mathbf{x}(l_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(l_k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(l_k) + \mathbf{v}(l_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad l, l_k \in [l_0, l_N], \quad (4)$$

где $\mathbf{x}(l)$ – n -вектор состояния; $\frac{d\mathbf{x}(l)}{dl}$ – n -вектор производных от переменных состояния; $\mathbf{u}(l)$ – r - вектор входного сигнала; $\mathbf{w}(l)$ – q - вектор белого гауссовского процесса с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей \mathbf{Q} размера $(q \times q)$; \mathbf{x}_0 – вектор начального состояния; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы размеров $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(n \times q)$ соответственно; l – независимый параметр, $[l_0, l_N]$ – весь интервал наблюдения, на протяжении которого ведется наблюдение за объектом; $\mathbf{y}(l_k)$ – известный вектор измерений (наблюдений) размера m ; \mathbf{H} – матрица наблюдения размера $(m \times n)$; $\{\mathbf{v}(l_k), k = \overline{1, N}\}$ – белая гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей \mathbf{R} размера $(m \times m)$; N – количество дискретных моментов наблюдения.

Дифференциальные уравнения в частных производных на практике нередко используются для описания систем, изменяющихся во времени и в пространстве. Например, при описании процесса теплопереноса используется уравнение в частных производных параболического типа. Пространственно-временная модель в форме Коши описывается в виде:

$$a_1 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x \partial t} + c_1 \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + d_1 \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + e_1 \cdot q(x, t) + f_1 \cdot u(x, t) + p_1 \cdot w(x, t) = 0, \quad (5)$$

$$z(x_k, t_s) = h \cdot q(x_k, t_s) + \varepsilon(x_k, t_s), \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{0, m}, \quad (6)$$

где $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, p_1$ – постоянные коэффициенты; x, t – пространственная координата и время ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) соответственно; $q(x, t)$ – функция состояния системы с распределенными параметрами с некоторыми граничными и начальными условиями; $u(x, t)$ – входное управляющее воздействие распределенного типа, которое удовлетворяет определенным амплитудным ограничениям $u_{\min} \leq u(x, t) \leq u_{\max}$; $w(x, t)$ – белый гауссовский процесс распределенного типа с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией Q . Для (5) граничные условия имеют вид $q(0, 0) = q_0$; $q(L, t_N) = q_L$. В (6) $z(x_k, t_s)$ – дискретный распределенный выход измерительной системы, где индексы k и s означают, что пространственно-временная функция состояния может измеряться только в дискретных пространственных точках x_k и в дискретные моменты времени t_s ; h – заданный весовой коэффициент; $\varepsilon(x_k, t_s)$ – белый гауссовский шум измерительной системы распределенного типа с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией R . При выше

перечисленных условиях ставится задача оценивания коэффициентов уравнения (5) на основе входа и выхода системы.

Таким образом, в первой главе поставлена задача разработки методики построения математических моделей в форме Коши для объекта со следующими ограничениями и характеристиками: предположение гладкости функции входа и выхода системы, малое количество наблюдений на выходе измерительной системы, наличие явно выраженных изменений тенденций в поведении объекта и зависимость входных данных, переменных состояния, выходных данных и переменных параметров от вещественного аргумента. В ходе разработки методики были рассмотрены следующие вопросы: постановка задачи перехода от линейных и нелинейных регрессионных уравнений и модели систем распределенного типа к линейной модели в форме Коши сосредоточенного типа; описание критериев проверки свойств модели в форме Коши, таких как устойчивость, наблюдаемость, управляемость и идентифицируемость; визуальное разделение данных наблюдений на подынтервалы с подтверждением этого разбиения с помощью критерия Г. Чоу; постановка задачи исследования числа обусловленности информационной матрицы Грама для повышения точности оценок параметров модели.

Во **второй главе** излагаются алгоритмы перехода от линейных и нелинейных регрессионных уравнений и моделей распределенного типа к уравнениям в виде стохастических моделей в форме Коши сосредоточенного типа.

Пусть линейная регрессионная модель представлена в виде, когда зашумлены вход и выход:

$$y(l_j) = a_i + b_i \cdot x(l_j) + \varepsilon(l_j), \quad v(l_j) = x(l_j) + \delta(l_j), \quad j = \overline{1, n_i}, \quad l_j \in [l_{i-1}, l_i], \quad i = \overline{1, M},$$

где $\delta(l_j)$ и $\varepsilon(l_j)$ – случайные величины, характеризующие ошибки значений входа и выхода соответственно; $x(l_j)$ – истинные, но наблюдаемые с шумами значения входа системы. Предполагается, что шумы $\varepsilon(l_j)$ и $\delta(l_j)$ распределены нормально с нулевым средним и дисперсиями $\sigma^2(y_i)$ и $\sigma^2(v_i)$, соответственно, и коэффициентом корреляции $\rho_i = 0$. Для простоты опустим все индексы, соответствующие подынтервалам.

Оценки параметров a и b определяются на основе МНК, а истинные значения входа x_i из условия минимума функционала:

$$F = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\left(Y_i - (\hat{a} + \hat{b} \cdot x_i) \right)^2 / \sigma^2(Y_i) + (v_i - x_i)^2 / \sigma^2(v_i) \right).$$

Такой подход не всегда приемлем на практике из-за смещенности МНК-оценок параметров модели. В связи с этим в работе предлагается более эффективная модель в форме Коши.

Введем следующие обозначения: через $x_1(k)$ и $x_2(k)$ обозначим выходные и входные переменные объекта в момент значения невременного аргумента k соответственно; через $y_1(k)$ – наблюдение за состоянием $x_1(k)$, а через $y_2(k)$ – наблюдение за состоянием $x_2(k)$.

С помощью процедуры регуляризирующего сплайна значения данных наблюдений $\{y_1(k+1), k = \overline{0, n-1}\}$ и $\{y_2(k+1), k = \overline{0, n-1}\}$ преобразовываются в последовательности $\{\tilde{x}_1(k+1), k = \overline{0, n-1}\}$ и $\{\tilde{x}_2(k+1), k = \overline{0, n-1}\}$ соответственно. Подставляя эти значения в переменные модели динамики объекта с учетом аддитивных помех, получим следующую систему двух конечно-разностных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(k+1) = f_{11} \cdot \tilde{x}_1(k) + f_{12} \cdot \tilde{x}_2(k) + c_1 \cdot \tilde{w}_1(k), \\ \tilde{x}_2(k+1) = f_{21} \cdot \tilde{x}_1(k) + f_{22} \cdot \tilde{x}_2(k) + c_2 \cdot \tilde{w}_2(k), \quad k = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

С помощью МНК можно получить следующие оценки параметров переходной матрицы \mathbf{F} , где $f_{11} \approx \hat{f}_{11}$, $f_{12} \approx \hat{f}_{12}$, $f_{21} \approx \hat{f}_{21}$, $f_{22} \approx \hat{f}_{22}$.

С учетом полученных оценок можно записать соотношения вида (1), позволяющие осуществлять прогнозирование и фильтрацию значений переменных состояния с помощью аппарата дискретного фильтра Калмана:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \hat{f}_{11} \cdot x_1(k) + \hat{f}_{12} \cdot x_2(k) + c_1 \cdot \tilde{w}_1(k), \\ x_2(k+1) = \hat{f}_{21} \cdot x_1(k) + \hat{f}_{22} \cdot x_2(k) + c_2 \cdot \tilde{w}_2(k), \quad k = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

С учетом измерительной системы и некоторых обозначений получим: $\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}(k)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1)$, $k = \overline{0, n-1}$, где $\hat{\mathbf{F}}$ – переходная матрица, \mathbf{C} – диагональная матрица, \mathbf{H} – матрица наблюдений.

Методика построения модели в форме Коши может быть применена и на случай нелинейной регрессионной модели. В работе рассмотрен частный случай нелинейной регрессионной модели вида

$$F = A \cdot X^\alpha \cdot Y^{1-\alpha}, \quad (7)$$

где A , α – некоторые положительные постоянные, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Введем обозначения $k = X/Y$, $f(k) = F/Y$, которые позволят записать (7) в виде $f(k) = A \cdot k^\alpha$, где невременной параметр k – это вход, функция $f(k)$ – выход исследуемого объекта. Наблюдения за объектом дают возможность записать две последовательности данных, соответствующие входу и выходу:

$$\{k_0, k_1, \dots, k_{N-1}, k_N\}, \quad \{f(k_0), f(k_1), \dots, f(k_{N-1}), f(k_N)\}.$$

Поставим задачу исследования скорости изменения функции $f(k)$ в зависимости от входа k . Представим скорость изменения значений выхода в виде следующей линейной модели в форме Коши непрерывно-дискретного типа:

$$\dot{x}(k) = a \cdot x(k) + b + w(k), \quad x(k_0) = x_0 \quad (a); \quad f(k_i) = x(k_i) + v(k_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (b), \quad (8)$$

где k – непрерывное значение входа; $x(k)$ – непрерывное значение состояния исследуемого объекта; $\dot{x}(k)$ – скорость изменения функции состояния; $x(k_0) = x_0$ – начальное значение входа при k_0 и являющейся гауссовской величиной с математическим ожиданием x_0 и дисперсией $P(k_0) = P_0$; $w(k)$ – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Q ; k_i – дискретные значения входа; $f(k_i)$ – дискретные значения выхода измерительной системы; $x(k_i)$ – истинные значения состояния соответствующего

входа k_i ; $v(k_i)$ – белая гауссовская последовательность с математическим ожиданием q и дисперсией R ; a, b – неизвестные параметры; N – объем выборки.

Алгоритм построения модели в форме Коши состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Предположим $\{x(k_i) \approx f(k_i), i = \overline{1, N}\}$.

Шаг 2. Обозначим среднюю скорость изменения значений выхода исследуемого объекта через $\mu_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta k} \approx \frac{\Delta f}{\Delta k}$ на промежутке $[k_i; k_i + \Delta k]$, где $\Delta k = k_{i+1} - k_i$, $\Delta f = f(k_i + \Delta k) - f(k_i)$, $i = \overline{1, N-1}$. Тогда соотношение (8 б) с учетом обозначений шага 2 и предположения из шага 1 запишется в виде:

$$\dot{x}(k_i) \approx \frac{x(k_{i+1}) - x(k_i)}{k_{i+1} - k_i} = a \cdot x(k_i) + b + w(l_i), \text{ что позволит записать последнее со-}$$

отношение в виде $x(k_{i+1}) = (1 + a \cdot (k_{i+1} - k_i)) \cdot x(k_i) + b \cdot (k_{i+1} - k_i) + w(k_i) \cdot (k_{i+1} - k_i)$.

Шаг 3. Вводятся обозначения: $a_1 = 1 + a \cdot (k_{i+1} - k_i)$, $u(k_i) = k_{i+1} - k_i$, $\varepsilon(k_i) = w(k_i) \cdot (k_{i+1} - k_i)$, $i = \overline{1, N-1}$. Тогда последнее соотношение в шаге 2 запишется в виде $x(k_{i+1}) = a_1 \cdot x(k_i) + b \cdot u(k_i) + \varepsilon(k_i)$, $i = \overline{1, N-1}$, $x(k_0) = x_0$. Используя МНК, можно получить соотношения для оценивания неизвестных параметров a_1, b .

Шаг 4. Рассчитываются дисперсии ошибок динамики объекта Q , ошибок измерительной системы R и ошибки начального состояния $P(k_0) = P_0$.

Шаг 5. Оценивается состояние объекта на основе уравнений дискретного фильтра Калмана, который позволяет получить фильтрационные оценки $\hat{x}(k_i | k_i)$ относительно переменной состояния $\{x(k_i), i = N, N+1, \dots, \}$.

Таким образом, функция (7) преобразована в линейную модель, для которой предложен алгоритм построения линейной модели в форме Коши.

Далее предлагается *алгоритм преобразования модели с распределенными параметрами* в адекватную модель в форме Коши во временной области.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Примем интервалы квантования для t и x равными Δt и Δx . Тогда из (5) получим соотношение в частных разностях:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{\Delta x^2} (q_{k+1,s} - 2 \cdot q_{k,s} + q_{k-1,s}) + \frac{b_1}{\Delta x \cdot \Delta t} (q_{k+1,s+1} - q_{k,s+1} - q_{k+1,s} + q_{k,s}) + \\ & + \frac{c_1}{\Delta x} (q_{k+1,s} - q_{k,s}) + \frac{d_1}{\Delta t} (q_{k,s+1} - q_{k,s}) + e_1 \cdot q_{k,s} + v_1 \cdot u_{k,s} + p_1 \cdot w_{k,s} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Шаг 2. Проведем группировку значений функций $q(x, t)$ по величинам соответствующих координат k и s узлов сетки и переобозначим коэффициенты при дискретных значениях функции $q(x, t)$. Тогда выражение (9) в конечных разностях запишется в виде

$$a \cdot q_{k+1,s} + b \cdot q_{k+1,s+1} + c \cdot q_{k,s} + d_{k,s+1} + e \cdot q_{k-1,s} + v \cdot u_{k,s} + p \cdot \mu_{k,s} = 0. \quad (10)$$

Шаг 3. Запишем систему уравнений, получаемых из (10) для $k = 1, 2, \dots, n$, затем умножим все соотношения этой системы на (-1) , а затем слагаемые, содержащие индексы $(s+1)$, оставим в левой части, а остальные слагаемые с индексами s перенесем в правую часть. Тогда получим

$$\begin{cases} -dq_{1,s+1} - bq_{2,s+1} = eq_{0,s} + cq_{1,s} + aq_{2,s} + vu_{1,s} + p\mu_{1,s} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -dq_{n,s+1} - bq_{n+1,s+1} = eq_{n-1,s} + cq_{n,s} + aq_{n+1,s} + vu_{n,s} + p\mu_{n,s} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Граничные условия для (11) заданы в виде $0 \cdot \Delta x = 0$, $(n+1) \cdot \Delta x = L$.

Шаг 4. Вводя обозначения, (11) можно записать в виде

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{s+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_s + \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\mu}_s + (\mathbf{b}_2 \cdot \theta_{s+1} + \mathbf{a}_2 \cdot \eta_s + \mathbf{e}_2 \cdot \theta_s). \quad (12)$$

Умножим слева соотношение (12) на \mathbf{R}^{-1} , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s+1} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_s + \mathbf{R}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\mu}_s + \mathbf{R}^{-1} \times \\ &\times (\mathbf{b}_2 \cdot \theta_{s+1} + \mathbf{a}_2 \cdot \eta_s + \mathbf{e}_2 \cdot \theta_s). \end{aligned} \quad (13)$$

Шаг 5. Соотношение (13) требует введения дополнительных обозначений и преобразований. Пусть для начала $\boldsymbol{\rho}_s = (\mathbf{e}_2 \cdot \theta_s | \mathbf{0}_{n \times n} | \mathbf{a}_2 \cdot \eta_s | \mathbf{b}_2 \cdot \theta_{s+1})$ – матрица размером $(n \times (n+3))$. Теперь n -вектор управления \mathbf{U}_s увеличим на три компоненты, введя обозначения: $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{M}$; $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{D}$; $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{G}}$.

Все последние матрицы имеют размерность $n \times n$. Первую компоненту обновленного вектора \mathbf{u}_s заменим на 1, а матрица \mathbf{G} увеличится одним столбцом матрицы $\boldsymbol{\rho}_s$ и дополнительными $(n+2)$ -м и $(n+3)$ -м столбцами $\boldsymbol{\rho}_s$: $\mathbf{G} = (\mathbf{e}_2 | \mathbf{R}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{G}} | \mathbf{a}_2 | \mathbf{b}_2)$; $\mathbf{u}_s = (1 \ \mathbf{U}_s \ \eta_s \ \theta_s)^T$.

Окончательно выражение (13) запишется в виде:

$$\mathbf{X}_{s+1} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{X}_s + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\mu}_s. \quad (14)$$

Временной параметр s принимает значения $s = 0, 1, 2, \dots$, а начальные условия

$$\mathbf{X}_0 = (q_{1,0} \ q_{2,0} \ \dots \ q_{n,0})^T. \quad (15)$$

Контролируемые входные воздействия будут иметь размерность вектора $(n+3) \times 1$ и $s = 0$ будет иметь форму $\mathbf{u}_s = (\theta_s \ u_{1,0} \ u_{2,0} \ \dots \ u_{n,0} \ \eta_s \ \theta_{s+1})^T$, а неконтролируемое входное воздействие $\boldsymbol{\mu}_s$ будет иметь вид: $\boldsymbol{\mu}_s = (\mu_{1,s} \ \mu_{2,s} \ \dots \ \mu_{n,s})^T$.

После введенных обозначений матрица \mathbf{G} преобразуется к структуре вида

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e & c & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & c & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e & c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & c & a & b \end{pmatrix}_{n \times (n+3)},$$

а матрица $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица.

Шаг 6. Введем обозначения $\mathbf{y}_s = \mathbf{z}$, $\mathbf{X}_s = \mathbf{q}$ и для уравнения (6) при условии $h = \text{const}$. Тогда соотношение (6) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{y}_s = h \cdot \mathbf{X}_s + \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Уравнение (14) с начальным условием (15), а также уравнение (16) – модель стохастической системы в форме Коши во временной области, соответствующая пространственно-временному описанию в форме Коши (5), (6).

Для повышения точности параметров модели в форме Коши в работе предлагается осуществлять анализ числа обусловленности в информационной матрице Грама $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$. Поэтому ставится задача исследования влияния масштабирования вход-выходных переменных на уменьшение числа обусловленности этой матрицы на частном примере. Пусть для компактности объект описывается в виде (3), (4) при $N=11$, с точностью до неизвестных параметров, входящих во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(l) = \hat{x}_2(l) + w_1(l), & x_1(l_0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2(l) = \hat{a}_{21}x_1(l) + \hat{a}_{23}x_3(l) + \hat{b}_{21}u_1(l) + w_2(l), & x_2(l_0) = x_{20}, \\ \dot{x}_3(l) = \hat{a}_{31}x_1(l) + \hat{a}_{33}x_3(l) + \hat{b}_{32}u_2(l) + w_3(l), & x_3(l_0) = x_{30}. \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} y_1(l_i) = x_1(l_i) + v_1(l_i), & i = \overline{1, 10}, \\ y_2(l_i) = x_3(l_i) + v_2(l_i), & i = \overline{1, 10}. \end{cases} \quad (18)$$

Предполагается, что известны: начальные условия динамики поведения объекта $x_1(l_0), x_2(l_0), x_3(l_0)$; входные данные $\{\mathbf{u}_1(l_i), \mathbf{u}_2(l_i) \mid i = \overline{0, N}\}$ и выходные данные $\{\mathbf{y}_1(l_i), \mathbf{y}_2(l_i) \mid i = \overline{0, N}\}$. В этих условиях требуется рассчитать числа обусловленности для матриц Грама относительно входных и выходных наблюдений без масштабирования и после процедуры масштабирования. Решение задачи проводится по следующему алгоритму:

Шаг 1. Проведем сглаживание последовательности данных выхода измерительной системы $y_1(l_i) = \{0.0572 \dots 2.0242\}$ и $y_2(l_i) = \{2.5072 \dots 11.925\}$ с помощью регуляризирующего сплайна с равномерной сеткой $h_i = l_{i+1} - l_i = 1$, $i = \overline{0, N-1}$ и коридором фильтрации $q = \{0.011, \dots, 0.011\}$. Рекомендуется сделать не менее 10-и итераций процедуры сглаживания. В результате получаем следующие значения: $\tilde{\mathbf{y}}_1(l_i) = \{0.046 \dots 2.03\}$; $\tilde{\mathbf{y}}_2(l_i) = \{0.77 \dots 11.93\}$.

Шаг 2. Приравняем последовательности $\{\mathbf{x}_1(l_i) = \mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{y}}_1(l_i), \mathbf{x}_3(l_i) = \mathbf{x}_3 = \tilde{\mathbf{y}}_2(l_i), i = \overline{0, 10}\}$, получим $\mathbf{x}_1 = \{0.046 \ 0.101 \dots 2.029\}$; $\mathbf{x}_3 = \{0.77 \ 0.453 \dots 11.932\}$;

Шаг 3. Проведем процедуру численного дифференцирования значений последовательности $\{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(l_i), i = \overline{0, N}\}$ кубическим сплайном вида

$$S(l) = f_k(1-l) + f_{k+1} \cdot l - \frac{1}{6}l \cdot (1-l)[(2-l)M_k + (1+l)M_{k+1}],$$

где $l \in [l_i, l_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, $M_i = S''(l_i)$, $i = \overline{0, N}$. Вычислим производную этого соотношения. При этом для левых границ отрезка $[l_i, l_{i+1}]$, $l = 0$ и производные будут вычисляться по формуле

$$S'(l_i) = f_{i+1} - f_i - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot M_i + M_{i+1}), \quad (19)$$

а для правой границы отрезка $[l_{N-1}, l_N]$, по формуле

$$S'(l_i) = f_{i+1} - f_i - \frac{1}{6} \cdot (2 - 6 \cdot l + 3 \cdot l^2) \cdot M_i - \frac{1}{6} (2 - 3 \cdot l^2) \cdot M_{i+1}. \quad (20)$$

Используя формулы (19) и (20) получим последовательность значений производных $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 = [0.0157 \ 0.1019 \ \dots \ -0.4123]$, которая позволила восстановить все значения переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$;

Шаг 4. На основе данных входа $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и выхода значений переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ необходимо построить матрицу Грама $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$, где матрица \mathbf{X} размера 30×15 , имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(l_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{x}_2(l_1) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_3(l_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{x}_1(l_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{x}_2(l_{10}) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_3(l_{10}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(l_1) & x_2(l_1) & x_3(l_1) & u_1(l_1) & u_2(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1(l_{10}) & x_2(l_{10}) & x_3(l_{10}) & u_1(l_{10}) & u_2(l_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & a_{23} & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}^T. \quad \text{Введем следующие обозначения:}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1(l_1) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(l_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{x}_2(l_1) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_3(l_1) \end{pmatrix}; \quad \dots \quad \dot{\mathbf{x}}_{10}(l_{10}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(l_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{x}_2(l_{10}) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_3(l_{10}) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{X}} = ((\dot{\mathbf{x}}_1(l_1))^T \ (\dot{\mathbf{x}}_2(l_2))^T \ \dots \ (\dot{\mathbf{x}}_{10}(l_{10}))^T)^T;$$

$$\hat{\mathbf{XU}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(l_1) & \hat{x}_2(l_1) & \hat{x}_3(l_1) & u_1(l_1) & u_2(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{x}_1(l_1) & \hat{x}_2(l_1) & \hat{x}_3(l_1) & u_1(l_1) & u_2(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{x}_1(l_1) & \hat{x}_2(l_1) & \hat{x}_3(l_1) & u_1(l_1) & u_2(l_1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{XU}}_{10} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(l_{10}) & \hat{x}_2(l_{10}) & \hat{x}_3(l_{10}) & u_1(l_{10}) & u_2(l_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 & u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{XU}} = (\hat{\mathbf{XU}}_1^T \ \hat{\mathbf{XU}}_2^T \ \hat{\mathbf{XU}}_3^T \ \dots \ \hat{\mathbf{XU}}_{10}^T)^T; \quad \boldsymbol{\theta}_1 = (01000000000000000),$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = (00000 \ a_{21} \ 0 \ a_{23} \ b_{21} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \boldsymbol{\theta}_3 = (00000000000 \ a_{31} \ 0 \ a_{33} \ 0 \ b_{32}),$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T \ \boldsymbol{\theta}_2^T \ \boldsymbol{\theta}_3^T)^T.$$

Применив все обозначения, запишем соотношение $\dot{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{U} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$, для которого с помощью МНК получим

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mathbf{X}}\mathbf{U}^T \cdot \hat{\mathbf{X}}\mathbf{U})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}\mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{X}}. \quad (21)$$

Шаг 5. Из соотношения (21) для матрицы Грама $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{U}^T \cdot \hat{\mathbf{X}}\mathbf{U}$, используя формулу $K(\mathbf{D}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, вычислим число обусловленности $K(\mathbf{D}) \approx 2.95 \cdot 10^5$;

Шаг 6. Для уменьшения числа обусловленности матрицы Грама, проведем процедуру масштабирования входных и выходных данных с помощью масштабов вида:

$$\mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} m_{y_1} & 0 \\ 0 & m_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} m_{u_1} & 0 \\ 0 & m_{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем (17) и (18) с использованием матриц масштабирования \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_y

$$\dot{\mathbf{X}}(l) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(l) + \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{u}}(l) + \mathbf{w}(l), \quad \mathbf{X}(l_0) = \mathbf{X}_0, \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(l_i) = \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{X}(l_i) + \bar{\mathbf{v}}(l_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (23)$$

где $\bar{\mathbf{u}}(l) = \mathbf{M}_u \cdot \mathbf{u}(l)$, $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}_u^{-1}$, $\bar{\mathbf{y}}(l_i) = \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{y}(l_i)$, $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{H}$, $\bar{\mathbf{v}}(l_i) = \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{v}(l_i)$,

$$\mathbf{M}_y^{-1} = \begin{pmatrix} m_{y_1} & 0 \\ 0 & m_{y_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_u^{-1} = \begin{pmatrix} m_{u_1} & 0 \\ 0 & m_{u_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для (22), (23) построим матрицу $\bar{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{X}}\mathbf{U}^T \cdot \overline{\mathbf{X}}\mathbf{U}$, для которой $K(\bar{\mathbf{D}}) = 2.59 \cdot 10^4$.

Таким образом, расчеты показали уменьшение числа обусловленности матрицы Грама после процедур масштабирования входных и выходных данных, приблизительно в 10 раз.

В **третьей главе** описывается *методика построения кусочно-разностных и кусочно-дифференциальных моделей в форме Коши* на основе малого объема данных наблюдений за объектом с изменяющимися тенденциями в поведении. Особенность построения подобных моделей заключается в выявлении границ подынтервалов, внутри которых не изменяются тенденции поведения объекта. Далее, так как модели стохастические, для построения одной модели в форме Коши предлагается алгоритм расчета дисперсии шумов динамики и измерителя. В главе показан способ оценивания параметров непрерывной модели по дискретным наблюдениям. Алгоритмы и методика апробированы на тестовых примерах. *Алгоритм* оценивания дисперсии в модели в форме Коши состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Представим модель наблюдений на подынтервале в виде

$$x(l_{k+1}) = f \cdot x(l_k) + w(l_k), \quad x(l_0) = x_0, \quad y(l_{k+1}) = x(l_{k+1}) + v(l_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Для оценивания среднего значения и дисперсий шумов сформированы ряды по двум и трем смежным измерениям следующим образом:

$$v(l_k)^{(2)} = y(l_k) - y(l_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N; \quad v(l_k)^{(3)} = y(l_k) - 1/2y(l_{k-1}) - 1/2y(l_{k-2}), \quad k = 3, 4, \dots, N.$$

Шаг 2. Оценивание среднего значения прироста ряда q по формуле

$$\hat{q}(l_k | l_k) = \hat{q}(l_{k-1} | l_{k-1}) + \frac{1}{(N * k + 1)} \text{abs}(v(l_k)^{(2)} - \hat{q}(l_{k-1} | l_{k-1})), \quad k = \overline{2, N}, \quad \hat{q}(l_1 | l_1) = 0.$$

Окончательно $q \approx \hat{q}(l_N | l_N)$.

Шаг 3. Построение последовательностей произведений центрированных значений невязок по формуле

$$y(l_k)^{(w)} = 2(v(l_k)^{(3)} - \frac{3}{2} \hat{q}(l_k | l_k))(v(l_k)^{(2)} - \frac{1}{2} \hat{q}(l_k | l_k)), \quad k = 3, 4, \dots, N.$$

Шаг 4. Оценивание дисперсии шума модели динамики σ_w^2 в соответствии с выражением

$$\hat{\sigma}_w^2(l_k | l_k) = \hat{\sigma}_w^2(l_{k-1} | l_{k-1}) + \frac{1}{N} (y(l_k)^{(w)} - \hat{\sigma}_w^2(l_{k-1} | l_{k-1})), \quad k = \overline{3, N}, \quad \hat{\sigma}_w^2(l_2 | l_2) = 0.$$

Окончательно $Q \approx \sigma_w^2(l_N | l_N)$.

Шаг 5. Построение последовательностей значений невязок по формуле

$$y(l_k)^{(v)} = \frac{1}{2} [(v(l_k)^{(2)} - \hat{q}(l_k | l_k))^2 - \hat{\sigma}_w^2(l_k | l_k)], \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Шаг 6. Оценивание дисперсии шума измерителя σ^2 на основе выражения

$$\hat{\sigma}^2(l_k | l_k) = \hat{\sigma}^2(l_{k-1} | l_{k-1}) + \frac{2}{k} \text{abs}(y(l_k)^{(v)} - \hat{\sigma}^2(l_{k-1} | l_{k-1})), \quad k = \overline{2, N}, \quad \hat{\sigma}^2(l_1 | l_1) = 0.$$

Окончательно $R \approx \sigma^2(l_N | l_N)$.

Шаг 7. Предсказанные значения оценок состояния на один шаг $\hat{x}(l_{k+1} | l_k)$ и оценки фильтрации $\hat{x}(l_{k+1} | l_{k+1})$ рассчитываются в соответствии с алгоритмом калмановской фильтрации.

Методика построения моделей в форме Коши с переменными параметрами на основе малого числа данных наблюдений начинается с выделения данных наблюдений, соответствующих одной выборке. Если вектор состояния представляет собой вектор размерности n , то для решения задачи оценивания параметров разностных уравнений можно исследовать каждое уравнение в отдельности. *Методика* состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Изменение тенденции ряда наблюдений для моделей первого порядка определяется *визуально* и подтверждается на основе алгоритма Г. Чоу, описанного в главе 1. Это позволяет весь период наблюдений разбить на подынтервалы.

Шаг 2. Для каждого из полученных подынтервалов рассчитываются дисперсии шумов измерителей для дискретной модели по формуле

$$R_{i0} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_i(k) - \bar{y}_i(k))^2, \quad i = \overline{1, M}, \quad \text{где } \bar{y}_i(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_i(k) - \text{оценка математичес-$$

кого ожидания на i -м подынтервале, M – число подынтервалов, либо по рекуррентному алгоритму, рассмотренному выше.

Шаг 3. При больших шумах необходимо данные сглаживать с помощью алгоритма регуляризирующего кубического сплайна. Суть данного алгоритма

состоит в определении дважды дифференцируемого сплайна вида $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$ на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}] \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$, где $[a, b]$ – область определения сплайна, и в минимизации функционала

$$\Phi[S] = \int_a^b (S''(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n \rho(y_i - S(x_i))^2, \text{ где } \rho - \text{весовые коэффициенты.}$$

Шаг 4. На основе данных наблюдений с помощью МНК оцениваются коэффициенты дискретной и/или непрерывно-дискретной модели на каждом подынтервале.

Шаг 5. Для каждого подынтервала оцениваются дисперсии помех состояния объекта. Для этого разностное уравнение записывается в виде

$$w_i(k) = x_i(k+1) - \sum_{j=1}^n \hat{f}_{ij} \cdot x_{ij}(k) - \sum_{p=1}^r \hat{g}_{ip} \cdot u_{ip}(k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad i = \overline{1, M},$$

либо по предыдущему алгоритму, изложенному выше.

Для непрерывно-дискретной модели необходимо предварительно получить новые измерения в виде рассчитанных значений производных $\dot{x}(k)$. Так как $w_i(k)$ – гауссовский белый процесс с нулевым средним, оценки дисперсии помех состояния объекта на подынтервалах вычисляются по формуле

$$\hat{Q}_{i0}(i) = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{p=0}^{N_i-1} w_i^2(k_p), \quad i = \overline{1, M}, \text{ где } N_i - \text{объем выборки } i\text{-го подынтервала.}$$

Шаг 6. Вычисляются оценки дисперсии помех начального состояния $P_{i0}(0)$ на подынтервалах как рекурсивное решение для устойчивого состояния процесса с помощью соотношения

$$P_{i0}^{s+1} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n \hat{f}_{ij} \cdot P_{i0}^s \cdot \hat{f}_{ij}^T + \hat{Q}_{i0}^0, \quad P_{i0}^0 = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Шаг 7. Переходим на следующий подынтервал $i = i + 1$. Если $i \leq M$, переходим на шаг 2, иначе на шаг 8.

Шаг 8. Для получения единой модели оценки параметров на всех подынтервалах объединяются и представляются одной функцией от некоторого независимого параметра с помощью сглаживающего кубического сплайна. Окончательно для всего интервала наблюдений записывается кусочно-разностная или кусочно-непрерывная модель в форме Коши в виде

$$\begin{cases} x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \hat{f}_{ij} \cdot x_{ij}(k) + \sum_{p=1}^r \hat{g}_{ip} \cdot u_{ip}(k) + w_i(k), & i = \overline{1, M}, \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ y_i(k+1) = H_i \cdot x_i(k+1) + v_i(k+1), & k = \overline{0, N-1}, \\ \dot{x}_i(l) = \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} \cdot x_{ij}(l) + \sum_{p=1}^r \hat{b}_{ip} \cdot u_{ip}(l) + w_i(l), & i = \overline{1, M}, \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ y_i(l_{k+1}) = H_i \cdot x_i(l_{k+1}) + v_i(l_{k+1}), & k = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

Шаг 9. Полученные модели подвергаются совокупной проверке свойств, связанных с устойчивостью, наблюдаемостью, управляемостью и идентифици-

руемостью при $w(k) = 0$ и $v(k) = 0$. В работе приводятся критерии этих свойств.

Шаг 10. Полученные кусочно-разностная или кусочно-непрерывная модели при необходимости используются для оценивания состояния объекта с помощью уравнений фильтра Калмана.

Для получения непрерывно-дискретной модели из дискретной в работе предлагаются два подхода оценивания параметров: 1) использование сглаживающего кубического сплайна с регуляризацией как инструмент, позволяющий осуществлять расчеты численного дифференцирования; 2) в решении двух задач: а) оценивание параметров дискретной модели по дискретным измерениям; б) оценивание коэффициентов непрерывной модели динамики объекта по оценкам параметров дискретной модели.

Таким образом, в главе изложены: алгоритм оценивания дисперсий шумов модели в форме Коши, методика построения кусочно-разностной и/или кусочно-дифференциальной модели в форме Коши на основе данных наблюдений, численные расчеты по апробированию предложенной методики и алгоритмов.

В четвертой главе рассмотрен ряд прикладных задач. Методика построения *кусочно-разностной модели в форме Коши применена для оценивания прочности цемента*, хранившегося длительное время и в различных условиях. Для данной задачи были проведены промышленные испытания по повышению прочности цементного камня, полученного из клинкера введением минеральной добавки волластонита. Доля волластонита составила 0–13 % от массы клинкера а гипса – 5%. Результаты испытаний содержат до 5 % ошибок измерений. Для устранения этих ошибок в работе предложено использовать модель в форме Коши, которая на основе уравнений фильтра Калмана позволит заменить результаты измерений прочности цемента на оценки фильтрации. Из анализа результатов испытаний был сделан вывод, что исследуемый процесс является процессом с явно выраженными двумя тенденциями изменений в поведении значений данных испытаний, соответствующие двум подынтервалам.

Согласно методике построения кусочно-разностной модели в форме Коши, для подынтервала № 1 получены следующие характеристики: шум измерителя $R_{10} \cong 9.45 \text{ МПа}^2$, шум динамики $Q_{10} \cong 10.64 \text{ МПа}^2$; шум начального состояния $P_{10} \cong 10.64 \text{ МПа}^2$. При этих значениях разностная модель имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(m+1) = 0.45x_1(m) + 6.22u_1(m) + 0.59u_2(m+1) + w_1(m), & x_1(0) = x_0, \\ y_1(m+1) = x_1(m+1) + v_1(m+1), & m = \overline{0,9}, \end{cases}$$

где $x(m)$ – значение прочности цемента, $u_1(m)$ – значения количества вводимого гипса, $u_2(m)$ – значение количества вводимой минеральной добавки, $y(m)$ – значение прочности цемента на основе измерительной системы.

Аналогично для подынтервала № 2: $R_{20} \cong 22.5 \text{ МПа}^2$; $Q_{20} \cong 26.39 \text{ МПа}^2$; $P_{20} \cong 26.39 \text{ МПа}^2$ и разностная модель в форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} x_2(m+1) = 0.06x_2(m) - 2.94u_1(m) + 15.98u_2(m+1) + w_2(m), & x_2(0) = x_0, \\ y_2(m+1) = x_2(m+1) + v_2(m+1), & m = \overline{9,13}. \end{cases}$$

Для получения единой кусочно-разностной модели на всем интервале исследования параметры \hat{f}_1 , \hat{f}_2 , соответствующие моделям двух подынтервалов, можно «сшить» с помощью сглаживающего кубического сплайна и получить функцию $\hat{f}(m)$. Аналогично, можно построить и функции $\hat{g}_1(m)$, $\hat{g}_2(m)$. Полученная кусочно-разностная модель в форме Коши позволит применить аппарат фильтра Калмана для решения задачи фильтрации состояния прочности цемента как достоверной оценки. Реальные и фильтрационные значения прочности цемента представлены на графике (рисунок 1).

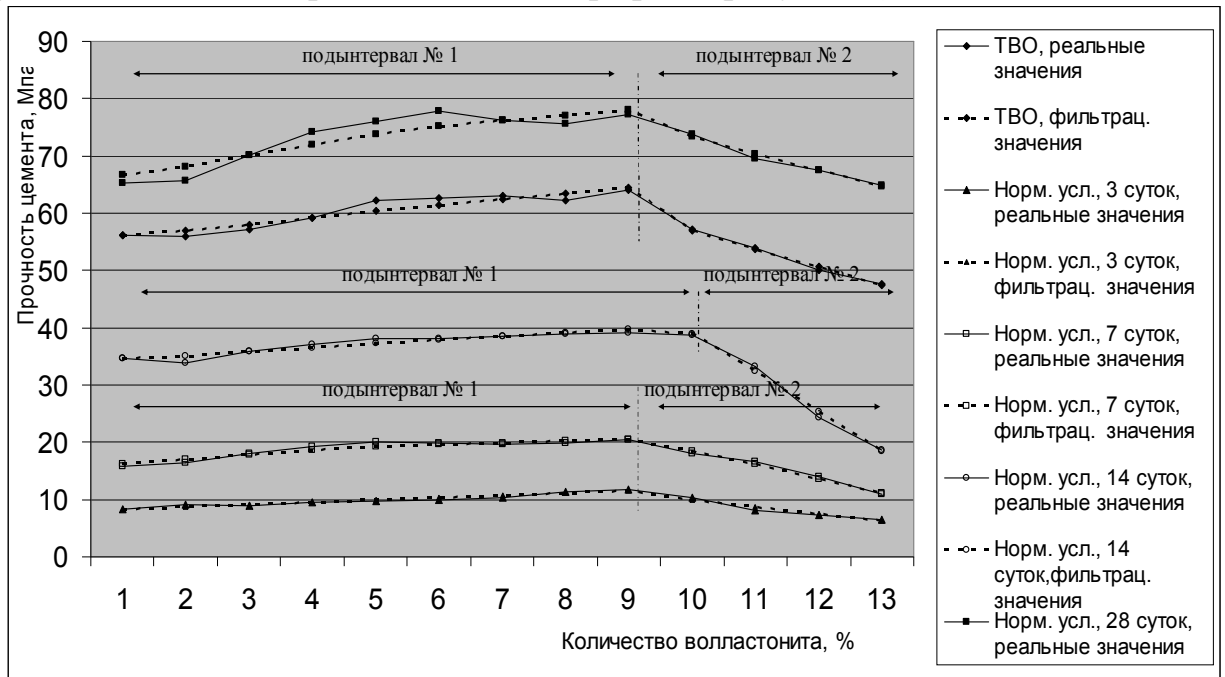


Рисунок 1 – Зависимость прочности цементного камня, изготовленного на основе свежеприготовленного клинкера, от введенного в него волластонита

Расчеты показали, что более достоверные оценки фильтрации прочности цемента достигают своего максимального значения добавки при 9 % от общей массы исходного количества клинкера и что разброс значений ошибок оценок фильтрации составляет $\pm 1,5\%$.

Далее, в главе рассмотрена задача построения кусочно-дифференциальной модели в форме Коши для плотности и функции распределения, необходимой для определения показателя качества промышленной продукции. Для выявления качества выпускаемой предприятием продукции проведены измерения длин деталей $\{y_0, y_1, \dots, y_N; N = 50\}$. Для полученного ряда требуется построить математическую модель плотности и функции распределения вероятностей проведенных измерений. Допустим, что в ходе контроля качества продукции получены частоты попадания длин элементов из выборочной партии в контрольные интервалы. Для контроля качества изделий (оценки плотности распределения) строится непрерывно-дискретная модель в форме Коши вида:

$$\dot{x} = a_i x + b_i, \quad x(0) = x_0, \quad y_k = x_k + e_k, \quad (24)$$

где x – состояние объекта, характеризующее частоту попадания ряда измерений; y_k – выход измерительной системы; e_k – случайная погрешность k -го

измерения; x_0 – начальное состояние; $i = \overline{1, M}$, M – число подынтервалов.

Интервал наблюдения визуально разбивается на два подынтервала $[1, 4]$ и $[4, 7]$, где граница наблюдения определяется существенным изменением поведения объекта. На каждом подынтервале вычисляются значения параметров a_i и b_i и строится модель вида (24). В результате вычислений найдены параметры на подынтервале $[1, 4]$ – $\{\hat{a}_1 = -0.05, \hat{b}_1 = 5.08\}$, а на подынтервале $[4, 7]$ – $\{\hat{a}_2 = -0.21, \hat{b}_2 = -2.77\}$. Для набора накопленных частот, то есть для подынтервала $[1, 7]$, параметры модели равны $\{\hat{a} = -0.09; \hat{b} = 10.58\}$. На рисунке 2 (а) представлены данные накопленных частот и график одной дифференциальной модели. Как видно, модель не обладает достаточной точностью.

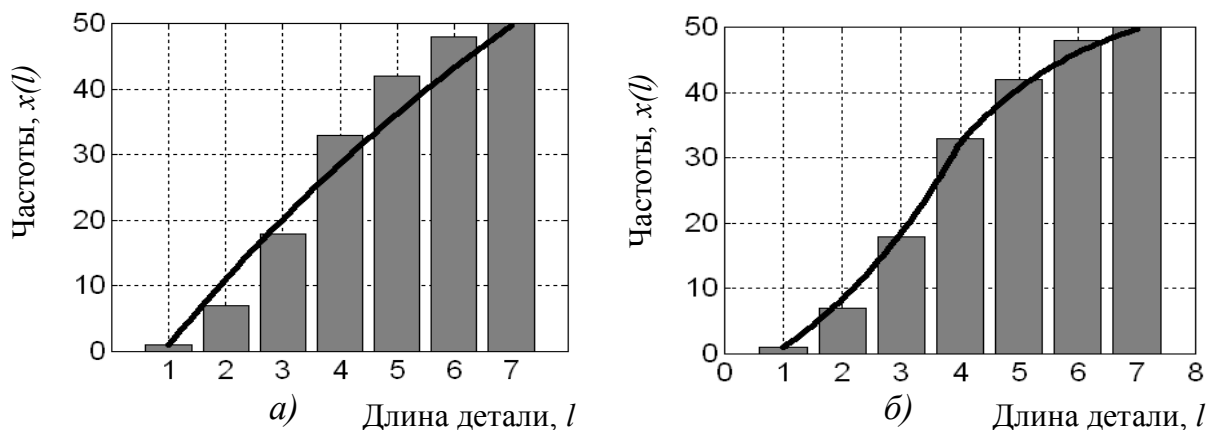


Рисунок 2 – Гистограмма накопленных частот и графики дифференциальных моделей:
 а - дифференциальная модель для всего интервала $[1; 7]$;
 б - кусочно-дифференциальная модель на подынтервалах $[1; 4]$ и $[4; 7]$.

С целью повышения точности модели интервал наблюдения разбивается на два подынтервала: $[1, 4]$ и $[4, 7]$. На каждом подынтервале строится своя дифференциальная модель с параметрами: $\{\hat{a}_1 = -0.31; \hat{b}_1 = 6.0\}$ и $\{\hat{a}_2 = -0.42; \hat{b}_2 = 23.8\}$ соответственно. График полученной кусочно-дифференциальной модели представлен на рисунке 2 (б). Численные результаты показали, что уменьшение погрешности модели на двух подынтервалах определено вычислением значений среднеквадратичных отклонений исходных данных от результатов моделей, которые для случая на всем интервале равно 3.49, а для кусочно-дифференциальной модели равно 1.03 .

Далее, решается задача прогнозирования объема поставок зерновых культур с помощью *кусочно-дифференциальной модели в форме Коши*. Установлено, что неэффективное размещение предприятий мукомольно-комбикормового производства на территории региона вызывает значительные затраты, связанные с необходимостью перевозки сельскохозяйственной продукции в больших объемах и на значительные расстояния. В связи с этим особое внимание должно отводиться решению задачи транспортной логистики.

Результаты наблюдения и обработки статистических данных показывают,

что объемы поставок зернового сырья на предприятие имеют сезонный характер. Это позволило использовать разработанную методику и получить два дифференциальных уравнения в форме Коши, построенных на двух подынтервалах:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0,08 \cdot x(t) + 56,12 \cdot u(t) + \varepsilon(t), & t \in [t_0, t_N], & x(t_0) = x_0 = y(t_1); \\ y(t_k) = x(t_k) + v(t_k), & k = \overline{1,9}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0,42 \cdot x(t) - 12,10 \cdot u(t) + \varepsilon(t), & t \in [t_{N1}, t_{N2}], & x(t_0) = x_0 = y(2(1)); \\ y(t_k) = x(t_k) + v(t_k), & k = \overline{1,7} \end{cases} \quad (26)$$

К полученным моделям (25) и (26), применив аппарат фильтра Калмана, можно получить предсказанные и фильтрационные оценки (рисунок 3).

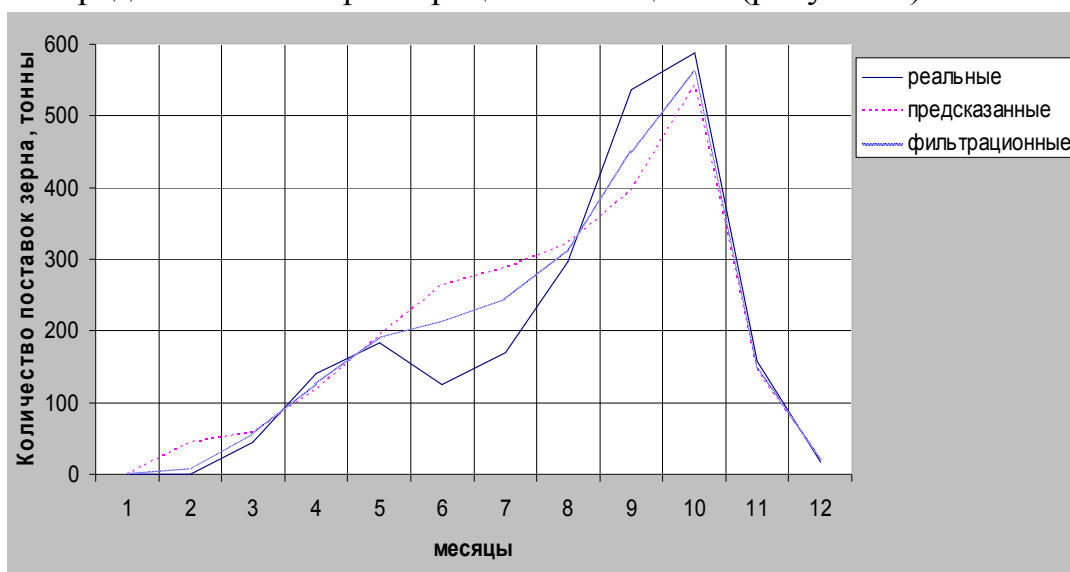


Рисунок 3 – Графики поведения реальных, предсказанных и фильтрационных поставок зерновых культур за 12 месяцев 2004 г.

Численные исследования показали, что кусочно-дифференциальная модель в форме Коши точнее описывает наблюдаемый процесс. Величины по отклонениям между значениями реальных данных и оценок предсказаний – незначительные. Поэтому полученная модель была использована для месячного прогнозирования поставок зерна в течение следующего 2005 года.

В работе решена задача оценки невязки аналитических и экспериментальных данных индуктивности микрополосковой линии на основе дифференциальной модели в форме Коши с использованием фильтра Калмана.

В заключении сформулированы основные результаты исследования.

В приложении приведены результаты обработки данных и акты о внедрениях результатов исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

1. Алгоритмы построения линейных моделей в форме Коши вместо линейных и нелинейных регрессионных моделей, где входные данные, состояние

динамики и выходные данные измерительной системы зависят от невременного аргумента и содержат в себе малое число наблюдений.

2. Алгоритм преобразования стохастической модели с распределенными параметрами к адекватной модели в форме Коши во временной области.

3. Рекуррентные алгоритмы вычислений дисперсий шумов динамики и измерительной системы на основе дискретных данных наблюдений.

4. Алгоритм уменьшения числа обусловленности информационной матрицы Грама для непрерывно-дискретной модели в форме Коши на основе процедуры масштабирования входных и выходных данных.

5. Методика построения стохастической линейной кусочно-разностной и кусочно-дифференциальной модели в форме Коши для объектов с малым объемом наблюдений, где вход, состояние, выход измерительной системы и коэффициенты модели динамики зависят не обязательно от временного аргумента.

6. На основе разработанных методики и алгоритмов получены следующие модели в форме Коши: кусочно-разностная модель для оценивания прочности цементного камня; кусочно-дифференциальная модель для плотности и функции распределения длин деталей, необходимой для оценивания качества промышленных изделий; кусочно-дифференциальная модель для прогнозирования объема поставок зернового сырья в мукомольно-комбикормовые комбинаты; дифференциальная модель для оценки невязки аналитических и экспериментальных данных индуктивности микрополосковой линии.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Абденова Г.А. Структурно-параметрическая идентификация систем с распределенными параметрами с использованием модели типа «вход–состояние–выход» // Научный вестник НГТУ. Новосибирск: НГТУ, 2010. № 1 (38). С. 9–16.
2. Абденова Г.А. Прогнозирование значений уровня временного ряда на основе уравнений фильтра Калмана // Ползуновский вестник. Барнаул: АлтГТУ, 2010. № 2. С. 4–6.
3. Абденова Г.А., Апсалямов Н.А., Толысбаев Б.С. Прогнозирование уровней поставок зернового сырья на мукомольное производство // Известия международной академии наук высшей школы. Новосибирск: НГТУ, 2006. № 1 (35). С. 114–124.
4. Абденова Г.А., Ильина Л.В., Раков М.А. Применение модели в пространстве состояний для достоверного оценивания прочности цементного камня // Фундаментальные исследования, 2011. № 8. С. 589–592.
5. Абденова Г.А., Рубанович М.Г., Хрусталёв В.А. Оценка невязки экспериментальных данных и аналитических расчетов интегральной индуктивности микрополосковой линии // Научный вестник НГТУ. Новосибирск: НГТУ, 2011. №3 (44). С. 29–42.
6. Абденова Г.А. Воевода А.А. Обусловленность информационной матрицы Грама в задаче идентификации: масштабирование входных и выходных

сигналов // Доклады ТУСУР. Томск: Из-во ТУСУР, 2012. №1 (25). Часть 1. С.131–135.

Статьи, опубликованные в других изданиях:

7. Абденова Г.А. Стохастическая нестационарная модель для функции Кобба-Дугласа в пространстве состояний // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. № 3 (57). С. 41–46.
8. Абденова Г.А. Построение кусочно-дифференциальной модели в пространстве состояний для контроля качества продукции // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. № 3 (57). С. 47–56.
9. Абденова Г.А., Воевода А.А. Идентификация непрерывных многомерных систем по дискретным наблюдениям // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. № 2 (60). С. 165–168.
10. Абденова Г.А., Воевода А.А. Оценивание параметров и характеристик шумов нестационарных процессов в стохастических системах, описываемых в пространстве состояний // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. № 3 (61). С. 11–18.
11. Абденова Г.А. Методика построения кусочно-разностной модели в пространстве состояний на основе нестационарного ряда наблюдений // Сб. науч. трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. № 2(64). С. 3–12.
12. Абденова Г.А., Воевода А.А. Один алгоритм перехода от регрессионной модели к модели в форме пространства состояний // Сб. научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. № 3 (69). С. 3–10.
13. Абденова Г.А., Толысбаев Б.С. Моделирование поставки зерна на мукомольное производство // Компьютерные методы и системы в автоматике и электротехнике: материалы VI Среднеевропейской научно-технической конференции, Ченстохова, Польша, 16-17 сентября 2005 г. Ченстохова: Изд-во Ченстоховского технологического университета, 2005. Т. 2. С. 57–59.
14. Abdenova G.A. The method of construction piece-differential model on the basis of nonstationary observations // The Second Russian-Indian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Neuristics in Automation and Robotics: proceedings RFBR and DST Sponsored, Novosibirsk, 10-13 September 2011. Novosibirsk: Publ. of NSTU, 2011. Additional volume. P.7-10. [Методика построения кусочно-дифференциальной модели на основе нестационарных наблюдений]
15. Абденова Г.А. Масштабирование вход-выходных данных и число обусловленности матрицы Грама // Актуальные проблемы электронного приборостроения: материалы XI международной конференции, Новосибирск, 2-4 октября 2012 г. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. Т. 6. С.16-18.

Отпечатано в типографии Новосибирского
государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20,
тел./факс (383) 346-08-57
формат 60×84/16, объем 1.5 п. л., тираж 100 экз.,
заказ № 187, подписано в печать 15.01.2013 г.