На правах рукописи

Чимитова Екатерина Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ТИПА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

Специальность 05.13.17 – «Теоретические основы информатики»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук

Новосибирск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный консультант:	доктор технических наук, профессор **Лемешко Борис Юрьевич**
Официальные оппоненты:	**Антонов Александр Владимирович**, доктор технических наук, профессор, Обнинский институт атомной энергетики – филиал Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», декан факультета кибернетики;
	Кошкин Геннадий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственного автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», профессор кафедры теоретической кибернетики;
	Рябко Борис Яковлевич, доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук», заведующий лабораторией информационных систем и защиты информации.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук».

Защита состоится «22» декабря 2016 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте http://www.nstu.ru.

Автореферат разослан « __ » _________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Фаддеенков Андрей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В задачах анализа данных типа времени жизни выборки, как правило, содержат неполные наблюдения – цензурированные, интервальные или усеченные, что всегда связано со спецификой проведения эксперимента и формой регистрации наблюдений. Понятно, что при построении вероятностных моделей и проверке статистических гипотез необходимо учитывать форму представления данных, поэтому разработка и исследование статистических методов оценивания и проверки гипотез по цензурированным, усеченным, группированным и интервальным данным является актуальной задачей.

Одной из важнейших задач в прикладной статистике является построение статистической модели зависимости исследуемого количественного отклика от объясняющих переменных. Однако в задачах анализа данных типа времени жизни классические методы регрессионного анализа часто оказываются неприменимыми. Во-первых, классическая регрессионная модель определяется как зависимость математического ожидания отклика от объясняющих переменных, в то время как в задачах теории надежности и анализа выживаемости интерес представляет зависимость надежности (выживаемости) от объясняющих переменных. Во-вторых, распределение случайной величины, представляющей собой время жизни до некоторого системного события, как правило, является далеким от нормального распределения, а значит методы регрессионного анализа, в основе которых лежит предположение о нормальности ошибок, будут неприменимыми.

Наиболее широко используемыми регрессионными моделями в задачах анализа надежности и выживаемости являются модель ускоренных испытаний и модель пропорциональных интенсивностей Кокса. Регрессионные модели надежности и долговечности рассматривались в работах многих авторов, в частности, стоит отметить работы М.С. Никулина, В. Багдонавичуса (V. Bagdonavicius), Н. Балакришнана (N. Balakrishnan), Д. Кокса (D.R. Cox), У. Нельсона (W. Nelson), У. Микера (W. Meeker), К. Хьюбер (C. Huber), Дж. Лоулесса (J.F. Lawless), А.В. Антонова.

Достоверность результатов статистического анализа, в первую очередь, зависит от степени адекватности выбранной модели. Поэтому обязательным этапом является проверка гипотезы о виде модели. Задачу проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели можно свести к задаче проверки сложной гипотезы о принадлежности выборки остатков базовому закону распределения, которая может быть решена с использованием одного из критериев согласия. Однако зачастую в публикациях, посвященных статистике ускоренных испытаний, о проверке гипотезы о виде модели либо не упоминается, либо проверку принадлежности выборки остатков базовому закону распределения осуществляют графическими методами. Причины такого положения вещей кроются в проблемах, связанных с использованием критериев согласия в условиях проверки сложных гипотез. В частности, (предельные) распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез существенно зависят от вида закона распределения, с которым проверяется согласие, от применяемого метода оценивания параметров и ряда других факторов. Применение критериев типа χ^2 для проверки гипотез о виде распределения осложняется неоднозначностью выбора числа интервалов группирования и граничных точек.

Проблемы проверки сложных гипотез о виде распределения усугубляются в случае выборок, содержащих цензурированные, усеченные и интервальные наблюдения, поскольку на распределения статистик непараметрических критериев согласия существенное влияние оказывают как свойства непараметрических оценок функции распределения отказов, так и свойства оценок параметров вероятностной модели.

Статистические методы анализа данных типа времени жизни наиболее интенсивно используются при решении задач анализа надежности технических изделий. Среди отечественных публикаций, посвященных статистическим методам в теории надежности, необходимо отметить работы Б.В. Гнеденко, И.А. Ушакова, Ю.К. Беляева, Ю.Н. Благовещенского, В.М. Скрипника, Ю.Г. Приходько, А.Е. Назина, В.А. Острейковского, А.В. Антонова, И.З. Аронова и других авторов.

Есть озабоченность в связи с проверкой статистических гипотез относительно вида регрессионной модели надежности. Этой проблемой серьезно занимаются. Однако на настоящий момент можно однозначно утверждать, что в рамках только аналитического подхода она решена быть не может. Выходом из сложившейся ситуации является применение методики компьютерного моделирования, основанной на методе Монте-Карло. Данная методика дополняет аналитические методы, обеспечивая нахождение приближенного решения в тех случаях, когда этого не удается сделать аналитическими методами. Вместе с тем применение методов статистического моделирования требует разработки соответствующего алгоритмического и программного обеспечения.

Цель и задачи. Основной целью диссертации является расширение возможностей математического аппарата и развитие компьютерных технологий исследования статистических закономерностей для решения задач анализа данных типа времени жизни. Для достижения поставленной цели осуществляется:

1. Исследование статистических свойств оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметров наблюдаемых законов по цензурированным справа выборкам, выборкам усеченных слева наблюдений и выборкам текущих состояний.
2. Исследование распределений статистик и мощности критериев согласия типа χ^2 по полным, группированным и цензурированным выборкам.
3. Исследование распределений статистик и мощности модифицированных критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для цензурированных данных.

4. Разработка статистических критериев согласия для проверки простых и сложных гипотез по выборкам усеченных слева наблюдений и выборкам текущих состояний.
5. Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, применяемых к выборкам остатков, для проверки гипотез о виде регрессионных моделей по выборкам, содержащим полные, цензурированные, усеченные слева или интервальные наблюдения.
6. Разработка методики проверки гипотезы о виде деградационной гамма-модели с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.
7. Разработка программного обеспечения для построения вероятностных моделей типа времени жизни по выборкам, содержащим полные, цензурированные, усеченные слева или интервальные наблюдения.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует области исследования п.5 «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текстов, устной речи и изображений» паспорта специальности 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» (в области технических наук).

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовался аппарат теории вероятностей, математической статистики, математического анализа, линейной алгебры, статистического моделирования, численных методов и математического программирования.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- для ряда законов распределения вычислена относительная эффективность ОМП по цензурированным справа выборкам и выборкам усеченных слева наблюдений по отношению к ОМП по полным выборкам. Показано, что при ограниченных объемах выборок распределения ОМП при высокой степени цензурирования и степени усечения оказываются далекими от многомерного нормального распределения;
- для ряда законов распределения найдены оптимальные планы для тестирования (испытаний) устройств одноразового срабатывания, позволяющие повысить точность ОМП параметров распределений;
- предложен метод оптимального группирования для заданной пары конкурирующих гипотез, использование которого позволяет существенно повысить мощность критериев согласия типа χ^2 для цензурированных данных;
- в результате сравнительного анализа мощности критериев согласия для цензурированных справа выборок при проверке сложных гипотез о виде распределение показана предпочтительность критерия типа Андерсона-Дарлинга по сравнению с другими рассмотренными в работе критериями;
- для анализа выборок текущих состояний предложены критерии согласия, предусматривающие интерактивное исследование распределений статистик при справедливости нулевой гипотезы, требуемых для принятия решения;

- разработана методика проверки гипотез о виде параметрических регрессионных моделей по выборкам, содержащим полные, цензурированные, усеченные слева или интервальные наблюдения, на основе критериев согласия, применяемых к выборкам остатков;
- разработана методика проверки гипотезы о виде деградационной гамма-модели надежности с использованием критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. Результаты исследования статистических свойств ОМП параметров законов распределения по цензурированным справа выборкам и выборкам усеченных слева наблюдений, свидетельствующие о существенном отличии свойств оценок в реальных ситуациях от асимптотических.
2. Метод оптимального разбиения цензурированной выборки на интервалы, позволяющий существенно повысить мощность применяемых критериев согласия типа χ^2 относительно заданной пары конкурирующих гипотез.
3. Результаты сравнительного анализа мощности множества критериев согласия, используемых при проверке сложных гипотез по цензурированным справа выборкам. Рекомендации по выбору критериев.
4. Критерии согласия, предложенные для анализа выборок текущих состояний. Применение критериев базируется на статистическом моделировании требуемых распределений статистик, осуществляемом в интерактивном режиме проводимого анализа.
5. Методика проверки гипотез о виде параметрических регрессионных моделей по выборкам отказов, содержащим полные, цензурированные, усеченные слева или интервальные наблюдения, на основе критериев согласия, применяемых к выборкам остатков.
6. Алгоритмы моделирования распределений статистик критериев согласия при справедливости проверяемой гипотезы, существенно расширяющие сферу применения аппарата математической статистики для проверки гипотез о виде распределения по выборкам, содержащим полные, цензурированные, усеченные слева или интервальные наблюдения.
7. Методика проверки гипотезы о виде деградационной гамма-модели надежности с использованием критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Достоверность и обоснованность научных положений, рекомендаций и выводов обеспечивается корректным использованием методов исследования, согласованностью выводов с известными теоретическими результатами, а также подтверждается решением тестовых задач с использованием методов статистического моделирования.

Практическая ценность и внедрение результатов работы. Полученные в результате работы методики, алгоритмы и программное обеспечение могут применяться в прикладных задачах статистической обработки полных, группированных, цензурированных справа выборок, а также выборок, содержащих усеченные слева наблюдения, и выборок текущих состояний.

Результаты диссертационного исследования могут использоваться при решении задач в теории надежности, биомедицине, социологии, экономике, демографии и других областях.

Для разработанной программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» получены свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618138 (2012 г.), № 2012618143 (2012 г.), № 2014661905 (2015 г.). – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).

Исследования и разработка программного обеспечения проводились при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (по государственным контрактам №П1190 от 27 августа 2009 г., №П2611 от 26 ноября 2009 г., № П950 от 20 августа 2009 г., №02.740.11.5187 от 12 марта 2010 г., соглашения №14.В37.21.0860 от 6 сентября 2012 г.) и в рамках проектной части государственного задания (проект №2.541.2014/К), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты №2.1.2/3970, №2.2.2.3/9104), а также при поддержке РФФИ (проекты №00-01-00913а, 06-01-00059а, 09-01-00056а).

Результаты проведенных исследований и разработанное программное обеспечение были внедрены в практику деятельности ФГБУ «НИИ онкологии им. Н.Н. Петрова» Минздрава РФ, в практику деятельности ООО «НПК Морсвязьавтоматика» и ООО «Велман», а также использованы в учебном процессе на факультете прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», что подтверждается соответствующими актами о внедрении.

Апробация результатов. Результаты исследований докладывались на Российской научно-технической конференции «Информатика и проблемы телекоммуникаций" (Новосибирск, 1999, 2000, 2001, 2006, 2007, 2009); Сибирском Конгрессе по Прикладной и Индустриальной Математике (ИНПРИМ) (Новосибирск, 2000); Международной научно-технической конференции «Информатика и проблемы телекоммуникаций» (Новосибирск, 2002, 2003, 2005); Российской научно-технической конференции "Обработка информационных сигналов и математическое моделирование" (Новосибирск, 2013, 2014, 2015); Международной конференции «Информационные системы и технологии» (ИСТ) (Новосибирск, 2000; Нижний Новгород, 2001); Международной конференции «Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов (состояние, перспективы развития)» (Новосибирск, 2009); Международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения" (АПЭП) (Новосибирск, 2000, 2002, 2010, 2014); Региональной конференции (с участием иностранных ученых) «Вероятностные идеи в науке и философии» (Новосибирск, 2003); Международной конференции "Korea-Russia International Symposium of Science and Technology" (KORUS) (Ульсан, Корея, 2003; Томск, 2004); Международной конференции "Computer Data Analysis and Modeling: Robustness and Computer Intensive Methods" (CDAM) (Минск, 2004, 2010); Международной конференции "Mathematical Methods in Reliability" (MMR) (Москва, 2009; Пекин, Китай, 2011);

Международной конференции «Accelerated Life Testing» (ALT) (Бордо, Франция, 2008; Клермон-Ферран, Франция, 2010); Международной конференции «Applied Stochastic Models and Data Analysis» (ASMDA) (Крит, Греция, 2007); Международной конференции “Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis” (Крит, Греция, 2010); Международном симпозиуме по непараметрическим и робастным методам в кибернетике (Томск, 2012); Российской конференции «Энергетика: эффективность, надёжность, безопасность» (Томск, 2012); Европейском семинаре “Mathematical Methods for Survival Analysis, Reliability and Quality of Life” (Париж, Франция, 2010); Международной конференции “Applied Methods of Statistical Analysis” (AMSA) (Новосибирск, 2011, 2013, 2015); Международной конференции “International Workshop on Simulation” (IWS) (Римини, Италия, 2013; Вена, Австрия, 2015); Международной конференции “Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing” (AMCTM) (Санкт-Петербург, 2014), Международной конференции “Interface between Statistics and Engineering” (ICISE) (Гонконг, Китай, 2014); научной сессии НИЯУ МИФИ, секция «Современные проблемы надежности. Анализ надежности оборудования АЭС» (Обнинск, 2015).

Публикации. Основные результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 76 печатных работах, в том числе в 25 статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в 3 монографиях, 48 публикациях в сборниках научных работ, трудах и материалах научных конференций. Получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

В опубликованных работах автору принадлежат результаты, изложенные в тексте диссертации.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, 7 глав основного содержания, заключения, списка литературы и 3 приложений. Основное содержание представлено на 323 страницах, включая 57 таблиц, 73 рисунка и список литературы из 259 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна и практическая ценность работы, дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе вводятся различные виды выборок отказов, типичные для задач анализа данных типа времени жизни. Рассматриваются регрессионные модели зависимости вероятности дожития до момента времени t от факторов, влияющих на продолжительность жизни. Обсуждаются проблемы построения таких моделей по группированным и цензурированным выборкам, а также выборкам, содержащим усеченные слева наблюдения, и выборкам текущих состояний.

Пусть время жизни объектов изучаемой генеральной совокупности представляет собой неотрицательную непрерывную случайную величину T.

Распределение такой случайной величины может быть задано одной из функций, определения которых рассмотрены ниже.

Функцией распределения случайной величины T называется функция $F_T : R \to [0,1]$, задаваемая формулой:

$$F(t) = P\{T < t\},\ t \ge 0.$$

Если функция $F(t)$ дифференцируема, то существует функция плотности распределения $f(t)$ такая, что

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du.$$

Функция выживаемости определяется равенством:

$$S(t) = 1 - F(t) = P\{T \ge t\}. \qquad (1)$$

Её называют также *функцией надежности*, т.к. она описывает вероятность безотказной работы за наработку t.

Функция интенсивности отказов определяется следующим образом:

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P\{t \le T < t + h \mid T > t\}}{h} = \frac{f(t)}{S(t)}, \qquad (2)$$

где $f(t)$ – функция плотности, $S(t)$ – функция надежности.

Кумулятивная функция риска определяется выражением:

$$\Lambda(t) = \int_{0}^{t} \lambda(u)du, \qquad (3)$$

где $\lambda(t)$ – функция интенсивности. Кумулятивная функция риска – это мера, выражающая склонность объектов к отказам в зависимости от времени.

Одной из важнейших задач статистического анализа данных типа времени жизни является построение модели зависимости времени жизни от объясняющих переменных (факторов). В литературе, посвященной анализу данных типа времени жизни, объясняющие переменные принято называть ковариатами. В качестве ковариат обычно выступают различного рода воздействия, такие, например, как напряжение, механические нагрузки, температура, влажность в теории надежности, либо тип лечения, доза лекарства, а также внутренние признаки объектов, такие как пол, возраст, артериальное давление и другие, в медико-биологических исследованиях.

Обозначим вектор ковариат через $x = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$. Область значений каждой из ковариат x_j, $j = \overline{1,m}$, определяется условиями проведения эксперимента и представляет собой отрезок числовой прямой. В настоящем диссертационном исследовании предполагается, что ковариаты являются постоянными по времени величинами.

Планом эксперимента называется совокупность

$$\xi_n^q = \begin{Bmatrix} x^1 & \dots & x^q \\ n_1 & \dots & n_q \end{Bmatrix}, \qquad (4)$$

где $x^1,...,x^q$ – опорные точки плана (обязательно различные), n_i – число объектов (индивидуумов), исследуемых при значении вектора ковариат x^i, $i=\overline{1,q}$, $q \le n$, $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$. Таким образом, все объекты выборки делятся на q групп, соответствующих различным значениям вектора ковариат (опорным точкам плана). Часто для удобства значения ковариат в плане эксперимента линейным преобразованием приводят к отрезку $[0,1]$.

В зависимости от условий проведения эксперимента и способа регистрации отказов выборки могут содержать полные, интервальные, цензурированные и/или усеченные наблюдения.

Пусть T_x – неотрицательная случайная величина, определяющая время (продолжительность) безотказной работы, которое зависит от вектора объясняющих переменных (ковариат). Нелинейную регрессионную модель зависимости времени безотказной работы от объясняющих переменных в общем виде можно записать следующим образом:

$$T_x = H(x;\varepsilon), \tag{5}$$

где $H(\cdot)$ – неотрицательная функция, ε – случайная ошибка. В случае полной выборки отказов вида

$$\mathbf{Z}_n = \left\{ \left(T_1, x^{(1)}\right), \left(T_2, x^{(2)}\right), ..., \left(T_n, x^{(n)}\right) \right\}, \tag{6}$$

где T_i – время отказа i-го объекта и $x^{(i)}$ – значение вектора ковариат, соответствующее одной из опорных точек плана, при котором наблюдался i-й объект, $i=\overline{1,n}$, модель (5) можно записать в виде:

$$T_i = H\left(x^{(i)};\varepsilon_i\right),\ i=\overline{1,n}.$$

Сформулируем основные предположения относительно данной модели.

Предположение 1. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Предположение 2. Случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ в положительной области имеют распределение $F_0(t)$ с конечной дисперсией, которое совпадает с законом распределения случайной величины T_x при нулевых значениях объясняющих переменных: $F_{x=\bar{0}}(t) = F_0(t)$. Функция $F_0(t)$ называется базовой функцией распределения.

Предположение 3. Уравнение $T_i = H\left(x^{(i)};\varepsilon_i\right)$ имеет единственное решение относительно ε_i, $i=\overline{1,n}$.

В теории надежности объектом моделирования является не столько время безотказной работы, сколько вероятность безотказной работы за наработку t, т.е. функция надежности $S_x(t)$. Поэтому регрессионную модель (5) принято записывать через функцию надежности

$$S_x(t) = g\left(S_0(t);x\right), \tag{7}$$

или через кумулятивную функцию риска

$$\Lambda_x(t) = g_1\left(\Lambda_0(t); x\right),$$

где $g_1\left(y;x\right) = g\left(e^{-y};x\right)$. Оператор $g\left(\cdot\right):[0,1] \to [0,1]$ определяет изменение базовой функции надежности для различных значений объясняющих переменных.

Для построения параметрических моделей привлекается априорная информация, как о виде регрессионной функции, так и о виде распределения отказов. В этом случае базовая функция надежности $S_0\left(t\right)$ соответствует некоторому параметрическому семейству распределений $F_0\left(t;\theta\right)$. К законам распределения, наиболее часто используемым для задания базовой функции надежности $S_0\left(t;\theta\right)$ в задачах анализа данных типа времени жизни, относятся такие распределения как экспоненциальное, Вейбулла, логнормальное, гамма и другие более сложные параметрические модели законов.

Простейшим примером параметрической модели вида (5) является ***модель ускоренных испытаний***:

$$T_x = r\left(x;\beta\right) \cdot \varepsilon,$$

где случайная величина ε имеет распределение $F_0\left(t;\theta\right)$. Данную модель можно переписать в виде вероятностной модели надежности (7) следующим образом:

$$S_x(t;\beta,\theta) = P\left\{T_x \geq t\right\} = P\left\{r\left(x;\beta\right) \cdot \varepsilon \geq t\right\} = S_0\left(\frac{t}{r\left(x;\beta\right)};\theta\right), \tag{8}$$

где $r\left(x;\beta\right)$ – положительная функция от воздействий, которая обычно задается выражением

$$r\left(x;\beta\right) = \exp\left(\beta_1\varphi_1\left(x\right) + \ldots + \beta_m\varphi_m\left(x\right)\right), \tag{9}$$

$\varphi_i\left(x\right)$ – некоторые функции от компонентов вектора ковариат (регрессоры), $i = \overline{1,m}$.

Параметрическая ***модель пропорциональных интенсивностей Кокса*** определяется в терминах кумулятивной функции риска следующим образом:

$$\Lambda_x\left(t;\beta,\theta\right) = \exp\left(\beta^T x\right) \cdot \Lambda_0\left(t;\theta\right), \tag{10}$$

где $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\right)^T$, $\Lambda_0\left(t;\theta\right)$ – базовая кумулятивная функция риска. Несмотря на широкую популярность данной модели, обусловленную, в том числе, наличием возможности её построения в известных статистических пакетах, таких как SPSS и Statistica, применение такой модели возможно только при выполнении предположения о пропорциональности интенсивностей:

$$\frac{\lambda_{x=a}(t)}{\lambda_{x=b}(t)} = \frac{\exp\left(\beta^T a\right)}{\exp\left(\beta^T b\right)} = const\,.$$

В случае базового распределения Вейбулла модель Кокса совпадает с моделью ускоренных испытаний.

Достаточно подробный обзор различных вероятностных моделей надежности можно найти в книге Багдонавичуса и Никулина[1].

Неизвестные параметры модели могут быть оценены, например, методом максимального правдоподобия на основе данных, полученных в результате эксперимента. После оценивания неизвестных параметров важнейшим этапом построения параметрической регрессионной модели надежности является проверка ее адекватности. Как правило, проверка адекватности регрессионной модели осуществляется на основе анализа выборки остатков.

Обозначим через $h(x;\eta;T_x)$ единственное (согласно предположению 3) решение уравнения (5) относительно случайной величины ε. Тогда, согласно общему определению остатков, введенному Коксом и Снеллом, остатки для параметрической регрессионной модели можно записать в следующем виде:

$$e_i = h\left(x^{(i)};\hat{\beta};T_i\right),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

где $\hat{\beta}$ – оценка максимального правдоподобия вектора параметров модели.

В частности, остатки для параметрической модели ускоренных испытаний (8), построенной по полной выборке вида (6), имеют вид:

$$e_i = \frac{T_i}{r\left(x^{(i)};\hat{\beta}\right)},\ i=\overline{1,n}.$$

В задачах анализа надежности и выживаемости регрессионные модели обычно записываются в виде функции надежности (7) или соответствующей кумулятивной функции риска. В этом случае параметрическая регрессионная модель записывается следующим образом:

$$S_x(t;\beta,\theta) = g\left(S_0(t;\theta);x;\beta\right), \tag{12}$$

где β – вектор регрессионных параметров модели, θ – вектор параметров базовой функции распределения. Тогда остатки для параметрической регрессионной модели по полной выборке с ковариатами (6) принимают вид:

$$e_i = S_0^{-1}\left(S_{x^{(i)}}\left(T_i;\hat{\beta},\hat{\theta}\right)\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{13}$$

где $S_0^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к базовой функции надежности, $\hat{\beta}$ и $\hat{\theta}$ – оценки максимального правдоподобия.

Если параметрическая регрессионная модель (12) адекватно описывает распределение исследуемой случайной величины T_x в зависимости от значений вектора ковариат, то выборка остатков $e_1,e_2,...,e_n$ должна подчиняться базовому закону распределения с параметром $\theta=\hat{\theta}$.

Таким образом, задачу проверки адекватности параметрической регрессионной модели можно свести к задаче проверки ***сложной*** гипотезы о принадлежности выборки остатков базовому закону распределения:

$$H_0:\ F(t)\in\left\{F_0(t;\theta),\ \theta\in\Theta\right\}, \tag{14}$$

которая может быть решена с использованием одного из критериев согласия.

[1] Bagdonavičius, V. Accelerated life models: modeling and statistical analysis / V. Bagdonavičius, M. Nikulin. – Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2002. – 360 p.

При проверке сложных гипотез условные распределения статистик критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга зависят от ряда факторов: от метода оценивания параметров, от типа и числа оцениваемых параметров, а в случае таких законов как гамма и бета-распределения, обобщенного распределения Вейбулла, обратного гауссовского закона – от конкретных значений параметров формы [3]. Кроме того, в случае проверки сложной гипотезы (14) по выборкам остатков проверяемой параметрической регрессионной модели на распределения статистик критериев согласия, в общем случае, будут оказывать влияние: вид регрессионной модели, размерность вектора ковариат, а также план эксперимента.

Вследствие этого актуальной задачей оказывается исследование распределений статистик и мощности критериев согласия, применяемых для анализа выборок остатков, в том числе в зависимости от указанных выше дополнительных факторов, а также от вида анализируемых выборок и их характеристик (от числа интервалов группирования, от типа и степени цензурирования, от степени усечения и процента усеченных наблюдений, от выбора моментов тестирования для выборок текущих состояний).

Во второй главе представлены результаты исследования свойств ОМП параметров законов распределения вероятностей при ограниченных объёмах выборок. Точность оценивания связывается с потерями информации Фишера, вызванными формой регистрации наблюдений, в частности цензурированием.

В параграфе 2.1 исследуются статистические свойства ОМП по ***цензурированным справа выборкам*** вида

$$\mathbf{X}_n = \left\{ \left(X_1, \delta_1 \right), \left(X_2, \delta_2 \right), \ldots, \left(X_n, \delta_n \right) \right\}, \tag{15}$$

где $X_i = \min\left(T_i, C_i\right)$ – значение наблюдения, T_i – момент наступления отказа, C_i – момент цензурирования (момент завершения наблюдения за i-м объектом), индикатор события δ_i содержит информацию о причине прекращения наблюдения, $i = \overline{1,n}$. Если в ходе эксперимента было зафиксировано время отказа, то $X_i = T_i$, $\delta_i = 1$, и данное наблюдение называется полным. Если же нам неизвестно T_i по причине окончания наблюдения в момент $C_i \le T_i$, то $X_i = C_i$, $\delta_i = 0$, и наблюдение называется цензурированным справа. Цензурированные справа выборки, встречающиеся на практике, можно разделить на три основных типа и их комбинации.

Если время эксперимента ограничено, то есть наблюдение за объектами ведется до заранее определенного момента времени c, тогда $\forall \delta_i = 0 : C_i = c$, и полученная в результате выборка называется цензурированной I типа.

Если эксперимент продолжается до наступления определенного количества отказов r, и наблюдение за остальными объектами прекращается в момент наступления r-го отказа, то полученная в результате выборка наблюдений называется цензурированной II типа, и $\forall \delta_i = 0 : C_i = T_{(r)}$, где $T_{(r)}$ – время наступления последнего отказа.

Возможны ситуации, в которых цензурирование происходит в один момент времени – однократное цензурирование, или в различные моменты времени – многократное цензурирование. В случае многократного цензурирования моменты цензурирования C_i могут быть зафиксированы, например, когда при тестировании изделий в определенные моменты времени из исследования выводится по несколько объектов.

Если C_i – случайная величина с некоторой функцией распределения $F^C(t)$, то выборка наблюдений (15) называется цензурированной III типа или случайно цензурированной. В настоящей работе предполагается, что параметры закона распределения $F^C(t)$ не зависят от функции распределения $F(t)$ значений T_i.

Степенью цензурирования выборки будем называть процент цензурированных наблюдений относительно полного объема выборки. Необходимо отметить, что в случае I и III типов цензурирования, при которых задаются соответственно момент цензурирования c и распределение $F^C(t)$, степень цензурирования оказывается случайной величиной.

Наличие цензурированных наблюдений в выборке оказывает существенное влияние не только на дисперсию ОМП и их смещение, но и на форму закона распределения оценок. ОМП параметров распределений по цензурированным выборкам являются асимптотически нормальными, однако при ограниченных объемах выборок и высокой степени цензурирования распределение ОМП может существенно отличаться от нормального распределения. В качестве примера на рис. 1 представлены функции плотности ОМП параметра масштаба экспоненциального распределения по цензурированным II типа выборкам объема $n=100$ в зависимости от степени цензурирования. Как можно видеть, при степени цензурирования выше 50% распределение ОМП оказывается асимметричным и с ростом степени цензурирования асимметрия усиливается.

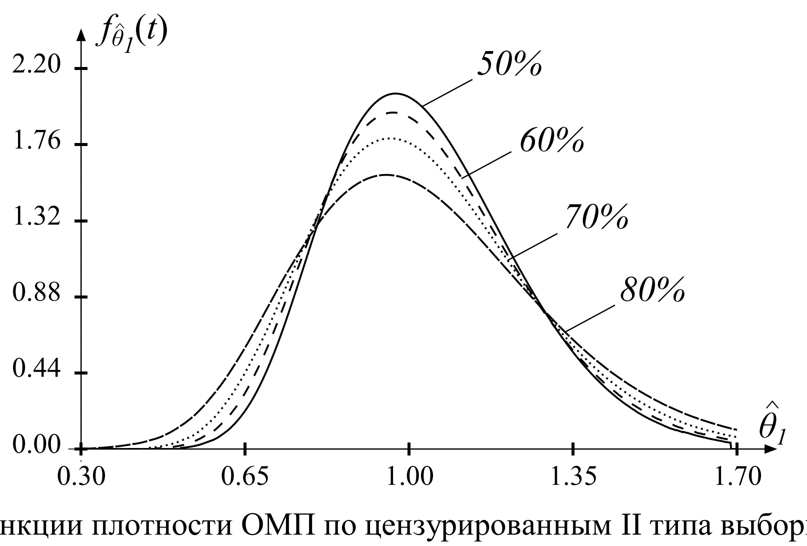


Рис. 1. Оценки функции плотности ОМП по цензурированным II типа выборкам при $n=100$

Показано, что на свойства ОМП при ограниченных объемах выборок существенное влияние оказывают тип и степень цензурирования, а при III типе цензурирования также вид закона распределения моментов цензурирования. При случайном цензурировании и таком распределении $F^C(t)$, когда моменты цензурирования в вариационном ряду оказываются расположенными примерно равномерно, дисперсия и смещение ОМП оказываются наименьшими по сравнению с другими типами цензурирования.

В параграфе 2.2 исследуются статистические свойства ОМП параметров распределений по ***выборкам усеченных слева наблюдений***. Обозначим через $T_1, T_2, ..., T_n$ полную выборку времен жизни из распределения $F(t;\theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^s$ – вектор параметров размерности s. Если условия проведения эксперимента таковы, что наблюдению доступны только те отказы, для которых время жизни больше некоторой наперед заданной величины D, называемой временем усечения, то в результате получаем выборку случайных величин $\left(T^{(1)},D\right),\left(T^{(2)},D\right),...,\left(T^{(M)},D\right)$ из усеченного слева распределения $F_{LT}\left(t;\theta\right)$, объем которой представляет собой случайную величину M из биномиального распределения $Bi\left(n,1-F(D)\right)$.

Обозначим вероятность попадания в область усечения через $d = F(D)$, и будем называть данную величину *степенью усечения*.

Функция плотности распределения усеченной слева случайной величины $\left(T^{(1)},D\right)$ определяется соотношением:

$$f_{LT}(t;\theta) = \frac{f(t;\theta)}{1-F(D;\theta)},\ t > D, \tag{16}$$

где D – время усечения, $F(t;\theta)$ – функция распределения времен отказов.

Тогда информация Фишера о параметре θ, содержащаяся в выборке $\left(T^{(1)},D\right),\left(T^{(2)},D\right),...,\left(T^{(M)},D\right)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{LT}(\theta) &= \sum_{m=0}^{n}\left(P\left\{M=m\right\}\cdot m\cdot i_{LT}\left(\theta\,|\,M=1\right)\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{n}\left(C_n^m(1-d)^m d^{n-m}\cdot m\cdot i_{LT}\left(\theta\,|\,M=1\right)\right) = n(1-d)\cdot i_{LT}\left(\theta\,|\,M=1\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где $i_{LT}\left(\theta|M=1\right)$ – информация Фишера о параметре θ в усеченном наблюдении:

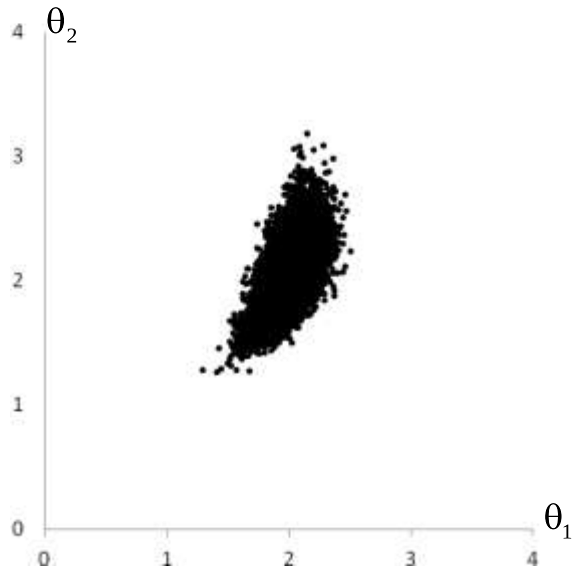
$$i_{LT}\left(\theta\,|\,M=1\right) = \int_D^\infty \left(\frac{\partial \ln f_{LT}(t;\theta)}{\partial\theta}\right)^T \frac{\partial \ln f_{LT}(t;\theta)}{\partial\theta} f_{LT}(t;\theta)dt. \tag{18}$$

Поскольку для оценивания векторного параметра $\theta = \left(\theta_1,...,\theta_s\right)^T$ требуется как минимум s наблюдений, то выражение (17) примет вид:

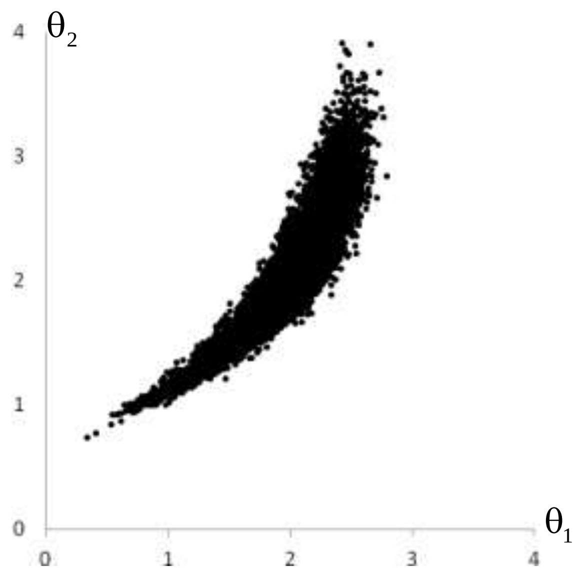
$$I_{LT}(\theta)=\frac{n(1-d)\cdot i_{LT}\left(\theta\,|\,M=1\right)}{1-\sum\limits_{m=0}^{s-1}C_n^m(1-d)^m d^{n-m}}. \qquad (19)$$

Понятно, что при больших объемах выборок величиной $\sum\limits_{m=0}^{s-1}C_n^m(1-d)^m d^{n-m}$ в выражении (19) можно пренебречь.

Методами статистического моделирования показано, что на свойства ОМП при ограниченных объемах выборок существенное влияние могут оказывать степень усечения и процент наблюдений в выборке, принадлежащих усеченному распределению. С ростом степени усечения распределение ОМП существенно отклоняется от многомерного нормального закона (см. рис. 2).



(а) $d=0.1$



(б) $d=0.5$

Рис. 2. Диаграммы рассеяния ОМП параметров масштаба и формы распределения Вейбулла по выборкам объема $n=100$,
100% наблюдений из усеченного распределения Вейбулла

В параграфе 2.3 исследуются свойства ОМП параметров распределений по ***выборкам текущих состояний***, когда в результате испытаний на надежность устройств одноразового срабатывания в некоторые детерминированные моменты времени вместо выборки отказов получают данные о состоянии устройств на моменты времени тестирования. В случае успешного срабатывания устройства мы имеем цензурированное справа наблюдение; если же устройство не сработало, значит, отказ произошел до момента времени тестирования, и мы получаем цензурированное слева наблюдение. Полученную выборку можно записать в виде

$$\mathbf{X}_n=\left\{(t_i,K_i,n_i),\ i=1,\dots,k\right\}, \qquad (20)$$

где K_i – количество устройств, оказавшихся в неработоспособном состоянии на момент времени тестирования t_i, что означает, что отказ произошел до момента времени t_i (цензурированные слева наблюдения), n_i количество объектов, тестируемых в момент времени t_i, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Дважды продифференцировав логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(\mathbf{X}_n;\theta) = \sum_{i=1}^{k}\Big(K_i \ln F(t_i;\theta) + (n_i - K_i)\ln\big(S(t_i;\theta)\big)\Big)$$

по θ, и вычислив математическое ожидание, получим выражение для информационного количества Фишера о параметре θ в выборке вида (20):

$$I_{CS}(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{F(t_i;\theta)\big(1 - F(t_i;\theta)\big)} \frac{\partial F(t_i;\theta)}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F(t_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^T . \qquad (21)$$

Известно, что чем больше количество информации Фишера, соответствующее параметру, тем выше точность его ОМП. Это означает, что на свойства ОМП напрямую влияет выбор моментов тестирования. Если до начала эксперимента на надежность устройств одноразового срабатывания имеется априорная информация о виде закона распределения отказов, то моменты времени тестирования и количество устройств, тестируемых в каждый момент времени, могут быть выбраны оптимальным образом в результате максимизации функционала от информационной матрицы Фишера $I_{CS}(\theta)$.

В данном разделе для ряда законов распределения отказов оптимальные моменты времени тестирования $t_1, t_2, ..., t_k$ устройств одноразового срабатывания в виде дискретного нормированного плана

$$\varepsilon_k = \begin{Bmatrix} t_1,\ t_2,\ ...,\ t_k \\ p_1, p_2, ..., p_k \end{Bmatrix},$$

где $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $p_i = n_i / n$, найдены в результате решения задачи:

$$\det I_{CS}(\theta) \to \max_{t_1,t_2,...,t_k;\ n_1,...,n_k} \qquad (22)$$

при

$$0 < t_1 < t_2 < ... < t_k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ n_i \in \mathbf{N},\ i = \overline{1,k}.$$

Оптимальные планы ε_k^*, соответствующие решению задачи (22), были получены при различных предположениях о виде закона распределения отказов: экспоненциальном, Вейбулла, логнормальном и гамма.

Об эффективности оценивания параметров по выборке текущих состояний (по сравнению с оцениванием по полной выборке) можно судить по величине отношения $I_{CS}(\theta) / I(\theta)$, где $I(\theta)$ – количество информации Фишера в полной выборке. В результате исследования точности ОМП по выборкам текущих состояний показано, что увеличение числа моментов тестирования либо не приводит к увеличению точности ОМП (в случае экспоненциального закона распределения), либо увеличение точности ОМП несущественно (в случае оценивания двух параметров распределений Вейбулла, логнормального и гамма).

Основные результаты, представленные в главе 2, опубликованы в [3, 18, 23, 25].

В третьей главе представлены результаты исследования распределений статистик и мощности критериев согласия типа χ^2 для полных и цензурированных выборок в зависимости от числа интервалов и способа группирования.

В случае проверки сложной гипотезы о виде распределения ***по полной выборке*** показано, что при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в случае использования оптимальных L-оценок по выборочным квантилям, а также при использовании оценок, вычисляемых минимизацией модифицированной статистики χ^2, расстояния Хеллингера и дивергенции Кульбака-Лейблера, распределения статистики критерия согласия χ^2 Пирсона подчиняются χ^2_{k-s-1}-распределениям. Это позволяет утверждать, что распределения статистики Пирсона подчиняются χ^2_{k-s-1}-распределениям при использовании любых асимптотически эффективных оценок по группированным данным, где s – количество оцененных параметров распределения.

Показано, что для критериев типа χ^2 существует оптимальное число интервалов группирования, при котором мощность данных критериев максимальна при близких конкурирующих гипотезах. Установлено, что мощность критерия χ^2 Пирсона может быть максимальной против близких конкурирующих гипотез, если выборку разбивать на минимально возможное число интервалов группирования.

В работе Ли и Досс[2] предложен обобщенный критерий χ^2 Пирсона-Фишера ***для цензурированных выборок***. Эмпирические вероятности (оценки) попадания наблюдения в интервал группирования вычисляются в соответствии с широко известной непараметрической оценкой Каплана-Мейера[3]. Неизвестные параметры распределения $F_0(t;\theta)$ оцениваются в результате минимизации статистики типа χ^2. Предельным распределением статистики обобщенного критерия типа χ^2 Пирсона-Фишера является χ^2-распределение с числом степеней свободы $k-s-1$, где s – размерность вектора параметров θ.

Важным преимуществом критерия χ^2 Никулина-Рао-Робсона[4] для цензурированных выборок является то, что неизвестные параметры распределения $F_0(t;\theta)$ оцениваются *методом максимального правдоподобия по исходной цензурированной выборке* и в качестве значения параметра θ

---

[2] Li, G. Generalized Pearson-Fisher chi-square goodness-of-fit tests with applications to models with life history data / G. Li, H. Doss // The Annals of Statistics. – 1993. – Vol. 21. – P. 772-797.
[3] Kaplan, E.L. Nonparametric estimation from incomplete observations / E.L. Kaplan, P. Meier // Journal of Am. Stat. Assoc. – 1958. – Vol. 53. – P. 457-481.
[4] Bagdonavičius, V. Nonparametric tests for censored data. John Wiley & Sons, Inc./ V. Bagdonavičius, J. Kruopis, M. Nikulin. - New York, 2010. – 233 p.

используется ОМП $\hat{\theta}$. Статистика $\tilde{Y}_n^2$ при справедливой гипотезе H_0 имеет в качестве предельного χ^2-распределение.

В параграфе 3.2 методами статистического моделирования показано, что в случае цензурированных выборок распределения статистики обобщенного критерия Пирсона-Фишера сходятся к соответствующему χ^2_{k-s-1}-распределению существенно быстрее, чем распределения статистики Никулина-Рао-Робсона – к своему предельному закону распределения. В случае III типа цензурирования эмпирические распределения статистик критериев ближе к предельным законам, чем при I и II типах цензурирования (при тех же объемах выборок и степенях цензурирования), при этом на скорость сходимости распределений статистик рассматриваемых критериев влияет также и распределение моментов цензурирования.

На рис. 3 в качестве примера представлены распределения статистики $\tilde{Y}_n^2$, полученные при различных объемах выборок в случае цензурирования II типа при степени цензурирования 50%. Наблюдаемая область разбивалась на равночастотные интервалы при $k=5$. Как можно видеть, с ростом объема выборки расстояние от действительных распределений статистики до предельного закона уменьшается, однако даже при $n=500$ разница всё еще остается существенной. Аналогичная картина наблюдается и при I типе цензурирования.

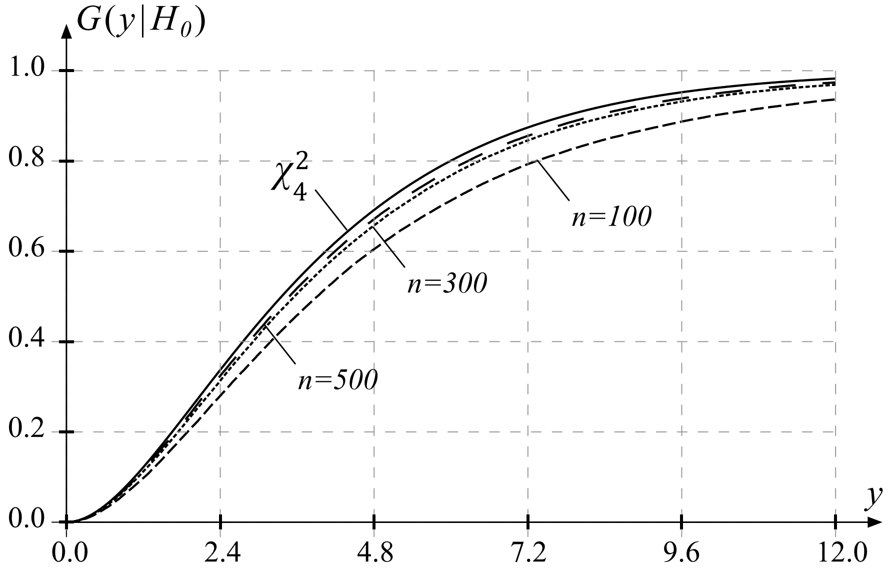


Рис. 3. Распределения статистики Никулина-Рао-Робсона, II тип цензурирования, 50%, $k=5$, РЧГ

В параграфе 3.3 исследуется мощность рассматриваемых критериев согласия типа χ^2. Показано, что мощность критерия Никулина-Рао-Робсона при близких альтернативах, как правило, выше мощности критерия χ^2 Пирсона. В ходе исследований анализировалась мощность критериев согласия типа χ^2, применяемых при цензурированных данных, в зависимости от количества интервалов и способа группирования. Показано, что мощность критерия согласия типа χ^2 Никулина-Рао-Робсона при равночастотном группировании и группировании Никулина для рассмотренной пары конкурирующих гипотез существенно выше мощности обобщенного критерия Пирсона-Фишера при тех же объемах выборок и степенях цензурирования.

Предложен алгоритм оптимального (относительно заданной пары конкурирующих гипотез) группирования цензурированной выборки, позволяющий значительно увеличить мощность критерия Никулина-Рао-Робсона и обобщенного критерия Пирсона-Фишера относительно этой пары конкурирующих законов распределения. Оптимальное разбиение может быть получено в результате решения следующей задачи:

$$n\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(p_j^1\left(\theta^1\right)-p_j^0\left(\theta^0\right)\right)^2}{p_j^0\left(\theta^0\right)}\to \max_{0<a_{(1)}<a_{(2)}<\cdots<a_{(k-1)}<\tau}, \qquad (23)$$

где $p_j^0\left(\theta^0\right)$ и $p_j^1\left(\theta^1\right)$ – вероятности попадания в j-й интервал при конкурирующих законах, соответствующих гипотезам H_0 и H_1, соответственно, $j=\overline{1,k}$. При проверке гипотез по случайно цензурированным выборкам нас интересуют вероятности попадания полных (нецензурированных) наблюдений в интервалы группирования, в то время как наблюдаемой случайной величиной является $X=\min\left(T,C\right)$, где $T\sim F(t)$ – время до отказа, $C\sim F^C(t)$ – время до момента цензурирования. Несложно показать, что при условии независимости случайных величин T и C функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t)=1-\left(1-F(t)\right)\left(1-F^C(t)\right).$$

В этом случае вероятности попадания полных наблюдений в интервалы группирования для функций распределения $F_0\left(t;\theta^0\right)$ и $F_1\left(t;\theta^1\right)$, соответствующих гипотезам H_0 и H_1, определяются выражениями:

$$p_j^0\left(\theta^0\right)=\int_{a_{(j-1)}}^{a_{(j)}}\left(1-F^C(u)\right)f_0\left(u;\theta^0\right)du,\ p_j^1\left(\theta^1\right)=\int_{a_{(j-1)}}^{a_{(j)}}\left(1-F^C(u)\right)f_1\left(u;\theta^1\right)du.$$

Основная сложность применения данного подхода связана с тем, что распределение моментов цензурирования $F^C(t)$, как правило, неизвестно. В связи с этим предложено использовать непараметрическую оценку Каплана-Мейера $\hat{F}_n^C(t)$, которая строится по инвертированной выборке

$$\mathbf{X}_n^{'}=\left\{\left(X_1,\delta_1^{'}\right),\left(X_2,\delta_2^{'}\right),\ldots,\left(X_n,\delta_n^{'}\right)\right\},$$

где $\delta_i^{'}=1-\delta_i$, $i=\overline{1,n}$, то есть полные наблюдения выборки $\mathbf{X}_n$ рассматриваются как цензурированные и наоборот.

Необходимо отметить, что задача условной максимизации (23) в общем случае является многоэкстремальной, поэтому в работе предлагается использовать начальное приближение, полученное методом случайного поиска.

Основные результаты, представленные в главе 3, опубликованы в [1, 4-9].

В четвертой главе методами статистического моделирования исследуются модифицированные критерии согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга ***для цензурированных данных***. Суть модификации заключается в том, что при вычислении статистик критериев вместо эмпирической функции распределения используются оценки Каплана-Мейера.

В параграфе 4.2 исследуются распределения статистик модифицированных критериев согласия для цензурированных выборок I и II типа. Для критерия типа Колмогорова показано, что в этом случае распределения статистики при проверке простых гипотез быстро сходятся к соответствующему предельному закону $K^C(y;c)$. Для различных степеней цензурирования найдены объемы выборок, начиная с которых отличием распределения статистики от предельного распределения $K^C(y;c)$ можно пренебречь.

В результате исследования методами компьютерного моделирования распределений статистик модифицированных критериев Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке простых гипотез построены таблицы верхних процентных точек критериев. Аналогичные таблицы построены для проверки сложных гипотез относительно законов Вейбулла и логарифмически нормального.

В параграфе 4.3 показано, что в случае III (случайного) типа цензурирования распределения статистик модифицированных критериев согласия зависят от объема выборки, типа и степени цензурирования, а также от распределения моментов цензурирования. Предложен алгоритм моделирования случайно цензурированных выборок, обеспечивающий возможность применения модифицированных критериев согласия типа Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова в условиях неизвестного распределения моментов цензурирования. Чтобы смоделировать случайно цензурированную выборку в соответствии с механизмом цензурирования исходной (эталонной) выборки необходимо:

1) методом обратной функции смоделировать полную выборку объемом n в соответствии с распределением, соответствующим проверяемой нулевой гипотезе: $T_i = F_0^{-1}(\zeta_i;\theta)$, где ζ_i – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0,1]$, $i = 1,2,...,n$;
2) инвертировать исходную цензурированную выборку, изменив значения индикаторов цензурирования δ_i на $1-\delta_i$;
3) построить оценку Каплана-Мейера функции распределения $\hat{F}_n^C(t)$ по инвертированной выборке;

4) смоделировать выборку, равномерно распределенную на $\left[0,1\right]$: $\xi_i \sim \text{Uniform}\left(0,1\right)$, и вычислить значения C_i, $i = 1,2,...,n$:

a. если $\xi_i < \hat{F}_n^C\left(c_1\right)$, то $C_i = \dfrac{\xi_i \cdot c_1}{\hat{F}_n^C\left(c_1\right)}$,

b. если $\xi_i \in \left(\hat{F}_n^C\left(c_j\right), \hat{F}_n^C\left(c_{j+1}\right)\right]$, то

$$C_i = c_j + \frac{\left(\xi_i - \hat{F}_n^C\left(c_j\right)\right)\cdot\left(c_{j+1} - c_j\right)}{\left(\hat{F}_n^C\left(c_{j+1}\right) - \hat{F}_n^C\left(c_j\right)\right)}, \quad j = 1,2,...,r,$$

c. если $\xi_i > \hat{F}_n^C\left(c_r\right)$, то $C_i = c_r + c_r\left(\xi_i - \hat{F}_n^C\left(c_r\right)\right)$,

где $c_1, ..., c_r$ – упорядоченные по возрастанию различные моменты цензурирования в исходной выборке, r – количество различных моментов цензурирования в исходной выборке;

5) $X_i = \min\left(T_i, C_i\right)$, $\delta_i = 1\left\{T_i \le C_i\right\}$, $i = 1,2,...,n$.

Использование предложенного алгоритма моделирования случайно цензурированных выборок делает возможным моделирование распределений статистик модифицированных критериев согласия по цензурированным данным.

В параграфе 4.4 предлагается методика проверки простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным данным с использованием классических критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, базирующаяся на преобразовании исходной цензурированной выборки в псевдополную, в соответствии с которой для каждого цензурированного наблюдения ($X_i = C_i$, $\delta_i = 0$) методом обратной функции моделируется значение $\hat{T}_i = F_0^{-1}(\xi_i, \theta)$, где $\xi_i \sim \text{Uniform}\left(F_0(C_i;\theta), 1\right)$. Соответствующие цензурированные наблюдения в выборке заменяются на смоделированные. Таким образом, получаем преобразованную псевдополную выборку $\left(\hat{X}_1, \hat{\delta}_1\right), \left(\hat{X}_2, \hat{\delta}_2\right), ..., \left(\hat{X}_n, \hat{\delta}_n\right)$, $\forall i : \hat{\delta}_i = 1$, в которой

$$\hat{X}_i = \begin{cases} X_i = T_i, & \text{если } \delta_i = 1; \\ \hat{T}_i, & \text{если } \delta_i = 0. \end{cases}$$

Показано, что в случае проверки простых гипотез при любых степенях и типах цензурирования для вычисления достигнутого уровня значимости можно использовать соответствующие предельные распределения статистик Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для полных данных (распределение Колмогорова, $a1(y)$ и $a2(y)$, соответственно). В то же время при проверке сложных гипотез использовать для этого аппроксимации предельных распределений статистик, полученных для полных выборок, корректно лишь при небольших степенях цензурирования (менее 20%).

В параграфе 4.5 представлен сравнительный анализ мощности критериев согласия, применяемых для цензурированных выборок. Показано, что при проверке простых гипотез классические критерии по псевдополным выборкам не уступают по мощности модифицированным критериям. При проверке сложных гипотез потери в мощности классических критериев по псевдополным выборкам по сравнению с модифицированными критериями незначительны. Для большинства рассмотренных случаев наиболее предпочтительным по мощности оказался критерий типа Андерсона-Дарлинга.

В результате сравнительного анализа мощности критериев типа χ^2 и непараметрических критериев согласия для цензурированных выборок можно заключить, что критерии типа χ^2 способны составить серьезную конкуренцию непараметрическим критериям только в случае использования оптимальных интервалов группирования, получаемых для конкретной пары конкурирующих гипотез.

Основные результаты, представленные в главе 4, опубликованы в [12, 16, 18, 28].

Пятая глава диссертации посвящена вопросам проверки гипотезы о виде распределения по выборкам усеченных слева наблюдений и выборкам текущих состояний.

В параграфе 5.1 сформулирована методика проверки простых и сложных гипотез о виде распределения по ***выборкам усеченных слева наблюдений*** вида

$$\mathbf{X}_n = \{(T_1, D_1), (T_2, D_2), ..., (T_n, D_n)\}, \tag{24}$$

где n – объем выборки, T_i – время отказа i-го объекта, D_i – время усечения, $i = \overline{1, n}$. В такой выборке содержится смесь наблюдений с функцией распределения $F(t)$ и наблюдений, принадлежащих усеченным слева законам того же вида, но с различными моментами усечения D_i. Такие случайные величины X_i подчиняются усеченным распределениям

$$F_{tr}(t) = \frac{F(t) - F(D_i)}{1 - F(D_i)},\ i = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим следующее преобразование элементов выборки (24):

$$U_i = \frac{F(X_i) - F(D_i)}{1 - F(D_i)},\ i = \overline{1, n}.$$

Несложно показать, что в случае справедливости H_0 полученные случайные величины U_i, $i = \overline{1, n}$, образуют полную выборку, принадлежащую равномерному закону на интервале $[0,1]$.

Таким образом, задачу проверки гипотезы H_0 по усеченной слева выборке можно свести к задаче проверки гипотезы о принадлежности полной выборки $U_1, U_2, ..., U_n$ равномерному на $[0,1]$ закону. Для проверки равномерности можно использовать, например, широко известные классические критерии согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Необходимо отметить, что в случае проверки *простой гипотезы* о виде распределения, когда параметры закона распределения $F(t) = F_0(t;\theta)$ известны, предельными распределениями статистик Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при справедливости H_0 о равномерности U_i являются распределение Колмогорова, $a1(y)$ и $a2(y)$, соответственно.

Однако в случае проверки *сложной гипотезы* на распределения статистик критериев согласия (кроме типичных факторов, влияющих на распределения статистик при проверке сложных гипотез) существенное влияние могут оказывать возможные изменения свойств оценок параметров распределения $F_0(t;\theta)$. Как было показано в главе 2, на точность ОМП по выборкам усеченных слева наблюдений влияет степень усечения и процент наблюдений из усеченных распределений, содержащихся в выборке.

При исследовании распределений статистик критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при проверке сложных гипотез по выборкам усеченных слева наблюдений продемонстрировано влияние свойств ОМП параметров закона, соответствующего проверяемой гипотезе, на распределения статистик и мощность критериев согласия. Показано, что для рассмотренных в работе пар близких конкурирующих гипотез критерии типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга имеют бо́льшую мощность по сравнению с критерием типа Колмогорова.

Параграф 5.3 посвящен разработке критериев согласия для ***выборок текущих состояний*** вида (20). Рассматривается классический подход, основанный на том, что в качестве статистики соответствующего критерия берется расстояние между некоторой непараметрической оценкой функции распределения и $F_0(t;\theta)$. Для этого в работе предложен алгоритм построения непараметрической оценки функции распределения по выборке текущих состояний:

1. Вычислить начальные значения $\hat{F}_i = \dfrac{K_i}{n_i}$.
2. Если найденные значения $\hat{F}_1,...,\hat{F}_k$ удовлетворяют ограничениям $\hat{F}_1 \le \hat{F}_2 \le ... \le \hat{F}_k$, то решение найдено, иначе перейти на шаг 3.
3. Найти наименьший номер $i < k$, для которого $\hat{F}_i > \hat{F}_{i+1}$.
4. Пересчитать значения, удовлетворяющие неравенству $\hat{F}_i > \hat{F}_{i+1} \ge ... \ge \hat{F}_{i+m}$, следующим образом:
$$\hat{F}_i = ... = \hat{F}_{i+m} = \sum_{j=i}^{i+m} K_j \Big/ \sum_{j=i}^{i+m} n_j .$$
5. Повторять шаги 3 – 4 до тех пор, пока не выполнится ограничение $\hat{F}_1 \le \hat{F}_2 \le ... \le \hat{F}_k$.

Таким образом, непараметрическую оценку неизвестной функции распределения $F(t)$ по выборке текущих состояний (20) можно записать следующим образом:

$$\hat{F}(t)=\begin{cases}0, & t<t_1,\\ \hat{F}_1, & t_1\le t<t_2,\\ \ldots \\ \hat{F}_k, & t_k\le t.\end{cases} \tag{25}$$

С использованием методов статистического моделирования получены оценки скорости сходимости непараметрической оценки к истинной функции распределения отказов при различном числе моментов времени тестирования устройств одноразового срабатывания.

Для анализа выборок текущих состояний предложены новые критерии согласия, основанные на расстоянии между непараметрической оценкой (25) и функцией распределения $F_0(t;\theta)$, соответствующей нулевой гипотезе, в частности, критерий типа Крамера-Мизеса-Смирнова со статистикой

$$\begin{aligned}S_{\omega}^{CS}=n\omega^2=\frac{n}{3}\cdot F_0\left(t_1;\theta\right)+n\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\Big[\hat{F}^2\left(t_j\right)\left(F_0(t_{j+1};\theta)-F_0(t_j;\theta)\right)-\\ -\hat{F}\left(t_j\right)\left(F_0^2\left(t_{j+1};\theta\right)-F_0^2\left(t_j;\theta\right)\right)+\frac{1}{3}\left(F_0^3\left(t_{j+1};\theta\right)-F_0^3\left(t_j;\theta\right)\right)\Big],\end{aligned} \tag{26}$$

критерий типа χ^2 со статистикой вида

$$Z_n^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_i-u_i)^2}{u_i}, \tag{27}$$

где $v_i=n_i\hat{F}(t_i)$ – эмпирическое число отказов к моменту времени t_i, и $u_i=n_iF_0(t_i;\theta)$ – ожидаемое число отказов к моменту времени t_i в соответствии с проверяемой гипотезой, $i=\overline{1,k}$, и критерий типа Уайта, статистика которого имеет вид:

$$S_W=\sqrt{n}\,\frac{\left|\det A_n\left(\hat{\theta}\right)-\det B_n\left(\hat{\theta}\right)\right|}{\det B_n\left(\hat{\theta}\right)}, \tag{28}$$

где $\hat{\theta}$ – ОМП параметра распределения $F_0(t;\theta)$,

$$A_n\left(\hat{\theta}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[K_i\,\frac{\partial^2\ln F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)}{\partial\theta^2}+\left(n_i-K_i\right)\frac{\partial^2\ln\left(1-F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)\right)}{\partial\theta^2}\right],$$

$$B_n\left(\hat{\theta}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}K_i\,\frac{\partial\ln F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\ln F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)}{\partial\theta}\right)^T+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i-K_i\right)\frac{\partial\ln\left(1-F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)\right)}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\ln\left(1-F_0\left(t_i;\hat{\theta}\right)\right)}{\partial\theta}\right)^T.$$

Гипотеза о виде распределения отвергается при больших значениях статистик (26)–(28). Применение критериев предполагает использование для формирования вывода о результатах проверки распределений статистик $G_N\left(y \mid H_0\right)$, получаемых методами статистического моделирования, в том числе в ходе проводимого анализа (в интерактивном режиме).

В результате исследования мощности критериев согласия (предложенных для анализа выборок текущих состояний) относительно различных пар конкурирующих гипотез показано, что наиболее предпочтительными являются критерии согласия типа χ^2 и типа Крамера-Мизеса-Смирнова.

Основные результаты, представленные в главе 5, опубликованы в [23, 25, 26].

В шестой главе исследуются распределения статистик и мощность критериев согласия, применяемых к выборкам остатков для проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели надежности:

$$H_0 : S_x(t) = g\left(S_0(t;\theta); x;\beta\right), \tag{29}$$

где β – вектор регрессионных параметров и $S_0(t;\theta)$ – базовая функция надежности, соответствующая параметрическому семейству распределений $F_0(t;\theta)$, $\theta \in \Theta$.

Предлагаются алгоритмы имитационного моделирования, обеспечивающие нахождение распределений статистик применяемых критериев, соответствующих справедливости проверяемой гипотезы, в случае выборок, содержащих полные, цензурированные справа, усеченные слева и интервальные наблюдения. Предложенные алгоритмы могут быть реализованы в интерактивном режиме, обеспечивая оценку достигнутого уровня значимости по найденным распределениям в ходе проводимого статистического анализа.

В частности, в параграфе 6.2 предлагаются критерии согласия для проверки гипотезы о виде модели по ***группированной выборке с ковариатами***, которую получают, если область возможных значений случайной величины для каждого значения вектора ковариат x^i, $i=\overline{1,q}$, разбита на k непересекающихся интервалов $I_1^i, I_2^i, \ldots, I_k^i$, определенных для каждой группы $i=\overline{1,q}$ граничными точками:

$$0 = a_{(0)}^i < a_{(1)}^i < \ldots < a_{(k-1)}^i < a_{(k)}^i = +\infty,$$

и зафиксированы n_{ij} отказов объектов, попавших в интервал I_{ij}, $j=\overline{1,k}$, и наблюдавшихся при значении вектора ковариат x^i, $i=\overline{1,q}$. Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k} n_{ij}$. Группированную выборку с ковариатами можно представить следующим образом:

$$\mathbf{Z}_n = \left\{\left(n_{ij}, x^i, I_{ij}\right),\ i=\overline{1,q},\quad j=\overline{1,k}\right\}. \tag{30}$$

В результате проведенных исследований показано, что в случае малого числа интервалов группирования $k=3$ и числа групп $q=2$ для проверки гипотезы о виде модели предпочтительно использовать критерий χ^2 Пирсона. При б*о*льшем числе интервалов k или точек плана эксперимента q рекомендуется использовать критерий согласия типа Колмогорова по выборке остатков. Если на основе группированной выборки с ковариатами сформировать выборку остатков, то получим уже интервальную выборку вида:

$$\mathbf{E}_n = \left\{ \underbrace{\left(L_{ij}, R_{ij}\right), \ldots, \left(L_{ij}, R_{ij}\right)}_{n_{ij} \text{ интервалов}}, i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, k \right\}, \qquad (31)$$

где $L_{ij} = S_0^{-1}\left(S_{x^i}\left(a^i_{(j-1)}; \hat{\eta}, \hat{\theta}\right)\right)$, $R_{ij} = S_0^{-1}\left(S_{x^i}\left(a^i_{(j)}; \hat{\eta}, \hat{\theta}\right)\right)$, $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, k}$.

Статистика типа Колмогорова для интервальной выборки имеет вид:

$$D_n = \sup_{0 < t < \tau_r} \left| \hat{F}(t) - F(t) \right|, \qquad (32)$$

где $\hat{F}(t)$ – непараметрическая оценка функции распределения, получаемая, например, с помощью алгоритма Тернбулла[5].

В параграфе 6.3 исследуются критерии согласия, применяемые к выборкам остатков для проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели по ***цензурированным справа выборкам усеченных слева наблюдений с ковариатами***, которые можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{Z}_n = \left\{ \left(X_1, D_1, \delta_1, x^{(1)}\right), \left(X_2, D_2, \delta_2, x^{(2)}\right), \ldots, \left(X_n, D_n, \delta_n, x^{(n)}\right) \right\}, \qquad (33)$$

где n – объем выборки, X_i – время до отказа или момента цензурирования i-го объекта, D_i – время усечения, δ_i – индикатор цензурирования, $x^{(i)}$ – значение вектора ковариат, при котором наблюдался i-й объект, $i = \overline{1, n}$.

Для проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели формируется выборка остатков

$$\mathbf{E}_n = \left\{ \left(X_1^0, D_1^0, \delta_1\right), \ldots, \left(X_n^0, D_n^0, \delta_n\right) \right\},$$

где $X_i^0 = S_0^{-1}\left(S_{x^{(i)}}\left(X_i; \hat{\eta}, \hat{\theta}\right)\right)$, $D_i^0 = S_0^{-1}\left(S_{x^{(i)}}\left(D_i; \hat{\eta}, \hat{\theta}\right)\right)$, которая представляет собой цензурированную справа выборку с усеченными слева наблюдениями.

Далее с использованием описанного в главе 5 подхода к проверке гипотезы о виде распределения по выборкам усеченных слева наблюдений и применением модифицированных критериев согласия для цензурированных выборок проверяется сложная гипотеза H_0 о принадлежности выборки остатков $\mathbf{E}_n$ базовому закону распределения $F_0(t; \theta)$.

Для проверки данной гипотезы выполняется следующее преобразование элементов выборки остатков $\mathbf{E}_n$:

---

[5] Turnbull, B.W. The empirical distribution function with arbitrarily grouped, censored, and truncated data / B.W. Turnbull // J. R. Statist. Soc. Ser. B. – 1976. – Vol. 38. – P. 290-295.

$$U_i = \frac{F_0\left(X_i^0\right) - F_0\left(D_i^0\right)}{1 - F_0\left(D_i^0\right)},\ i = \overline{1,n},$$

и формируется цензурированная выборка $(U_1,\delta_1),\ldots,(U_n,\delta_n)$, по которой вычисляется статистика одного из критериев согласия для цензурированных выборок, рассмотренных в главах 3 и 4 диссертации.

Исследована мощность критериев согласия, применяемых к выборкам остатков, при проверке сложных гипотез по цензурированным справа выборкам усеченных слева наблюдений. Если в случае данных без усечения, как правило, наибольшей мощностью среди рассматриваемых критериев обладает критерий типа Андерсона-Дарлинга, то в случае выборок усеченных наблюдений этот критерий уже уступает по мощности критериям типа Колмогорова и Крамера-Мизеса-Смирнова.

В параграфе 6.4 рассматривается эксперимент на надежность, в котором n устройств одноразового срабатывания тестируются в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $k \le n$. В момент времени t_i устройства тестируются при q_i различных значениях вектора ковариат: $x^{(i,1)}, x^{(i,2)}, \ldots, x^{(i,q_i)}$, $i = \overline{1,k}$. Таким образом, все n устройств можно разделить на $q = \sum_{i=1}^{k} q_i$ групп в соответствии с различными условиями проведения испытаний (различными моментами времени тестирования и значениями вектора объясняющих переменных).

Обозначим через n_{ij} количество устройств, тестируемых в i-й момент времени при значении вектора объясняющих переменных $x^{(i,j)}$, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i} n_{ij} = n$. Полученную в результате эксперимента ***выборку текущих состояний с ковариатами*** можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{Z}_n = \left\{(t_i, x^{(i,j)}, K_{ij}, n_{ij}),\ \ i = \overline{1,k},\ \ j = \overline{1,q_i}\right\}, \tag{34}$$

где K_{ij} – количество устройств, оказавшихся в неработоспособном состоянии на момент времени тестирования t_i (цензурированные слева наблюдения) при значении вектора нагрузок $x^{(i,j)} = \left(x_1^{(i,j)}, x_2^{(i,j)}, \ldots, x_m^{(i,j)}\right)^T$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,q_i}$.

В случае проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели по выборкам текущих состояний показано, что для ряда пар конкурирующих гипотез наибольшую мощность демонстрирует критерий типа Уайта, в то время как для других пар гипотез более мощными оказываются критерии типа Колмогорова и Крамера-Мизеса-Смирнова. Критерий типа хи-квадрат во всех рассмотренных ситуациях уступил по мощности вышеупомянутым критериям.

Параграф 6.5 посвящен разработке методики проверки гипотезы о виде ***деградационной гамма-модели***. Если речь идет о высоконадежных изделиях, то данных об отказах таких изделий может быть недостаточно для оценки функции надежности, поскольку в период проведения эксперимента наступление отказов наблюдается крайне редко. Один из возможных способов получить дополнительную информацию о надежности изделий заключается в проведении ускоренных испытаний, когда изделия подвергаются повышенным нагрузкам, в результате чего отказы наступают раньше. Другой способ состоит в измерении значений некоторого показателя, характеризующего процесс старения (деградации) изделия. Оба подхода можно совместить, наблюдая процессы деградации и наступление отказов изделий, эксплуатирующихся при повышенных нагрузках.

Одной из наиболее популярных деградационных моделей является гамма-модель, в основе которой лежит предположение о принадлежности независимых приращений деградационного показателя гамма-распределению с функцией плотности

$$f_{Gamma}\left(t;\sigma,\Delta\nu(t)\right)=\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\Delta\nu(t)-1}\frac{\mathrm{e}^{-t/\sigma}}{\sigma\cdot\Gamma\left(\Delta\nu(t)\right)},$$

где $\Delta\nu(t)=\nu(t+\Delta t)-\nu(t)$ – параметр формы и $\sigma>0$ – параметр масштаба.

Пусть деградационный процесс наблюдается при некоторой постоянной во времени нагрузке (ковариате) x. Влияние ковариаты x (в общем случае векторной) на изменение показателя деградации будем учитывать так же, как это делается в модели ускоренных испытаний:

$$Z_x(t)=Z\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right),$$

где $r(x;\beta)$ – положительная функция от ковариат.

Обозначим условное математическое ожидание случайного процесса $Z_x(t)$ через

$$M\left(Z_x(t)\right)=m_x(t),$$

где $m_x(t)=\sigma\nu\left(\frac{t}{r(x;\beta)}\right)$ – положительная возрастающая функция. Будем называть ее функцией тренда показателя деградации. Несложно показать, что при выполнении сформулированных предположений случайный процесс $Z_x(t)$ в некоторый фиксированный момент времени $t=t_k$ представляет собой случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром масштаба σ и параметром формы, равным $\frac{m_x(t_k)}{\sigma}$. Время безотказной работы, которое зависит от ковариаты x, представляет собой величину

$$T_x=\sup\{t:Z_x(t)<\tilde{z}\},$$

где $\tilde{z}$ – критическое значение показателя деградации, при достижении которого фиксируется отказ объекта. Тогда функция надёжности для рассматриваемой деградационной гамма-модели принимает вид:

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = F_{Gamma}\left(\tilde{z}; \sigma, \frac{m_x(t;\beta,\gamma)}{\sigma}\right). \qquad (35)$$

Пусть для каждого из n случайно отобранных из генеральной совокупности объектов известны изменение показателя деградации во времени в виде случайного процесса $Z^i(t)$, а также соответствующая величина нагрузки (ковариаты) $x^{(i)}$, при которой эксплуатировался i-й объект, $i = \overline{1,n}$. Обозначим измерения показателя деградации для i-го объекта через

$$Z^i = \left\{(0, Z_0^i), (t_1^i, Z_1^i), \ldots, (t_{k_i}^i, Z_{k_i}^i)\right\},$$

где k_i – это число измерений деградационного показателя во времени. Без потери общности, будем считать, что начальное значение показателя старения $Z_0^i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим выборку приращений через

$$\mathbf{Z}_n = \left\{\left(\left\{X_j^1 = Z_j^1 - Z_{j-1}^1, j = \overline{1,k_1}\right\}, x^{(1)}\right), \ldots, \left(\left\{X_j^n = Z_j^n - Z_{j-1}^n, j = \overline{1,k_n}\right\}, x^{(n)}\right)\right\}. \quad (36)$$

Основной проблемой использования данной модели является отсутствие математического аппарата для проверки её адекватности, что является обязательным этапом построения вероятностных моделей.

Введём следующее преобразование приращений деградационного показателя:

$$U_j^i = F_{Gamma}\left(X_j^i; \hat{\sigma}, \hat{p}_j^i\right), \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,k_i}.$$

При справедливости гипотезы о виде деградационной гамма-модели:

$$U_j^i \sim \mathrm{Uniform}(0,1), \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,k_i}.$$

Таким образом, задача проверки гипотезы H_0 сводится к проверке гипотезы о равномерном распределении случайных величин U_j^i, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k_i}$. Для проверки данной гипотезы можно применять критерии согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

В диссертационной работе для проверки статистической гипотезы о виде деградационной гамма-модели надежности, учитывающей влияние ковариаты, предлагается подход, предусматривающий интерактивный режим исследования (методами статистического моделирования) распределений статистик применяемых критериев в ходе самой проверки этой гипотезы. Требуемое для вычисления достигнутого уровня значимости условное распределение $G(y \mid H_0)$ статистики критерия согласия реально может быть найдено только в результате интерактивного моделирования.

В результате исследований мощности рассматриваемых критериев показано, что предложенный метод позволяет проверять предположения как о виде распределения приращений, так и о виде функции тренда и функции от ковариат.

Основные результаты, представленные в главе 6, опубликованы в [2, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 25, 27].

В седьмой главе приведено краткое описание программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» (Life Time Statistics) [31-33], в которую включены разработанные автором алгоритмы моделирования распределений статистик совокупности критериев согласия, предназначенных для проверки гипотез о виде параметрических регрессионных моделей надежности и выживаемости по различным типам выборок (полным, группированным, цензурированным справа, содержащим усеченные слева наблюдения, текущих состояний).

Программная система «LiTiS» реализована на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2010 на платформе .NET Framework 4.0. Минимальные требования к операционной системе: Microsoft Windows XP/Vista/2003/7/8.

Основные функциональные возможности программной системы «LiTiS» включают в себя статистические методы анализа полных, группированных, цензурированных справа выборок, а также выборок усеченных слева наблюдений и выборок текущих состояний, а именно:

- построение непараметрических оценок (Каплана-Мейера для функции надежности, Нельсона-Аалена для кумулятивной функции риска, Берана для регрессионной модели надежности, а также ядерных оценок функций плотности и интенсивности);
- оценивание параметров более чем 30 законов распределения методом максимального правдоподобия;
- оценивание параметров регрессионных моделей ускоренных испытаний, пропорциональных интенсивностей и их обобщений методом максимального правдоподобия;
- идентификация базового закона распределения для параметрических регрессионных моделей с использованием критериев Акаике (AIC) и Шварца (BIC);
- проверка статистических гипотез о виде распределения с использованием критериев типа хи-квадрат, Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга;
- проверка гипотезы о незначимости регрессионных параметров моделей, а также построение доверительных интервалов с использованием критериев Вальда и отношения правдоподобия;
- проверка гипотезы об однородности распределений по цензурированным выборкам с использованием критериев Гехана, Кокса-Мантелла и логрангового;
- проверка статистических гипотез о виде параметрических регрессионных моделей на основе выборок остатков;
- построение деградационной гамма-модели с учетом объясняющих переменных;
- оптимальное планирование эксперимента на надежность на основе модели ускоренных испытаний с базовым распределением Вейбулла;
- моделирование распределений оценок параметров моделей и статистик критериев согласия и однородности методом Монте-Карло.

Представлены примеры применения предложенных алгоритмов и разработанного программного обеспечения для построения вероятностных моделей надежности и выживаемости в реальных задачах анализа данных типа времени жизни.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В ходе работы над диссертацией получили дальнейшее развитие компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей, которые позволили существенно расширить возможности математического аппарата для решения задач анализа данных типа времени жизни. При этом наиболее ощутимый вклад связан с применением критериев согласия в задачах проверки статистических гипотез при анализе выборок цензурированных, интервальных, усеченных наблюдений.

В соответствии с поставленными целями получены следующие основные результаты:

1. Методами статистического моделирования исследованы свойства ОМП параметров распределений по цензурированным справа выборкам и выборкам усеченных слева наблюдений. Показано, что при ограниченных объемах выборок распределения ОМП с ростом степени цензурирования и степени усечения существенно отклоняются от асимптотического многомерного нормального закона. Для ряда законов распределения наблюдаемых случайных величин вычислены потери информации Фишера, связанные с цензурированием справа или усечением слева.

2. Для ряда законов распределения, наиболее часто используемых в задачах теории надежности, получены оптимальные планы испытаний изделий одноразового срабатывания на надежность с позиции точности ОМП параметров распределений, получаемых по выборкам текущих состояний.

3. На основании результатов исследования распределений статистик и мощности критериев согласия типа χ^2 в ситуациях полных и цензурированных выборок сформулированы рекомендации по применению рассмотренных критериев при проверке простых и сложных гипотез.

4. Предложен метод, позволяющий при использовании критерия типа χ^2 для цензурированных выборок, разбивать область возможных значений случайной величины на интервалы таким образом, чтобы максимизировать мощность критерия относительно заданной пары конкурирующих гипотез. Показано, что использование оптимального группирования позволяет существенно увеличить мощность критериев согласия типа χ^2 Никулина-Рао-Робсона и обобщенного критерия Пирсона-Фишера относительно конкретной пары конкурирующих гипотез.

5. В результате исследования методами компьютерного моделирования распределений статистик модифицированных критериев Колмогорова,

Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова для цензурированных I и II типа выборок построены таблицы верхних процентных точек для проверки простых гипотез. Для случая проверки сложных гипотез аналогичные таблицы построены относительно законов Вейбулла, экспоненциального и логнормального.

6. Разработан алгоритм моделирования случайно цензурированных выборок, обеспечивающий возможность применения модифицированных критериев согласия типа Колмогорова, Андерсона-Дарлинга, Крамера-Мизеса-Смирнова в условиях неизвестного распределения моментов цензурирования.

7. Разработана методика проверки простых и сложных гипотез о виде распределения по цензурированным данным с использованием классических критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, базирующаяся на преобразовании исходной цензурированной выборки в псевдополную.

8. Проведен сравнительный анализ мощности критериев согласия, применяемых для цензурированных данных. Показано, что для большинства рассмотренных случаев проверки сложных гипотез наиболее предпочтительным по мощности является модифицированный критерий типа Андерсона-Дарлинга. Критерии типа χ^2 способны составить серьезную конкуренцию критерию типа Андерсона-Дарлинга только в случае использования оптимальных интервалов группирования, получаемых для конкретной пары конкурирующих гипотез.

9. Предложена методика проверки гипотез о виде распределения по выборкам усеченных слева наблюдений с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. Продемонстрировано влияние свойств ОМП параметров закона, соответствующего проверяемой гипотезе, на распределения статистик и мощность критериев согласия при проверке сложных гипотез.

10. Предложены новые статистические критерии согласия для проверки гипотез по выборкам текущих состояний. Применение критериев предполагает использование для формирования вывода о результатах проверки распределений статистик $G_N\left(y \mid H_0\right)$, получаемых методами статистического моделирования, в том числе в ходе проводимого анализа (в интерактивном режиме). В результате исследования мощности предложенных критериев относительно различных пар конкурирующих гипотез показано, что в качестве наиболее предпочтительных можно рекомендовать критерии согласия типа χ^2 и типа Крамера-Мизеса-Смирнова.

11. Разработана методика проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели надежности на основе выборок остатков. Предложены алгоритмы моделирования, обеспечивающие нахождение распределения статистики, соответствующего справедливости проверяемой гипотезы и необходимого для оценки достигнутого уровня значимости по применяемому

критерию. Предложенные алгоритмы могут быть реализованы в интерактивном режиме, обеспечивая оценку достигнутого уровня значимости в ходе проводимого статистического анализа.

12. Для проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели по группированным выборкам с ковариатами и анализа получающихся интервальных выборок остатков предложено применение критериев согласия. Показано, что для рассмотренных пар конкурирующих гипотез в случае минимального числа интервалов группирования и числа групп (количества различных значений вектора ковариат) наиболее предпочтительным оказывается критерий χ^2 Пирсона, в остальных случаях более предпочтительным по мощности оказывается критерий согласия типа Колмогорова на основе интервальной выборки остатков.

13. В результате исследования мощности критериев согласия, применяемых к выборкам остатков, при проверке сложных гипотез о виде параметрической регрессионной модели по цензурированным справа выборкам усеченных слева наблюдений показано следующее. В случае данных без усечения, как правило, наибольшей мощностью среди рассматриваемых обладает критерий типа Андерсона-Дарлинга. При наличии усеченных слева наблюдений он уже уступает в мощности критериям типа Колмогорова и Крамера-Мизеса-Смирнова.

14. В случае проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели по выборкам текущих состояний показано, что для ряда пар конкурирующих гипотез наибольшую мощность демонстрирует критерий типа Уайта, в то время как для других пар гипотез более мощными оказываются критерии типа Колмогорова и Крамера-Мизеса-Смирнова. Критерий типа хи-квадрат во всех рассмотренных ситуациях уступил по мощности упомянутым критериям.

15. Предложена методика проверки сложной гипотезы о виде деградационной гамма-модели с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. В результате исследований мощности рассматриваемых критериев показано, что предложенная методика позволяет проверять предположения как о виде распределения приращений, так и о виде функции тренда и функции от ковариат.

16. Под руководством и при участии автора разработана программная система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS», которая может использоваться в промышленности для обработки результатов испытаний на надежность и долговечность, а также в медицинских, научных и образовательных учреждениях.

Научные результаты, полученные в диссертации, и программная система «LiTiS» используются в научных исследованиях и учебном процессе.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии:

1. Chimitova, E. A comparative analysis of some chi-square goodness-of-fit tests for censored data / E. Chimitova, B. Lemeshko // In: Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis. In honor of M.S. Nikulin / Editors: Vincent Couallier, Léo Gerville-Réache, Catherine Huber-Carol, Nikolaos Limnios, Mounir Mesbah / ISTE – Wiley. 2013. – P. 281-296.

2. Lemeshko, B.Yu. Software system for simulation and research of probabilistic regularities and statistical data analysis in reliability and quality control / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, E.V. Chimitova, S.N. Postovalov, A.P. Rogozhnikov // In: Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability. Applications to Medicine, Finance, and Quality Control / Editors: V. Rykov, N. Balakrishnan, M. Nikulin / Series “Statistics for Industry and Technology”. Birkhäuser, Boston. 2011. – P. 417-432.

3. Лемешко, Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография. // Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с. (серия "Монографии НГТУ").

Издания из Перечня ВАК ведущих рецензируемых научных изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

4. Лемешко, Б.Ю. Максимизация мощности критериев типа хи-квадрат / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Доклады Сибирского отделения Академии наук высшей школы. – 2000. – № 2. – С. 53-61.

5. Лемешко, Б.Ю. О распределениях статистики и мощности критерия типа хи-квадрат Никулина / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. №3. – С. 52-58.

6. Лемешко, Б.Ю. Построение оптимальных L-оценок параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2001. – Т.4. № 2. – С. 166-183.

7. Лемешко, Б.Ю. Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа хи-квадрат / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Измерительная техника. – 2002. – № 6. – С. 5-11.

8. Березовский, Е.А. Обеспечение наибольшей мощности применяемых критериев типа / Е.А. Березовский, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Вестник СибГАУ. – 2002. – Вып. 3. – С. 78-87.

9. Лемешко, Б.Ю. О выборе числа интервалов в критериях согласия типа хи-квадрат / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2003. – № 1. – С. 61-67.

10. Лемешко, Б.Ю. Численное сравнение оценок максимального правдоподобия с одношаговыми и влияние точности оценивания на

распределения статистик критериев согласия / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69. № 5. – С.62-68.

11. Лемешко, Б.Ю. Оптимальные L-оценки параметров сдвига и масштаба распределений по выборочным квантилям / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2004. – Т. 70. №1. – С. 54-66.
12. Лемешко, Б.Ю. Проверка простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным выборкам / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова, Т.А. Плешкова // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 4(41). – С. 13-28.
13. Галанова, Н.С. Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний / Н.С. Галанова, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Автометрия. – 2012. – № 6. – С. 53-68.
14. Демин, В.А. Выбор оптимального параметра сглаживания для непараметрической оценки регрессионной модели надежности / В.А. Демин, Е.В. Чимитова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №1(22). – С. 59-65.
15. Balakrishnan, N. Testing goodness-of-fit of parametric AFT and PH models with residuals / N. Balakrishnan, E. Chimitova, N. Galanova, M. Vedernikova // Communications in Statistics - Simulation and Computation. – 2013. – Vol. 42. No. 6. – P.1352-1367.
16. Лемешко, Б.Ю. Модифицированные критерии согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для случайно цензурированных выборок. Ч.2 / Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова, М.А. Ведерникова // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 1(50). – С. 3-16.
17. Чимитова, Е.В. Непараметрические критерии согласия в задачах проверки адекватности моделей надежности по цензурированным данным / Е.В. Чимитова, М.А. Ведерникова, Н.С. Галанова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №4(25). – С. 115-124.
18. Лемешко, Б.Ю. Компьютерное моделирование и исследование вероятностных закономерностей / Б.Ю. Лемешко, А.А. Горбунова, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, А.П. Рогожников, Е.В. Чимитова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №1(22). – С. 74-85.
19. Чимитова, Е.В. Построение деградационной гамма-модели с учетом влияния объясняющих переменных / Е.В. Чимитова, Е.С. Четвертакова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 4. – С. 51-60.
20. Демин, В.А. Исследование метода выбора оптимального параметра сглаживания при непараметрическом оценивании регрессионных моделей надежности / В.А. Демин, Е.В. Чимитова, В.Ю. Щеколдин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 10-18.

21. Chimitova, E. A method for selection of the optimal bandwidth parameter for Beran's nonparametric estimator / E. Chimitova, V. Demin // Topics in statistical simulation: research papers from the 7th intern. workshop on statistical simulation. - New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2014. – P. 139-147. – (Book series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics; vol. 114).

22. Semenova, M. Models with cross-effect of survival functions in the analysis of patients with multiple myeloma / M. Semenova, E. Chimitova, O. Rukavitsyn, A. Bitukov // Topics in statistical simulation : research papers from the 7 intern. workshop on statistical simulation. - New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2014. – P. 457-463. – (Book series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics; vol. 114).

23. Чимитова, Е.В. Построение вероятностных моделей надежности по выборкам текущих состояний / Е.В. Чимитова // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2015. – Т. 16, № 1. – С. 143-152.

24. Семёнова, М.А. Критерии проверки гипотез о параметрах обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей при неизвестном распределении времен жизни / М.А. Семёнова, Е.В. Чимитова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – №2(31). – С. 41-52.

25. Чимитова, Е.В. Проверка адекватности параметрических регрессионных моделей надежности по усеченным слева и цензурированным справа данным / Е.В. Чимитова, М.А. Семёнова // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 1 (26). – С. 104-120.

26. Chimitova, E. Goodness-of-fit tests for one-shot device testing data / E.Chimitova, N.Balakrishnan // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X. - Singapore: World Scientific, 2015. – P. 124-131. – (Book series: Advances in Mathematics for Applied Sciences; vol. 86).

27. Semenova, M.A. Testing statistical hypotheses for generalized semiparametric proportional hazards models with cross-effect of survival functions / M.A. Semenova, E.V. Chimitova // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X. - Singapore: World Scientific, 2015. – P. 350-357. – (Book series: Advances in Mathematics for Applied Sciences; vol. 86).

28. Balakrishnan, N. An empirical analysis of some nonparametric goodness-of-fit tests for censored data / N. Balakrishnan, E. Chimitova, M. Vedernikova // Communications in Statistics. B: Simulation and Computation Communications in Statistics - Simulation and Computation. – 2015. – Vol. 44, iss. 4. – P. 1101-1115.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

29. Лемешко, Б.Ю. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика 5.0» / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов, С.Б. Лемешко, Е.В. Чимитова, А.П. Рогожников, А.Е. Щеглов, А.А. Горбунова // М.: Роспатент. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012613664 от 19.04.12.

30. Лемешко, Б.Ю. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика 5.1» / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов, С.Б. Лемешко, Е.В. Чимитова, А.П. Рогожников, А.А. Горбунова // М.: Роспатент. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013615968 от 25.06.13.

31. Чимитова Е.В., Румянцев А.В., Ведерникова М.А., Галанова Н.С. Система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS 1.0» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618138. – М.: Роспатент. – 2012.

32. Чимитова Е.В., Румянцев А.В., Ведерникова М.А., Галанова Н.С. Система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS 1.1» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618143. – М.: Роспатент. – 2012.

33. Чимитова Е.В., Румянцев А.В., Семёнова М.А., Галанова Н.С. Демин В.А. Система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS 1.2» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014661905. – М.: Роспатент. – 2015.

Подписано в печать __.__.2016 г. Формат 60×84×1/16
Бумага офсетная. Тираж 120 экз. Печ. л. 2.5.
Заказ № ___

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20