

АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«СИСТЕМНЫЙ ОПЕРАТОР ЕДИНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»

На правах рукописи



Давыдов Виктор Васильевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ РАСЧЕТА
ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 05.14.02 –

«Электрические станции и электроэнергетические системы»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Улан-Удэ – 2019

Оглавление

	Стр
Введение	5
Глава 1 Исследование математической модели	
потокораспределения электрических систем	18
1.1 Введение.....	18
1.2 Алгебраические особенности уравнений потокораспределения.....	23
1.3 Геометрия уравнений установившихся режимов.....	30
1.4 Вектор нормали гиперповерхности мощностей и предельных режимов.....	53
1.5 Кривизна гиперповерхности мощностей и предельных режимов.....	69
1.6 Исследование параметров предельных режимов электрической системы.....	85
1.7 Предельные по статической аperiodической устойчивости режимы электрической системы.....	102
Выводы по главе 1.....	134
Глава 2 Методы расчета потокораспределения электрических систем	137
2.1 Введение.....	137
2.2 Вычислительные модели потокораспределения метода Ньютона	140
2.3 Разделенные методы Ньютона.....	159
2.4 Методы второго и высокого порядка.....	176
2.5 Методы Ньютона по параметру.....	198
2.6 Учет действия регуляторов возбуждения синхронных генераторов при расчетах установившихся режимов электрических систем.....	221
Выводы по главе 2.....	230

	Стр
Глава 3 Математические модели нелинейного программирования	235
предельных режимов электрических систем.....	235
3.1 Введение.....	239
3.2 НЛПР модель	247
3.3 НЛПР модель с распределенным балансирующим узлом.....	249
3.4 НЛПР модель с учетом технологических ограничений.....	260
3.5 Метод внутренней точки НЛПР модели.....	270
3.6 Вычислительные аспекты реализации НЛПР модели.....	278
Выводы по главе 3.....	
Глава 4 Вычислительные модели нелинейного программирования	
поиска предельных режимов электрических систем в заданном	
направлении утяжеления	280
4.1 Введение.....	280
4.2 НЛПР-Н модель и ее анализ.....	282
4.3 НЛПР-Н метод.....	288
4.4 Учет технологических ограничений.....	293
4.5 НЛПР-НП модель и метод.....	298
4.6 Вычислительная эффективность НЛПР-Н(П) методов.....	303
4.7 Определение критических сечений ЭС в предельных	
режимах.....	310
Выводы по главе 4.....	319
Глава 5 Вычислительные модели нелинейного программирования	
ближайших предельных режимов электрических систем.....	322
5.1 Введение.....	322
5.2 НЛПР-Б ₂ модель.....	328
5.3 НЛПР-Б _∞ модель.....	334
5.4 НЛПР-Б ₁ модель.....	337
5.5 НЛПР-Б _p модель.....	339
5.6 Численные примеры.....	342

	Стр
5.7 Сравнительный анализ НЛПР- B_p моделей ближайших предельных режимов в l_p -нормах.....	346
5.8 Влияние технологических ограничений на ближайшие предельные режимы.....	352
5.9 Учет пределов реактивной мощности генераторов в НЛПР- B_p моделях	356
5.10 Результаты вычислительных экспериментов.....	361
Выводы по главе 5.....	366
Заключение	368
Список сокращений	372
Список литературы	374
Список иллюстративного материала	410
Список таблиц	412
Приложение А Кривизна гиперповерхности.....	414
Приложение Б Вычислительные аспекты реализации метода Ньютона расчета потокораспределения электрических систем.....	418
Приложение В NCP-функции	423
Приложение Г Учет ограничений в форме неравенств в базисной системе НЛПР модели	425
Приложение Д Доказательство p -неравенства	444
Приложение Е Расчетные выражения НЛПР- $B_{w\infty}$ модели	446
Приложение Ж Расчетные выражения НЛПР- B_{w1} модели	452
Приложение З Расчетные выражения НЛПР- B_{w2} модели с $\text{tg}\varphi=\text{const}$	459

Введение

Актуальность и степень разработанности проблемы. Физическая необходимость обеспечения требуемого баланса мощности в каждый момент времени во всех элементах производства, преобразования, передачи и распределения электрической энергии, размещенных на большой территории, отсутствие возможностей запастись электроэнергией в желаемых объемах и высокая альтернативная стоимость электроэнергии предопределили особую важность надежности электроснабжения потребителей. Синхронное вращение роторов всех генераторов является основой основ работы электрических систем (ЭС), что обусловило решение проблем, связанных с обеспечением статической устойчивости. Практически все регламенты, в конечном счете, направлены на поддержание устойчивости ЭС.

Большой вклад в разработку различных аспектов сложной проблемы статической устойчивости ЭС внесли советские и российские ученые Андреюк В.А., Баринов В.А., Бартоломей П.И., Брук И.С., Бушуев В.В., Валдма М.Х., Васин В.П., Веников В.А., Воропай Н.И., Горев А.А., Гуревич Ю.Е., Гусев А.С., Жданов П.С., Идельчик В.И., Иофьев Б.И., Конторович А.М., Кошеев Л.А., Крумм Л.А., Крюков А.В., Лебедев С.А., Левинштейн М.Л., Липес А.В., Маркович И.М., Паздерин А.В., Портной М.Г., Рудницкий М.П., Совалов С.А., Строев В.А., Тарасов В.И., Ушаков Е.И., Фазылов Х.Ф., Фишов А.Г., Чебан В.М., Цукерник Л.В., Щербачев О.В. и многие их коллеги, а также зарубежные исследователи Ajjarapu V., Alvarado F., Araposthatic A., Canizares C.A., Carppentier J., Conejo A.J., Dimo P., Dobson I., Galiana F.D., Kataoka Y., Kimbark E.W., Korsak A.J., Kundur P., Machowski J., Overbye T.J., Padiar K.R., Pal M.K., Pai M.A., Park R.H., Rüdemberg R., Sastry S., Savulescu S.C., Smith J.M., Tavora C.J., Van Cutsem T., Varaiya P. и их коллеги.

Несмотря на то, что общая методология анализа статической устойчивости конкретных режимов ЭС достаточно глубоко и подробно разработана применительно к широкому классу моделей ЭС, актуальность развития теории, моделей и методов расчета предельных режимов (ПР) ЭС не снижается. Во-первых, управление режимами ЭС требует быстрых и надежных методов и алгоритмов расчета ПР, учитывающих технологические ограничения на параметры режима ЭС. Кроме этого важен учет неточности прогноза мощностей узлов и их изменения, оценка ближайших ПР. Одним из мощных средств решения таких задач является использование моделей и методов нелинейного программирования. В настоящее время предложены ряд моделей нелинейного программирования ПР, однако все они в основном ограничиваются ПР в заданном направлении утяжеления, причем по надежности и вычислительной эффективности уступают методам последовательного утяжеления. Во-вторых, развитие теории и практики расчетов и анализа статической устойчивости привели к тому, что обычно для определения ПР и коэффициентов запаса статической устойчивости ЭС используются модели потокораспределения с шиной неограниченной мощности, т.е. с обычным балансирующим узлом (БУ), причем полагают, что БУ мало воздействует на получаемые ПР и его назначают, как при обычном расчете потокораспределения. Однако, месторасположение БУ влияет как на ПР, так и расчетную область существования режимов ЭС. Поэтому рядом исследователей предложены эмпирические рекомендации выбора месторасположения БУ, однако в технической литературе не исследованы причины и следствия такого влияния. В-третьих, в теории статической устойчивости ЭС используется в основном алгебраически-аналитический подход. Вместе с тем развитие теорий особенностей, бифуркации и катастроф показывает, что геометрическое рассмотрение позволяет воспользоваться мощными средствами дифференциальной геометрии и получить качественно новые результаты. В-четвертых, из-за сложности математических моделей, для поиска ПР, как правило, используют подход,

предложенный П.С. Ждановым, т.е. полагают, что исходный режим статически устойчив, затем утяжеляют его до тех пор, пока критерий статической устойчивости не изменит свой знак. Т.е. для нахождения ПР требуется рассчитанный исходный статически устойчивый установившийся режим (УР). В то же время, существующие методы расчета потокораспределения не гарантируют получение решением такого режима ЭС.

Объект и предмет исследования. **Объектом** исследования являются предельные по статической апериодической устойчивости установившиеся режимы ЭС. **Предметом** исследования являются теория, математические модели и методы расчета потокораспределения и предельных режимов ЭС.

Цели и задачи исследования. **Целью** работы является развитие теории и практики применения математических моделей потокораспределения и предельных режимов ЭС, построение робастного метода расчета потокораспределения, гарантирующего получение решением статически устойчивого режима ЭС, разработка и исследование моделей нелинейного программирования предельных режимов ЭС.

Для достижения поставленной цели в работе сформулированы и решены следующие **задачи**.

1. Исследование математической модели потокораспределения ЭС и ее особенностей, влияющих на параметры ПР.
2. Разработка и исследование геометрической интерпретации множества всех решений уравнений установившихся режимов ЭС (для заданных параметров системы) как гиперповерхности в пространстве мощностей узлов, а области существования режимов ЭС – как проекции этой гиперповерхности вдоль оси активной мощности БУ на подпространство заданных мощностей.
3. Исследование зависимости получаемых ПР, расчетной области существования режимов ЭС, возникновения неоднозначности множества режимов ЭС от выбора месторасположения БУ.

4. Исследование позиционной модели ЭС, установление и анализ математического критерия ее ПР.
5. Разработка расчетной модели определения ПР для эффективной оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС.
6. Исследование существующих методов расчета УР ЭС с выявлением их преимуществ и недостатков. Разработка вычислительно эффективного метода расчета потокораспределения, дающего решением статически устойчивый режим ЭС.
7. Выявление связи между решением задачи оптимального потокораспределения и ПР. Теоретическое обоснование и исследование модели нелинейного программирования ПР ЭС как основы для разработки вычислительных моделей и методов решения задач ПР.
8. Разработка надежного и быстродействующего метода расчета ПР в заданном направлении утяжеления на основе теории нелинейного программирования.
9. Разработка модели нелинейного программирования и метода нахождения ПР в заданном направлении утяжеления, учитывающих ошибки прогноза узловых мощностей или направления утяжеления.
10. Разработка и исследование моделей нелинейного программирования ближайших ПР ЭС в l_p -нормах, определение их преимуществ и недостатков, а также областей применения.

Методология и методы исследования. Методология исследований заключается в анализе и развитии математических моделей и методов расчета потокораспределения и предельных режимов ЭС. Для решения теоретических вопросов использовались **методы** матричного и прикладного нелинейного анализа, дифференциальной геометрии, теорий особенностей, бифуркации и статической устойчивости, теорий графов и нелинейного программирования. Численные эксперименты проводились с помощью разработанного автором научно-исследовательского программного

комплекса, написанного на C++ и реализующего современные методы решения разреженных систем уравнений и нелинейного программирования.

Научная новизна. В ходе проведенного комплекса исследований получены и предложены следующие новые результаты.

1. Анализ математической модели потокораспределения обнаружил, что месторасположение БУ оказывает существенное влияние как на расчетную область существования решения уравнений установившихся режимов ЭС, так и на пределы по существованию и статической апериодической устойчивости.
2. Показано, что вся совокупность УР ЭС для заданных параметров системы геометрически представляет собой гиперповерхность в пространстве активных мощностей всех узлов и реактивных мощностей PQ узлов, названной автором гиперповерхностью мощностей УР ЭС (ГМ). Установлено, что область существования УР ЭС (ОСР) в пространстве мощностей, широко распространенная в теории и анализе УР, является ничем иной, как проекцией ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство задаваемых мощностей, а граница этой проекции – гиперповерхностью ПР (ГПР) в пространстве мощностей. Так как в общем случае ГМ не является плоской, ее проекция, т.е. ОСР, и ее границы, т.е. ГПР, будут зависеть от выбора оси, вдоль которой осуществляется ее проецирование, т.е. от выбора БУ. Для консервативной модели ЭС ГМ является «плоской», поэтому ее ОСР и ГПР не зависят от выбора БУ. ГМ позволила наглядно объяснить механизм возможного появления «дырок» в ОСР, т.е. неодносвязности множества режимов ЭС в пространстве мощностей, а также их исчезновение при другом выборе БУ. Анализ компонент вектора нормали ГМ выявил их взаимосвязь через относительные приросты потерь активной мощности, а также то, что в ПР относительный прирост потерь активной мощности БУ равен единице. Поэтому в ПР любые попытки

БУ поддержать баланс мощности в ЭС полностью блокируется возникающими при этом потерями активной мощности. Неспособность БУ поддержать УР даже в некоторых узлах определяет ПР ЭС. В ПР БУ как бы теряет электрическую связь с частью или со всей ЭС, что фактически соответствует отсутствию БУ в вычислительной модели потокораспределения со всеми вытекающими последствиями. В реальных ЭС изменение месторасположения БУ делает этот ПР непределным УР. Только в консервативной ЭС ПР останется предельным независимо от выбора БУ.

3. Исследование позиционной модели ЭС показало, что эта модель неявно использует и реализует идеологию распределенного БУ (РБУ), и ее предельные по статической аperiodической устойчивости режимы в точности соответствуют ПР модели потокораспределения ЭС с РБУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности ЭС назначены прямо пропорционально постоянным инерциям синхронных машин. В ПР модели с РБУ вектор нормали ГМ ортогонален вектору коэффициентов участия узлов РБУ. Т.к. постоянные инерции всегда положительные, а компоненты вектора нормали ГМ взаимосвязаны через относительные приросты потерь активной мощности, ПР позиционной модели в заданном направлении утяжеления будет находиться дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей, чем ПР модели с шиной неограниченной мощности. Показано, что для определения расчетных ПР наиболее адекватной является модель потокораспределения ЭС с шиной неограниченной мощности, в ПР которой относительные приросты потерь активной мощности для всех узлов не превышают единицу.
4. Исследованы существующие методы расчета УР ЭС, выявлены их преимущества и недостатки. Предложен робастный и вычислительно

эффективный метод расчета потокораспределения, который дает решением статически устойчивый режим ЭС в случае его существования для заданных исходных данных, а при отсутствии такового - выдает рекомендации его получения. Разработан алгоритм определения критического сечения ЭС в ПР, т.е. сечения, по которому наступает нарушение статической аperiodической устойчивости при переходе через ПР.

5. Показано, что одним из универсальных подходов решения задач ПР является использование моделей и инструментов нелинейного программирования. Предложена, теоретически обоснована и исследована модель нелинейного программирования ПР ЭС, оптимальным решением которой является ПР, отвечающий минимуму сформированной целевой функции.
6. Предложен простой, быстрый и надежный метод нелинейного программирования поиска ПР в заданном направлении утяжеления, время расчета которым в среднем сопоставимо с двумя обычными расчетами потокораспределения. Предложенный метод значительно превосходит существующие методы и алгоритмы в быстродействии. Кроме этого, в отличие от последних, он может не только рассчитывать ПР, индуцированные пределом реактивной мощности, но также идентифицировать конкретный генератор, чей предел индуцировал этот ПР. Предложены модель нелинейного программирования ПР в заданном направлении утяжеления, учитывающая неточность прогноза узловых мощностей или направления утяжеления, а также метод расчета, быстродействие которого в среднем сопоставимо с 3,5 обычными расчетами потокораспределения.
7. Предложены и теоретически исследованы модели нелинейного программирования ближайших ПР ЭС в l_p -нормах, выявлены их преимущества и недостатки, а также области применения.

Определено, что модель нелинейного программирования во взвешенной l_∞ -норме, учитывающая неточность прогноза мощностей узлов с помощью взвешенной Евклидовой нормы, в наибольшей степени удовлетворяет требованиям системного оператора (СО) для оценки коэффициента запаса статической устойчивости и оперативного (превентивного) управления. Показано, что модель нелинейного программирования ближайших ПР в l_1 -норме дает решением разреженный вектор управляющих воздействий и в наибольшей степени отвечает требованиям СО для ввода режима в область существования и противоаварийного управления. Оценка ближайшего ПР с помощью Евклидовой нормы основана на геометрической интерпретации, активизирует все управляющие воздействия (УВ), поэтому может быть использована СО только как косвенный показатель для первоначальной оценки УВ. Установлено, что все другие модели ближайших ПР в l_p -нормах с $p \neq 1, 2$ или ∞ мало подходят для СО. В этих моделях взаимосвязь между элементами вектора УВ не отражает никаких реальных процессов, встречающихся в практике управления режимами ЭС.

Теоретическая значимость работы. Расширены фундаментальные знания о предельных режимах и моделях потокораспределения ЭС, выявлено влияние месторасположения БУ на расчетную область существования УР и предельные режимы ЭС, установлена связь между решением задачи оптимального потокораспределения и ПР. Разработанная модель нелинейного программирования ПР ЭС позволила расширить спектр решаемых задач ПР, получить новые важные свойства ПР, способствующие лучшему пониманию УР и ПР ЭС. Создана научно-методическая основа для дальнейшего развития теории ПР, математических моделей потокораспределения ЭС, разработки более эффективных методов и алгоритмов решения задач ПР.

Практическая значимость работы заключается в повышении надежности и устойчивости ЭС за счет расширения спектра решаемых задач ПР, повышения быстродействия, надежности и точности методов и алгоритмов расчетов ПР, применения современных мощных средств нелинейного программирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Геометрия математической модели потокораспределения ЭС, интерпретирующая всю совокупность УР ЭС для заданных параметров системы как ГМ, область существования режимов ЭС – как проекция ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство задаваемых мощностей, а множество ПР – как граница этой проекции.
2. Механизм влияния месторасположения БУ на ПР через относительные приросты потерь активной мощности.
3. Интерпретация ПР позиционной модели ЭС, как ПР модели потокораспределения с РБУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности ЭС назначены прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин.
4. Модель потокораспределения ЭС с шинами неограниченной мощности, в ПР которой относительные приросты потерь всех узлов не превышают единицу, как наиболее адекватная вычислительная модель определения расчетных ПР для оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС.
5. Подход и метод определения критических сечений ЭС в ПР.
6. Сопоставление существующих методов расчета потокораспределения ЭС. Предложенный метод расчета потокораспределения, реализующий уравнения УР в форме баланса м-токов в полярной системе координат и гарантирующий получение решением статически устойчивого режима в случае его существования для заданных исходных данных.

7. Модель нелинейного программирования ПР ЭС, как модель оптимального потокораспределения, в которой состав зависимых и независимых переменных соответствует задаче расчета потокораспределения, а функция цели не включает зависимые переменные.
8. Простой, быстрый и надежный метод определения ПР в заданном направлении утяжеления, учитывающий особенности структуры математической модели нелинейного программирования ПР и ее условия оптимальности второго порядка.
9. Математическая модель и метод нелинейного программирования ПР ЭС в заданном направлении утяжеления, учитывающие неточность прогноза узловых мощностей или направления утяжеления.
10. Математические модели нелинейного программирования ближайших ПР ЭС в l_p -нормах, области их применения.
11. Вычислительная модель нелинейного программирования ближайших ПР во взвешенной l_∞ -норме, учитывающая ошибки прогноза мощностей исходного режима во взвешенной Евклидовой норме, как наиболее адекватная для оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС.
12. Вычислительная модель нелинейного программирования ближайших ПР в l_1 -норме, как наиболее подходящая модель для ввода режима в область существования и противоаварийного управления.

Достоверность результатов работы. Обоснованность и достоверность научных положений, теоретических выводов, результатов и рекомендаций обеспечивается корректным использованием математического аппарата, подтверждается соответствием результатов теоретического анализа и вычислительных экспериментов, обсуждением положений и результатов работы с российскими и зарубежными специалистами на конференциях и других научных мероприятиях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всесоюзной научно-технической конференции «Состояние и перспективы развития электротехнологии» (Иваново, 1985 г.), IV республиканской научно-технической конференции «Современные проблемы энергетики» (Киев, 1985 г.), всесоюзной научно-технической конференции «Научные проблемы современного энергетического машиностроения и их решение» (Ленинград, 1987 г.), IX всесоюзной научной конференции «Моделирование электроэнергетических систем» (Рига, 1987 г.), научно-техническом семинаре «Информационное обеспечение АСДУ ЭЭС» (Паланга, 1988 г.), XI сессии всесоюзного научного семинара «Кибернетика электрических систем» (Абакан, 1989), республиканской научной конференции «Совершенствование электрооборудования и средств автоматизации технологических процессов» (Комсомольск-на-Амуре, 1989), научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава и студентов Восточно-Сибирского технологического института (Улан-Удэ, 1985-1994 гг.), всесоюзной научно-технической конференции «Повышение эффективности производства и использование энергии в условиях Сибири» (Иркутск, 1994 г.), республиканской научной конференции «Проблемы электроснабжения Дальнего Востока» (Комсомольск-на-Амуре, 1995 г.), республиканской научно-технической конференции «Управление режимами энергосистем и систем электроснабжения» (Чита, 1996 г.), научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава и студентов Восточно-Сибирского государственного технологического университета (Улан-Удэ, 1995-2000 гг.), II международной научно-технической конференции «Энергосберегающие и природоохранные технологии» (Улан-Удэ, 2003 г.), третьей всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Энергетика: управление, качество и эффективность использования энергоресурсов» (Благовещенск, 2003 г.), III международной научно-технической конференции «Энергосистема: управление, конкуренция, образование»

(Екатеринбург, 2008 г.), всероссийской научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Екатеринбург, 2010 г.), III международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Екатеринбург, 2012 г.), IV международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Новочеркасск, 2013 г.), V международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Томск, 2014 г.), VI международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Иваново, 2015 г.), VII международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Казань, 2016 г.), VIII международной научно-технической конференции «Энергетика глазами молодежи» (Самара, 2017 г.), научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава и студентов Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления (Улан-Удэ, 2012-2017 гг.).

Личный вклад соискателя. Приведенные в диссертации результаты получены лично автором. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит постановка задач, разработка теоретических положений, математических моделей и методов, их алгоритмическая и программная реализация, анализ и обобщение результатов, разработка рекомендаций по применению предложенных решений.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 59 печатных изданиях, в том числе: 12 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК; 2 – в журнале «IEEE Transaction on Power Systems», входящего в международные базы и системы цитирования Scopus и Web of Science; Федеральной службой по интеллектуальной собственности РФ под № 2611259 С1 запатентовано «Автоматизированное устройство определения предельных режимов электрических систем».

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и восьми приложений. Полный объем работы составляет 462 страницы, включая 41 рисунок и 28 таблиц. Список литературы содержит 372 наименования.

Работа выполнена в АО «Системный оператор Единой энергетической системы» в плотном контакте с кафедрой «Автоматизированные электрические системы» ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина», где сложилась признанная научная школа исследования методологии управления режимами сложных энергосистем и их оптимизации. Автор выражает искреннюю благодарность доктору технических наук Ерохину П.М. за постоянное внимание при обсуждении постановок задач, хода проводимых исследований и полученных результатов.

Из-за большого объема математических соотношений формулы в диссертации нумеруются последовательно (1а), (1б), (2) и т.д. внутри каждого параграфа, и на соотношения из данного параграфа ссылаются, используя эти номера, а при ссылках на соотношения из других параграфов применяется «полная» нумерация; например, (5.2.4б) означает соотношение (4б) из §5.2 пятой главы.

Глава 1 Исследование математической модели потокораспределения электрических систем

1.1 Введение

Математические модели потокораспределения играют важную роль в теории электрических систем (ЭС) и практике расчетов установившихся режимов (УР). Эти модели явно или неявно используются во многих областях анализа и управления режимами ЭС – оценка состояния, статическая и динамическая устойчивость, оптимизация режимов, противоаварийное управление и др. В настоящее время предложены и представлены в технической литературе ряд моделей потокораспределения ЭС, используемых в зависимости от области решаемой задачи. В общем случае модели потокораспределения являются нелинейными, поэтому исследовались вопросы существования и единственности решения уравнений УР (УУР), вычислительные свойства и характеристики моделей потокораспределения. Однако до недавнего времени практически не обращалось внимания на важную особенность УУР - необходимость введения понятия балансирующего узла (БУ) и его использование в моделях потокораспределения, полагая что БУ нужен только для численной реализации расчета потокораспределения и его месторасположение мало влияет на полученное решение. Согласно [341] «Балансирующий узел ЭС является фиктивным понятием, созданным аналитиками потокораспределения. Он вводится, потому что потери в ЭС точно, до расчета потокораспределения, неизвестны. Поэтому один из узлов с поддерживаемым неизменным модулем напряжения (т.е. оснащенный системой АРВ) необходимо выбрать в качестве балансирующего и его активную мощность не задавать, а рассматривать как неизвестную переменную, определяемую после расчета УР. Разница между ожидаемой и полученной после расчета величины его активной мощности будет представлять собой ошибку априорной оценки активных потерь в ЭС, т.е. до расчета потокораспределения. Если балансирующим узлом назначается узел

с большой генерируемой мощностью, такая ошибка будет составлять только малую часть его выработки. Угол балансирующего узла обычно задается, т.е. фиксируется, поэтому комплекс напряжения балансирующего узла является известным». В то же самое время практика реализации первоначальных алгоритмов расчета УР на ЭВМ показала, что выбор БУ влияет на скорость сходимости и надежность расчета потокораспределения. Результаты первого такого систематического исследования были представлены в [255], где предложено в качестве БУ выбирать узел с наименьшим диагональным элементом в Z -матрице. Другими критериями расположения БУ предложено использовать узел с наибольшим числом присоединенных линий, или напряжение которого опережает все другие напряжения в ЭС. В [341] для надежной сходимости метода Гаусса-Зейделя рекомендуется в качестве БУ назначать узел, чей диагональный элемент матрицы узловых проводимостей (МУП) обладает наименьшим диагональным доминированием, а для метода Z -матрицы – подключать большую фиктивную шунтовую проводимость в БУ. Согласно [140], «в замкнутой сети БУ должен быть выбран, исходя из следующих обстоятельств: если в узле напряжение тщательно поддерживается, то этот узел выбирается в качестве балансирующего; в противном случае в качестве балансирующего выбирается мощный узел сети, т.к. к нему подходят многие линии и мощность К.З. в нем будет высокой: при этом напряжение мало меняется, даже если меняется режим сети. В радиальной сети БУ – это узел, откуда питается сеть». С применением и развитием метода Ньютона в программах расчета УР влияние выбора БУ на надежность и скорость сходимости расчета потокораспределения было почти полностью устранено [193], поэтому в настоящее время в качестве БУ обычно произвольно назначается наиболее мощная станция (генератор) в ЭС [251]. Аналогичный подход выбора БУ, т.е. только с точки зрения удобства и простоты вычислений, доминирует также в отечественной литературе [15], [26], [30], [96], [99], [119], [124], [127], [130], [167] и др. Другими словами, широко распространенным мнением является

утверждение, что выбор БУ мало влияет на результаты расчета УР, а погрешность получаемого решения определяется только погрешностью априорной оценки потерь активной мощности в ЭС. В [251] для уменьшения такой погрешности предложено БУ назначать узел с наименьшим относительным приростом потерь активной мощности в ЭС, а в [299] для этой цели предложено использовать распределенный БУ (РБУ).

Господство в существующей литературе мнения о малом влиянии размещения БУ на результаты расчета скорее всего связано с историей развития и использования математических моделей потокораспределения и численных методов их реализации. Теоретической основой моделей потокораспределения ЭС является представление электромагнитных процессов передачи и распределения электрической энергии в ЭС с помощью понятий об электродвижущей силе, тока и напряжений электрической цепи, законов Ома и Кирхгофа [7], [97], [109]. Все модели потокораспределения основываются на теории электрических цепей, в основном линейных. В теории линейных цепей, например, при реализации уравнений узловых напряжений (УУН), введение БУ является результатом действия первого закона Кирхгофа - сумма токов всех узлов цепи равна нулю, следовательно, УУН, включающие все узлы являются линейно зависимыми, т.е. полная матрица узловых проводимостей является вырожденной. Поэтому ток одного произвольно выбранного узла, который получает название балансирующего, может быть вычислен сразу до расчета цепи, а его уравнение должно быть исключено из решаемой системы линейных уравнений, чтобы сделать матрицу оставшейся части системы УУН полного ранга. Из курса математики известно, что система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей всегда имеет единственное решение. Поэтому получаемые результаты расчета линейных цепей не зависят от выбора месторасположения БУ. Такое свойство линейных электрических цепей было «напрямую» перенесено на первоначальные модели потокораспределения, поскольку первые ЭС были в основном постоянного тока и сравнительно

малопротяженными системами переменного тока, поэтому нагрузки задавались в форме узловых токов, так как взаимные углы между векторами узловых напряжений были обычно достаточно малыми. Поэтому примерно до середины тридцатых годов прошлого столетия общие методы расчета УР сводились к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений [111] и математическими моделями потокораспределения были системы уравнений электрической цепи, сформированные на основе законов Ома и Кирхгофа [28], [89], [109]. Создание ЭС с достаточно протяженными межсистемными ЛЭП обусловило увеличение взаимных углов между векторами узловых напряжений, что привело к существенной нелинейности уравнений Кирхгофа и потребовало задания узловых нагрузок в форме активных и реактивных мощностей. Поэтому стали развиваться различные упрощенные и инженерные методы расчета, в общем случае - методы последовательных приближений [124], [135], [152], [156], [170], [177], [183]. При этом модели потокораспределения формировались и реализовывались в основном в форме баланса токов [30], [91], [96], [127], [182], в том числе при реализации первых программ расчета потокораспределения [341]. Поэтому не возникало причин сомневаться, что месторасположения БУ влияет на полученное решение. С применением и развитием метода Ньютона и его модификаций в программах расчета УР стали использоваться модели потокораспределения в форме баланса мощностей в прямоугольной или прямоугольной/полярной (смешанной) системе координат [15], [99], [119], [146], [154], [174], [346]. При этом роль БУ считалась прежней. Правомочность этого мнения также «подтверждалось» тем фактом, что при расчете оптимального потокораспределения получаемое решение не зависит от месторасположения БУ [5], [110], [130], [248]. Выбор БУ влияет только на надежность и скорость сходимости итерационного процесса расчета оптимального потокораспределения. Поэтому были предложены соответствующие рекомендации [110], [130]. Другие подтверждающие аргументы могли основываться на результатах исследований,

опубликованных в [151], [191], [284] и др., согласно которым месторасположение БУ не влияет на решения консервативной модели ЭС, в том числе на получаемые предельные режимы.

Утвердившееся мнение о БУ как искусственном артефакте, не влияющем на получаемое решение, и введенном аналитиками моделей потокораспределения исключительно для облегчения получения решения УУР, проникло во все области теории режимов ЭС, в том числе при рассмотрении областей существования УР (ОСР) и статической устойчивости ЭС. Такое мнение господствует как в России, так и за рубежом. Косвенным подтверждением этого является зарубежное название БУ – slack bus – фиктивный электрический узел (шина). Если при классическом расчете УР месторасположение БУ мало влияет на получаемые решения, но может воздействовать на скорость сходимости и надежность итерационного процесса, то в случае определения предельных режимов, ОСР и статической устойчивости ЭС, его влияние возрастает, однако в технической литературе не исследованы причины и следствия такого влияния. Оказывается удивительным, что все расчетные модели потокораспределения, реализуемые в тех или иных задачах, например, оценка состояния, оптимизация режимов, динамическая или статическая устойчивость ЭС и т.д., всегда явно или неявно используют одиночный, или распределенный БУ.

Далее материал главы организован следующим образом. В параграфе 1.2 рассматриваются и анализируются УУР на примере УУН в форме баланса мощностей в прямоугольной/полярной (смешанной) системе координат, выявляются их особенности, необходимость введения балансирующего и базисного узла, их влияние на матрицу Якоби, анализируются критерий предельных по существованию решения УУР ЭС и его особенности. Обычно в теории режимов ЭС используется алгебраически-аналитический подход. Вместе с тем развитие теорий особенностей, бифуркации и катастроф показывает, что геометрическое рассмотрение позволяет воспользоваться мощными средствами дифференциальной геометрии и получить качественно

новые интересные результаты. В параграфе 1.3 рассматривается геометрия УУР, вводится понятие и исследуется гиперповерхность мощностей (ГМ) ЭС, ее связь с ОСР, влияние месторасположения БУ на ОСР ЭС, а также режимов, предельных по условиям существования решения УУР. В параграфе 1.4 исследуется вектор нормали ГМ ЭС, выявляется взаимосвязь его компонент через относительные приросты потерь мощности, влияние одиночного и распределенного БУ на относительные приросты потерь, а также предельные режимы (ПР). В параграфе 1.5 исследуются вопросы кривизны ГМ и гиперповерхности ПР (ГПР). В параграфе 1.6 на примере 2-х узловой ЭС численно проверяются и подтверждаются ранее полученные результаты, исследуется влияние параметров элементов ЭС на ПР и его показатели. В теории статической устойчивости ЭС наряду с моделью потокораспределения с шиной неограниченной мощности довольно широкое распространение получила так называемая позиционная модель ЭС (без БУ), за рубежом именуемая классической. Параграф 1.7 посвящён исследованию позиционной модели ЭС, представлен ее модальный анализ, анализируются критерий предельных по статической апериодической устойчивости режимов позиционной модели ЭС, выявляется его связь с критерием ПР модели потокораспределения с РБУ, предлагается расчетная модель ПР для адекватной оценки коэффициента запаса статической апериодической устойчивости ЭС. Наконец, в параграфе 1.8 представлены выводы и рекомендации первой главы.

1.2 Алгебраические особенности уравнений потокораспределения

В теории электрических систем существуют ряд математических моделей потокораспределения, каждая из которых основывается на уравнениях законов Кирхгофа, имеет определенные преимущества и недостатки, и может быть получена из другой математическим преобразованием. Как следствие, качественные выводы и заключения, полученные на одной модели, остаются справедливыми также и для других моделей потокораспределения. Поэтому

исследователи обычно применяют ту модель, которая удобна для используемого ими инструментария. Так, например, в [172] реализован подход, основанный на преобразовании уравнений цепи в целом, а в [164] - [167], [256], [276] и т.д. используются УУР в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат из-за отсутствия в них членов выше второго порядка.

Рассмотрим систему УУР в форме баланса мощностей в смешанной системе координат (прямоугольная - для элементов МУП $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ и трехфазных мощностей $S_k = P_k + jQ_k$, а полярная - для комплексов линейных напряжений $U_k = V_k e^{j\delta_k}$), которая для трехфазной симметричной сети может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= P_k - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = 0; \\ \Delta Q_k &= Q_k + V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $m \in k$ означает, что узел m смежен узлу k ; $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$ - разность фазовых углов между смежными узлами.

Система нелинейных уравнений (1) представляет собой уравнения узловых балансов активных и реактивных мощностей, которые в УР, согласно законам Кирхгофа, должны поддерживаться в каждом узле. Расчет режима соответствует решению системы нелинейных УУР (1), при этом полагается, что параметры системы, т.е. элементы МУП, известны, и УР в каждом узле представляется четырьмя параметрами режима (переменными) – P_k , Q_k , V_k , и δ_k . Согласно (1) для каждого узла имеется два уравнения баланса активной и реактивной мощности. Поэтому для того, чтобы рассчитать УР ЭС, для каждого узла обязательно должны быть заданы два параметра. С учетом сказанного систему нелинейных уравнений (1) можно представить в компактной векторной форме:

$$\Delta F(X, Y) = 0, \quad (2)$$

где $\Delta F(X, Y)$, Y и X - соответственно векторы небалансов мощностей, задаваемых (независимых) и искомым (зависимых) переменных. Разделение на независимые и зависимые переменные отражает тот факт, что число переменных (параметров) в системе (2) превышает количество уравнений.

С математической точки зрения отнесение к зависимым и независимым переменным может быть произвольным, определяется только количество зависимых переменных, значения которых могут быть получены из решения (2) при известных независимых переменных. С точки зрения расчета УР к независимым переменным относятся те, для которых имеется конкретная информация, а именно: мощности узлов, а также модули напряжений генераторов, оснащенных системой АРВ. Комплексы напряжений относятся к зависимым переменным, которые находятся из решения (2).

Решение системы нелинейных уравнений (2) можно рассматривать как отображение независимых переменных в пространство зависимых переменных $X = X(Y)$ [137]. Согласно теореме о неявной функции, необходимым условием существования такого отображения и, следовательно, решения системы нелинейных уравнений (2) является невырожденность матрицы частных производных системы нелинейных уравнений (2) по зависимым переменным $[\partial \Delta F / \partial X]$.

Рассмотрим полную матрицу частных производных уравнений балансов мощности (2) по фазовым углам и модулям напряжений узлов:

$$[J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}} \end{vmatrix}, \quad (3a)$$

где

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} = \begin{cases} V_k V_m (-G_{km} \sin \delta_{km} + B_{km} \cos \delta_{km}), & k \neq m; \\ V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}), & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \mathcal{V}_m} = \begin{cases} -V_k (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), & k \neq m; \\ -2V_k G_{kk} - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta}\right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} = \begin{cases} V_k V_m (B_{km} \sin \delta_{km} + G_{km} \cos \delta_{km}), & k \neq m; \\ -V_k \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \sin \delta_{km} + G_{km} \cos \delta_{km}), & k = m; \end{cases} \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}}\right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \mathcal{V}_m} = \begin{cases} V_k (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}), & k \neq m; \\ 2V_k B_{kk} + \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}), & k = m. \end{cases}$$

Из (3) видно, что диагональные элементы подматриц $[\partial \Delta P / \partial \delta]$ и $[\partial \Delta Q / \partial \delta]$ равны с обратным знаком сумме недиагональных элементов строки. Поэтому $[\partial \Delta P / \partial \delta]e = 0$, $[\partial \Delta Q / \partial \delta]e = 0$, где e – вектор, составленный из одних единиц. Следовательно, полная матрица Якоби будет вырожденной, так как $[J] \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

Это свойство полной матрицы следует непосредственно из системы уравнений (1). Изменение всех фазовых углов на одну и ту же величину не изменяет значение правой части. Поэтому эта система нелинейных уравнений имеет бесконечное множество решений. Необходимо задать точку отсчета, для чего фазовый угол одного из узлов, который получает название базисного, должен быть зафиксирован, т.е. переведен в состав независимых переменных. Поскольку число зависимых переменных становится на единицу меньше числа уравнений, математическая формализация требует пополнить их число. В силу специфики энергосистем в качестве таковой принимается активная мощность одного из узлов, который становится балансирующим по активной мощности. Выбор базисного узла может быть произвольным. Выбор балансирующего узла обычно связан со спецификой ЭС.

В общем случае, другие две подматрицы полной матрицы Якоби являются невырожденными. Однако, в отсутствии шунтов при гладком старте их диагональные элементы также равны с обратным знаком сумме недиагональных элементов, т.е. $[\partial \Delta P / \partial \mathcal{V}]e = 0$, $[\partial \Delta Q / \partial \mathcal{V}]e = 0$, поэтому $[J] \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} = 0$, что делает дважды вырожденной полную матрицу Якоби.

Фиксация фазового угла в одном из узлов исключает первую вырожденность. В большинстве режимов комплексы напряжений отличаются от гладкого старта, поэтому подматрицы $[\partial \Delta P / \partial \mathcal{V}]$ и $[\partial \Delta Q / \partial \mathcal{V}]$ не вырождены, но будут плохо обусловлены, и получаемое решение очень чувствительно к изменению реактивных мощностей узлов. Как следствие, практически не удастся задать реактивные мощности узлов, чтобы получаемые режимы соответствовали эксплуатационным требованиям [146]. Поэтому в одном из узлов необходимо зафиксировать также модуль напряжения, т.е. ввести его в состав независимых переменных. Как и в случае фиксации фазового угла, реактивная мощность одного из узлов переводится в состав зависимых переменных, который становится балансирующим по реактивной мощности. Обычно узел, балансирующий по активной мощности, назначается балансирующим и по реактивной, для него задаются фаза и модуль напряжений ($V\delta$ -узел). Балансирующими по реактивной мощности моделируются также генераторные узлы, оснащенные системой АРВ, поддерживающей модуль напряжения неизменным (PV -узлы).

С учетом сказанного матрица частных производных уравнений баланса мощностей узлов по зависимым переменным принимает вид:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{LF} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} & 1 & 0 \\ \frac{\partial \Delta Q_{PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PV}}{\partial V_{PQ}} & 0 & E \end{bmatrix}, \quad (4a)$$

где

$$[J_{LF}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix} - \quad (4b)$$

матрица Якоби уравнений УР (потокораспределения); $[E]$ и $[0]$ - единичная и нулевые подматрицы соответствующей размерности; индексом b отмечен

балансирующий узел; PQ - узлы, для которых задаются активная и реактивная мощность. Из (4а) следует, что

$$\det[J] = \det[J_{LF}], \quad (4в)$$

и невырожденность матрицы Якоби (4б) обеспечивает невырожденность матрицы (4а).

При решении системы нелинейных уравнений (1) методом Ньютона формально должны решаться линеаризованные уравнения с матрицей коэффициентов (4а). Однако линеаризованные уравнения, использующие матрицу Якоби потокораспределения $[J_{LF}]$, не зависят от других уравнений и решаются отдельно, а остальные зависимые переменные (мощностьбалансирующего узла и реактивные мощности PV - узлов) определяются из уравнений баланса (1) подстановкой найденных на итерации комплексов напряжений.

Ряд программ расчета УР использует так называемый распределенный БУ (РБУ), т.е. балансировку режима проводят несколько узлов с заданными коэффициентами участия. Коэффициенты участия \mathcal{G}_k^S могут назначаться из экономических соображений, либо из соображений первичного или вторичного регулирования частоты, либо по другим соображениям [251], [299], [365]. В этом случае водится зависимая переменная P^S - активная мощность РБУ, которая учитывается в уравнениях баланса активных мощностей узлов компонентами $\mathcal{G}_k^S P^S$ с $\sum_{k \in S} \mathcal{G}_k^S = 1$; и матрица Якоби потокораспределения принимает вид:

$$[J_{LF}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V_{PQ}} & \mathcal{G}^S \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4г)$$

где \mathcal{G}^S - вектор коэффициентов участия узлов в балансировке режима. Матрица (4г) включает частные производные уравнений баланса активной мощности всех узлов.

В УУР (1) мощности всех узлов входят аддитивно. Если не брать во внимание технологические ограничения на параметры режима, система (2) будет всегда совместной при любых фазовых углах и модулях напряжения при условии, что мощности узлов вычисляются непосредственно из (1). Поэтому предельный по существованию режим ЭС можно охарактеризовать как установившийся режим, в котором при малом изменении независимых переменных в неблагоприятном направлении система уравнений (2) становится несовместной, т.е. неразрешимой относительно зависимых переменных. Теорема о неявной функции утверждает, что если в УР с параметрами X_0, Y_0 матрица Якоби (4) не вырождена, то для любого Y достаточно близкого к Y_0 существует единственное $X = X(Y)$, являющееся решением нелинейных УУР $\Delta F(X(Y), Y) = 0$. Поэтому следствием теоремы о неявной функции является, во-первых, необходимое условие предельного по существованию режима – вырожденность матрицы Якоби потокораспределения (4) [98], а во-вторых - существование близких вторых решений в окрестности предельного режима [136].

Согласно теореме Сарда множество нерегулярных значений переменных, т.е. когда матрица Якоби вырождена, имеет меру нуль [24]. Дополнение ко всякому множеству нулевой меры является всюду плотным. Следовательно, каждая точка пространства переменных сколь угодно близка к некоторому регулярному значению отображения. С одной стороны, теорема Сарда гарантирует практическую невозможность получения непередельного режима с вырожденной матрицей Якоби (точки перегиба), т.е. делает достаточным необходимое условие получения ПР. С другой стороны, она говорит о том, что получаемые расчетные ПР будут только приближением к действительным предельным режимам. В ряде случаев вообще невозможно строго получить вырожденную расчетную матрицу Якоби. Так, например, для 2-х узловой схемы с PV узлами, один из которых принят балансирующим, матрице Якоби потокораспределения соответствует выражение:

$$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_{km}} = V_k V_m |Y_{km}| \cos(\delta_{km} - \alpha_{km}), \quad (5)$$

где $|Y_{km}| = \sqrt{G_{km}^2 + B_{km}^2}$; $\alpha_{km} = -\arctg(G_{km}/B_{km})$ - угол потерь ветви km . Нулевое значение (5) получается для $\delta_{km} = \pm\pi/2 + \alpha_{km}$. Число π является иррациональным, поэтому получить «чистый» ноль в (5) практически нельзя. Теорема Сарда редко используется математиками. Однако она является очень мощным и полезным математическим инструментарием для тех, кто занимается разработкой и применением вычислительных моделей режимов ЭС. Например, только эта теорема объясняет робастность метода Ньютона по параметру, когда УУР не имеют реального решения. Известно, что в этом случае итерационный процесс метода Ньютона по параметру сходится к предельному режиму с «вырожденной» матрицей Якоби. Теоретически нельзя решать систему линейных уравнений с вырожденной матрицей, но это реализуется в методе Ньютона по параметру [359], а значит, в получаемом «предельном» режиме расчетная матрица Якоби не вырождена, хотя может быть плохо обусловленной. В методе Ньютона по параметру оптимальный множитель шага значительно улучшает число обусловленности задачи. Возможны также другие подходы улучшения обусловленности – параметризация уравнений, изменение состава зависимых и независимых переменных [231] и т.д. Предельный режим можно сравнить с «крутым обрывом». Вычислительные модели вдали от предела практически не чувствуют край обрыва и могут «улететь» достаточно далеко за предел [104], что требует дополнительных страховочных механизмов. Неудивительно, что в существующих промышленных программах расчет ПР ведется в заданном направлении утяжеления с дискретным или параметризованным шагом – установившиеся режимы утяжеляют последовательно, пока они считаются.

1.3 Геометрия уравнений установившихся режимов

Рассмотрение решения системы нелинейных уравнений потокораспределения (1.2.2) как отображение независимых переменных в

пространство зависимых переменных $Y \rightarrow X$ позволяет получить интересную и важную геометрическую интерпретацию УУР. Поскольку активная мощность балансирующего узла P_b является зависимой переменной, она является функцией задаваемых мощностей других узлов. График этой функции $P_b = P_b(P, Q)$ представляет собой гиперповерхность в пространстве мощностей. Эта гиперповерхность получила название «гиперповерхность мощностей установившихся режимов ЭС» (ГМ) [52].

ГМ определяет всю совокупность УР ЭС, в том числе гипотетических статически неустойчивых режимов, при неизменной топологии и других параметрах системы. Для того, чтобы выяснить, что представляет собой ГМ и ее связь с ОСР, в качестве примера рассмотрим 2-х узловую схему с PV узлами, для которой можно довольно легко получить аналитическое выражение ГМ. Воспользуемся выражениями уравнений баланса активных мощностей этих двух PV-узлов:

$$\Delta P_1 = P_1 - V_1^2 G + V_1 V_2 (G \cos \delta + B \sin \delta) = 0; \quad (1a)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - V_2^2 G + V_1 V_2 (G \cos \delta - B \sin \delta) = 0, \quad (1б)$$

где $G + jB$ – комплекс проводимости ветви, соединяющей эти два узла; δ – угол между комплексами узловых напряжений.

Сложив (1a) с (1б) и вычитая (1б) из (1a), можно получить:

$$\frac{P_1 - V_1^2 G + P_2 - V_2^2 G}{2V_1 V_2 G} = -\cos \delta; \quad (2a)$$

$$\frac{P_1 - V_1^2 G - P_2 + V_2^2 G}{2V_1 V_2 B} = -\sin \delta. \quad (2б)$$

Возведение (2a) и (2б) в квадрат и их последующее сложение дает

$$\left(\frac{P_1 - V_1^2 G + P_2 - V_2^2 G}{2V_1 V_2 G} \right)^2 + \left(\frac{P_1 - V_1^2 G - P_2 + V_2^2 G}{2V_1 V_2 B} \right)^2 = 1. \quad (3)$$

Если воспользоваться заменой переменных:

$$Y_1^0 = P_1 - V_1^2 G; \quad Y_2^0 = P_2 - V_2^2 G; \quad (4a)$$

$$Y_1 = (Y_1^0 + Y_2^0) / \sqrt{2}; \quad Y_2 = (Y_1^0 - Y_2^0) / \sqrt{2}, \quad (4б)$$

уравнение (3) можно представить в виде:

$$\left(\frac{Y_1}{\sqrt{2V_1V_2G}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{\sqrt{2V_1V_2B}}\right)^2 = 1, \quad (5)$$

Это уравнение является каноническим уравнением эллипса. Первая замена переменных (4а) переносит центр эллипса (3) в начало координат, вторая (4б) поворачивает оси эллипса на 45° . Поэтому ГМ этой 2-узловой ЭС представляет собой эллипс (рис. 1.1), координаты центра которого равны V_1^2G , V_2^2G , а оси сдвинуты относительно ординат мощностей на угол 45° . Одна ось эллипса имеет длину $2 \times \sqrt{2V_1V_2|G|}$, другая - $2 \times \sqrt{2V_1V_2|B|}$.

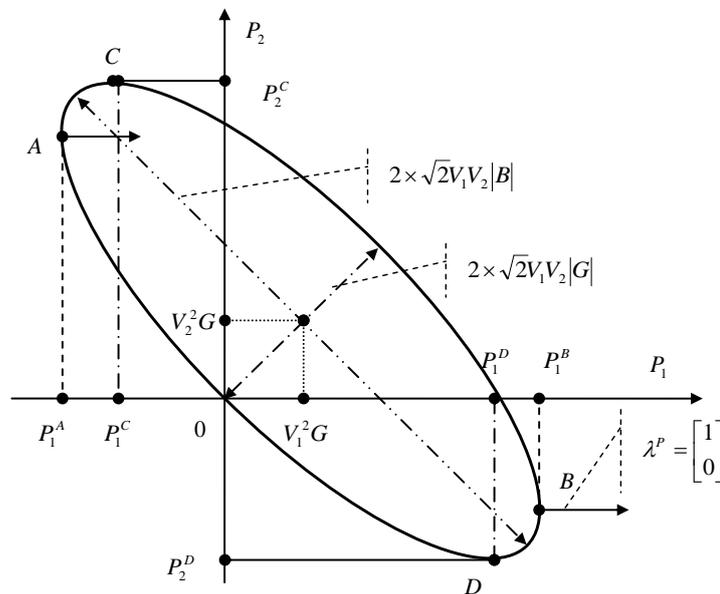


Рисунок 1.1 - Эллипс мощностей УР 2-х узловой ЭС с PV-узлами

Эллипс мощностей 2-х узловой системы определяет всю ее совокупность УР. Вне эллипса (внутри или снаружи) не существуют никакие УР для этой ЭС. Любая точка эллипса отвечает конкретному УР, ее координаты соответствуют мощностям узлов в этом режиме. При одинаковых модулях напряжения в узлах, крайняя нижняя точка на малой оси эллипса расположена в начале координат и соответствует режиму х.х. с нулевым углом по линии, крайняя верхняя – режиму «КЗ» в середине линии, т.е. при развороте угла δ на 180° , что приводит к нулевому значению

напряжения в середине линии. Крайняя левая точка большой оси эллипса соответствует УР с $\delta = -90^\circ$, крайняя правая- с $\delta = +90^\circ$. Поэтому верхняя часть эллипса между точками C и B соответствует заведомо статически неустойчивым режимам. Часть эллипса, расположенная в первом квадранте, вообще довольно специфична, поскольку и первый, и второй узел вырабатывают активную мощность, которая расходуется только на потери в линии, т.е. не происходит никакой электропередачи.

Эллипс мощностей позволяет наглядно продемонстрировать влияние сечения проводов линии на параметры электропередачи (рис. 1.2). При увеличении сечения, т.е. уменьшении активного сопротивления линии, ось эллипса, соответствующая активной проводимости линии, уменьшается и в предельном случае, когда активное сопротивление стремится к нулю, эллипс вырождается в отрезок прямой линии $P_1 + P_2 = 0$, и область допустимых значений узловых мощностей становится выпуклой.

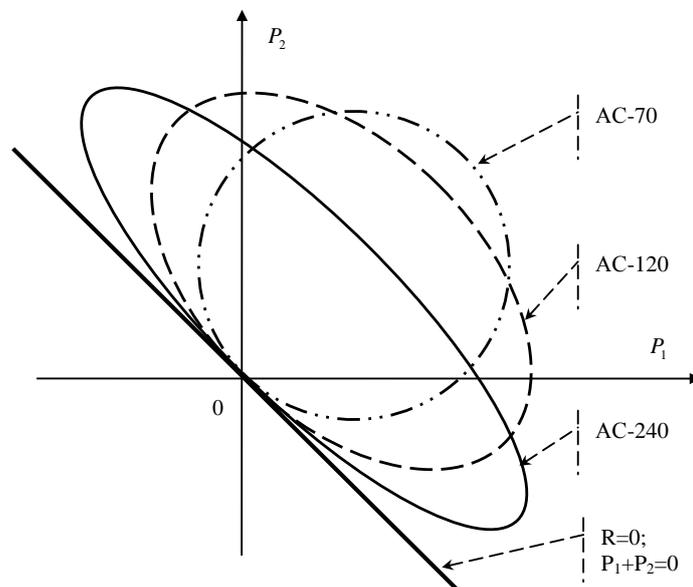


Рисунок 1.2 - Эллипсы мощностей УР 2-х узловой ЭС при различных параметрах ЛЭП

Представление всей совокупности установившихся режимов ЭС в виде ГМ позволяет применить инструментарии дифференциальной геометрии для проведения исследований. Одним из базовых таких инструментов является

анализ гиперплоскостей, касательных к гиперповерхности, и их векторов нормали. В случае рассматриваемой 2-х узловой ЭС, линиям, касательным к эллипсу, соответствует уравнение:

$$\lambda_1^P \Delta P_1 + \lambda_2^P \Delta P_2 = 0, \quad (6)$$

где вектор нормали (с точностью до множителя) определяется выражением:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \Delta P_2 / \partial \delta \\ -\partial \Delta P_1 / \partial \delta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

На ГМ активные мощности всех узлов являются равноправными. Здесь нет необходимости задавать балансирующий узел. Такая необходимость возникает, если нужно рассчитать УР численными методами. Рассмотрим структуру вектора (7). Его первая компонента соответствует матрице Якоби потокораспределения этой системы, когда в качестве балансирующего назначается узел 1, вторая компонента соответствует матрице Якоби, когда балансирующем узлом назначается узел 2. В предельном режиме матрица Якоби вырождена. В случае рассматриваемой 2-х узловой системы это соответствует нулевому значению одной из компонент вектора (7), определяемой месторасположением БУ, т.е. когда вектор нормали будет строго горизонтальным (БУ-2) или строго вертикальным (БУ-1).

Расчет режима этой простейшей 2-х узловой схемы можно выполнить аналитически. Однако при большем количестве узлов для расчета требуется балансирующий узел. Рассмотрим влияние балансирующего узла на область рассчитываемых режимов. Обычно на практике расчетная ОСР определяется последовательным утяжелением режима. Предположим, что балансирующим назначен второй узел. Тогда областью рассчитываемых режимов будет нижняя часть эллипса $AODB$ с диапазоном мощностей первого узла от P_1^A до P_1^B (рис. 1.1). Предельным режимам будут соответствовать точки A и B , для которых вектор нормали эллипса параллелен оси абсцисс, т.е. его вторая компонента равна нулю, а согласно (7), это соответствует условию $\partial \Delta P_1 / \partial \delta = 0$, т.е. вырожденной расчетной матрице Якоби. В случае назначения

балансирующим первого узла, область рассчитываемых режимов будет соответствовать дуге $CA0D$ с диапазоном мощностей второго узла от P_2^C до P_2^D . В этом случае предельным режимам будут отвечать две точки C и D , для которых вектор нормали эллипса параллелен оси ординат, т.е. его первая компонента равна нулю, а это, согласно (7), соответствует соотношению $\partial\Delta P_2/\partial\delta=0$, т.е. вырожденной расчетной матрице Якоби при БУ-1. В этом случае при проведении утяжеления режима не могут быть получены УР, соответствующие дуге DB . Таким образом, выбор месторасположения БУ влияет как на получаемые ПР, так и область рассчитываемых режимов.

Понятие гиперповерхности мощностей было предложено в [52]. Обычно в теории и практике используется понятие «область существования режимов» (ОСР) [26]. С введением понятия ГМ ЭС оказывается, что ОСР ЭС представляет собой проекцию ГМ ЭС на подпространство задаваемых мощностей вдоль оси активной мощности БУ, а граница этой проекции является ничем иным, как гиперповерхностью предельных режимов (ГПР) в пространстве задаваемых узловых мощностей. В случае рассматриваемой 2-х узловой системы с БУ-2, ОСР (см. рис. 1.1) представляет собой отрезок $[P_1^A, P_1^B]$ горизонтальной оси, границы которого - - точки P_1^A и P_1^B - соответствуют двум ПР при БУ-2. В случае, когда БУ назначается узел 1, ОСР представляет собой отрезок $[P_2^C, P_2^D]$ вертикальной оси, крайние точки P_2^C и P_2^D - два ПР при БУ-1.

Геометрическое рассмотрение всей совокупности УР как ГМ ЭС позволяет объяснить причину возможного появления «дырок» в ОСР, т.е. неоднозначность множества УР ЭС в пространстве мощностей. Впервые на возможность появления «дырок» в ОСР указал Васин В.П. [26] и представил достаточные условия односвязности множества режимов ЭС в пространстве мощностей (b – индекс БУ):

$$V_k V_b |Y_{kb}| \geq \left| \sum_{\forall m \neq b} \pm V_k V_m |Y_{km}| \sin 2\alpha_{km} \right|; \quad \forall k \neq b. \quad (8)$$

Для консервативной ЭС, т.е. когда все α_{km} равны нулю, условие (8) выполняется всегда, гарантируя односвязность множества режимов консервативной ЭС в пространстве мощностей. Условие (8) не является необходимым и обычно не выполняется для реальных ЭС. Это объясняется тем, что в реальных ЭС БУ непосредственно соединен только с некоторыми узлами. Для всех остальных узлов $|Y_{kb}|=0$, и их левая часть неравенства (8) будет тождественно равна нулю. Поэтому, если к таким узлам подключены ветви с активными сопротивлениями, правая часть (8) будет строго больше нуля, что нарушает условие (8). Поэтому в реальных ЭС ОСР могут как иметь «дырки», так и не иметь их. Это зависит от топологии, параметров элементов ЭС, а также месторасположения БУ.

Причины появления «дырок» в ОСР можно объяснить, если обратиться к эллипсу мощностей, представленному на рис. 1.1. Вне эллипса (внутри и снаружи), из-за несовместности УУР (1), не существуют никакие УР 2-х узловой ЭС, поэтому множество значений мощностей двух узлов является невыпуклым. Именно это является основной причиной возможного возникновения «дырок» в ОСР многоузловых ЭС. Поскольку проекция эллипса на любую ось представляет собой отрезок прямой сплошной линии, который и является ОСР 2-х узловой ЭС при соответствующем БУ, множество УР 2-х узловой ЭС конечно будет односвязанным. Неодносвязность множества УР может появиться уже в случае 3-х узловой ЭС, например, если добавить к этой 2-х узловой ЭС третий *PV*-узел, соединив его с первым узлом, например, через индуктивное сопротивление X_{13} , и назначить его балансирующим. В этой 3-х узловой радиальной ЭС все узлы являются *PV*-узлами, причем вся активная мощность БУ-3 напрямую, без потерь, транспортируется к узлу 1. Поэтому, воспользовавшись (3), ГМ такой ЭС можно представить уравнением:

$$\left(\frac{(P_1 + P_3) - V_1^2 G + P_2 - V_2^2 G}{2V_1 V_2 G} \right)^2 + \left(\frac{(P_1 + P_3) - V_1^2 G - P_2 + V_2^2 G}{2V_1 V_2 B} \right)^2 = 1, \quad (9)$$

где $P_3 = P_{3l} = (V_1 V_3 / X_{13}) \sin \delta_{31}$. Выражение (9) является уравнением поверхности в трехмерном пространстве мощностей, проекция которой на плоскость $P_1 \times P_2$ мощностей узлов 1 и 2 представляет собой ОСР этой ЭС с БУ-3 (рис. 1.3). Сравнение (9) с (3) показывает, что эллипс (9) - это тот же эллипс (3), как на рис. 1.1, только смещенный горизонтально на величину мощности P_3 влево, если узел 1 получает мощность от БУ-3, и вправо - в противном случае. Следовательно, выражение (9) можно рассматривать как семейство эллипсов на плоскости $P_1 \times P_2$. Поэтому ОСР этой ЭС представляет собой область, заполняемую эллипсами (9). Ее граница, т.е. ПР, представляет собой огибающую семейства эллипсов (9).

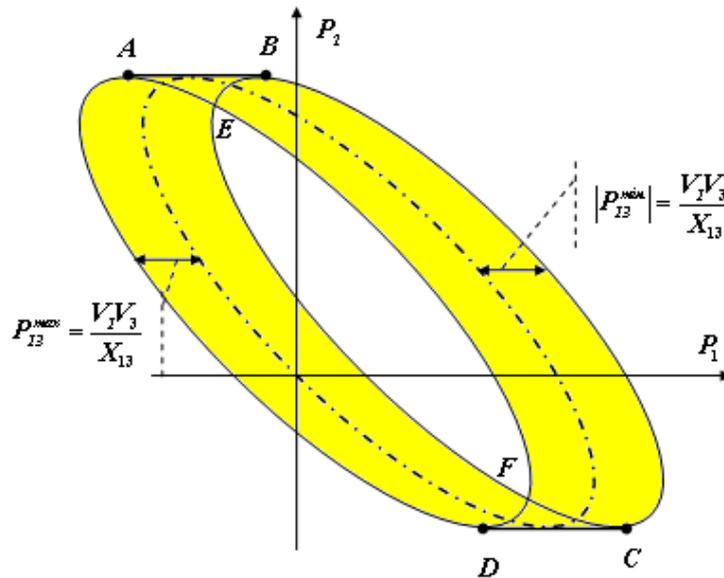


Рисунок 1.3 - ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой»

Максимальное и минимальное значение мощности, которую узел 1 может получить от БУ-3, определяется выражением $P_{13}^{\max} = V_1 V_3 / X_{13} = -P_{13}^{\min}$. Поэтому внешней границей ОСР является граница выпуклой оболочки двух крайних эллипсов, смещенных влево и вправо горизонтально относительно центрального эллипса (3) на величину $P_{13}^{\max} = V_1 V_3 / X_{13}$, т.е. замкнутая кривая A-B-C-D-A на рис. 1.3.

«Дырка» в ОСР этой ЭС представляет собой область пересечения двух крайних эллипсов, т.е. область, ограниченная двумя дугами EF этих эллипсов. Если индуктивное сопротивление X_{13} будет таким, что эти два крайних эллипса будут касаться друг друга, то «дырка» исчезнет. При меньших значениях X_{13} «дырки» также не будет, т.к. два крайних эллипса пересекаться не будут. Анализ (9) показывает, что это будет в том случае, когда выполняется условие

$$P_{13}^{\max} = V_1 V_3 |Y_{13}| \geq V_1 V_2 |Y_{12}| \sin 2\alpha_{12}, \quad (10)$$

где $|Y_{13}| = 1/X_{13}$. Знак равенства в (10) соответствует касанию двух крайних эллипсов. Если линия 1-3 будет иметь также активное сопротивление, условие (10) не изменится.

Интересно отметить, что ОСР этой ЭС будет без «дырок», если БУ будет назначен любой другой узел. На рис. 1.4 представлены ГМ и ОСР 3-х узловой радиальной ЭС с параметрами $V_1=V_2=V_3=110$ кВ, $Z_{12} = 20+j40$ Ω , $Z_{13}=j70$ Ω при различном назначении БУ.

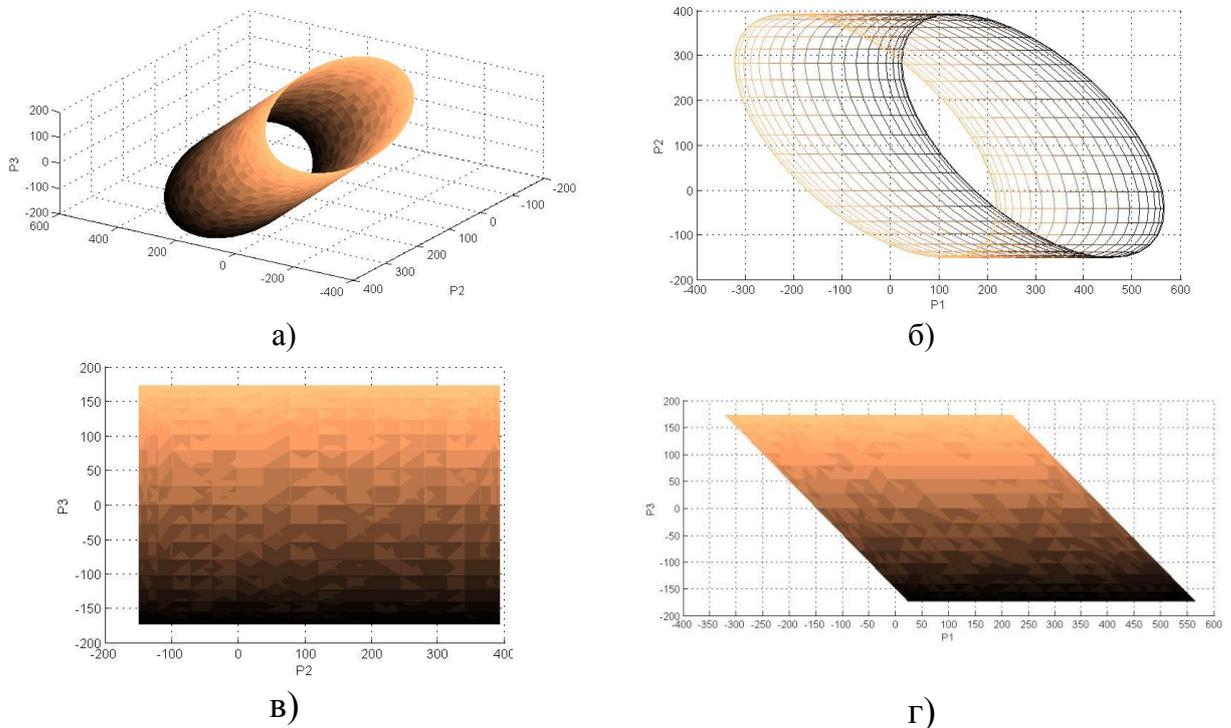


Рисунок 1.4 - ГМ (а); ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой» (б) при БУ-3; ОСР при БУ-1 (в) и БУ-2 (г)

Согласно рис. 1.4.а ГМ этой ЭС представляет собой полый эллипсоидный цилиндр. Проекция ГМ вдоль оси активной мощности узла 3 представлена на рис. 1.4.б, имеет вид, аналогичный рис. 1.3, и является ОСР этой ЭС при назначении БУ-3. Если узел 1 будет назначен балансирующим, это фактически означает разделение ЭС на две подсистемы, режимы которых не зависят друг на друга. Работа первой подсистемы определяется только режимом узла 2, а другой – режимом узла 3. Отсюда следует, что множеством УР ЭС будет область, ограниченная прямоугольником, длина сторон которого определяются максимальными величинами мощности, получаемыми/выдаваемыми из/в БУ-1 узлами 2 и 3 соответственно, как представлено на рис. 1.4.в. Если узел 2 будет назначен балансирующим, ОСР будет ограничена параллелограммом, как показано на рис. 1.4.г.

Если уменьшить величину индуктивного сопротивления Z_{13} до $j45 \Omega$, усилив электрическую связь узла 1 с БУ-3, то тогда, хотя ГМ также будет представлять собой эллипсоидный полый цилиндр (рис. 1.5.а), условие (10) будет выполняться, и «дырка» в ОСР исчезнет, как показано на рис. 1.5.б. ОСР при других БУ на рис. 1.5.в-г качественно не изменятся.

Согласно рис. 1.5 все ОСР являются выпуклыми, однако для рис. 1.5.б это не совсем так. В качестве подтверждения рассмотрим УР, которому соответствует точка A на рис. 1.5.б, расположенная на крайнем слева огибающем эллипсе. В этом УР узел 2 вырабатывает 100 МВт, БУ-3 – выдает максимальную активную мощность (рис. 1.5.г), которую может передать ЛЭП 3-1, а узел 1 является потребителем. Т.к. этот УР расположен на границе ОСР, он является ПР с вырожденной матрицей Якоби из-за достигнутого предела (максимума) передаваемой мощности по линии 1-3. Предположим, что УР будет изменяться в горизонтальном направлении, согласно синей утолщенной стрелке, т.е. при увеличении мощности в узле 1 и неизменной генерируемой мощности 100 МВт в узле 2. Так как мощность узла 2 не изменяется, увеличение мощности в узле 1 будет сопровождаться соответствующим уменьшением мощности БУ-3, как показано на рис. 1.5.г.

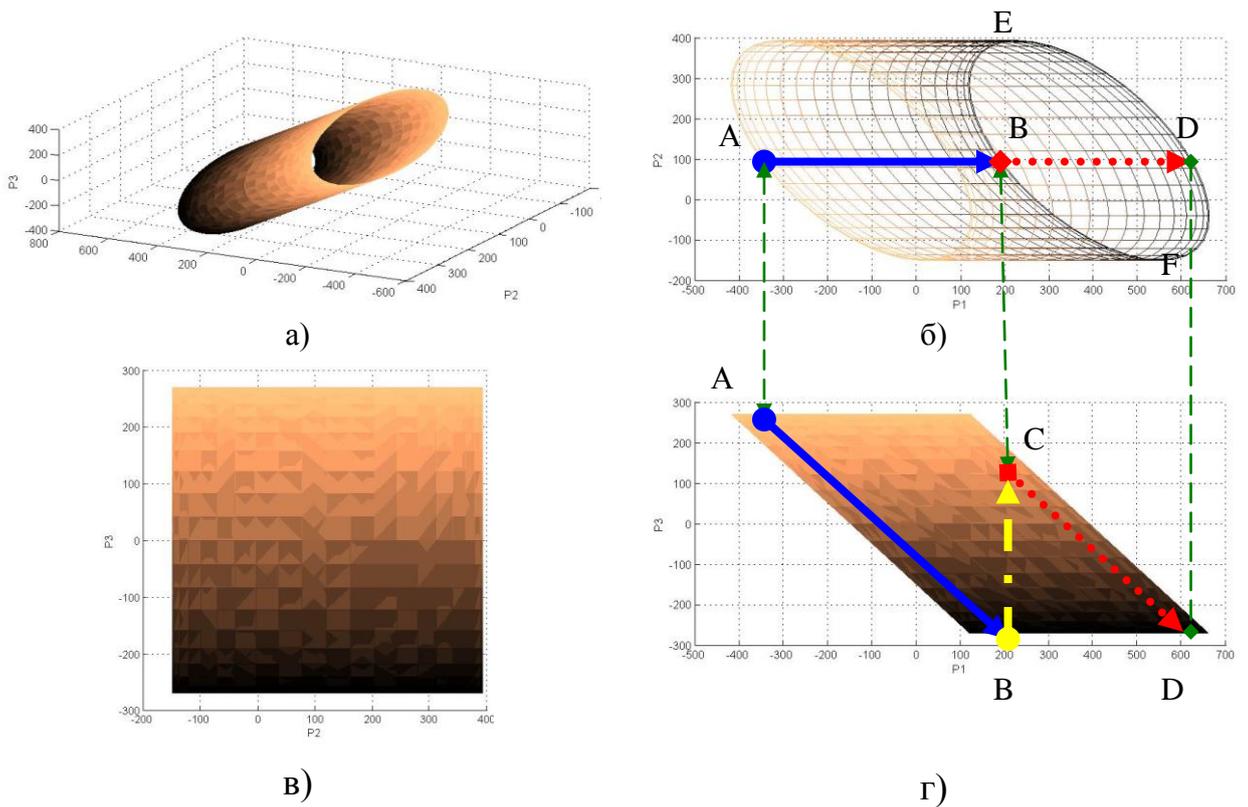


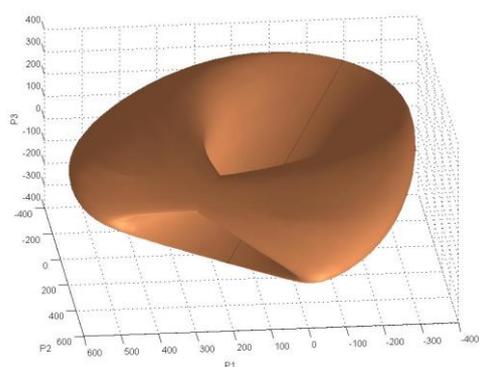
Рисунок 1.5 - ГМ и ОСР 3-х узловой радиальной ЭС

Такое увеличение мощности в узле 1 возможно, пока не будет достигнут предел мощности передаваемой линией 1-3. Этому соответствует точка *B* на рис. 1.5.б,г, т.е. ПР с вырожденной матрицей Якоби и минимально возможной мощностью БУ-3. Согласно рис. 1.5.г дальнейшее изменение УР в этом направлении невозможно, т.к. достигнут предел мощности в БУ-3, однако, согласно рис. 1.5.б это можно сделать по пунктирной красной стрелке. Почему такое возможно? Обратимся снова к эллипсу рис. 1.1. Горизонтальная линия, расположенная выше оси абсцисс и пересекающая эллипс в двух точках, позволяет объяснить это. Две точки пересечения горизонтальной линии с эллипсом мощностей соответствуют двум УР с одинаковыми значениями мощности узла 2. Точка во II квадранте соответствует эксплуатационному УР, в то время как точка в I квадранте соответствует статически неустойчивому УР, когда нет никакой электропередачи, оба узла вырабатывают активную мощность, которая расходуется только на потери. Поэтому с математической точки зрения

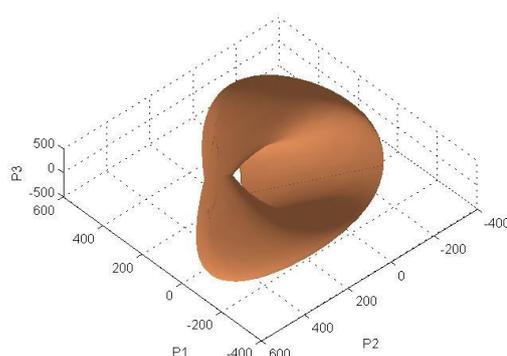
начало движения УР из точки B в точку D будет сопровождаться мгновенным перемещением точки (режима) на противоположную сторону цилиндра ГМ, для которой стороны эллипсов расположены в I квадранте на рис. 1.1. Т.к. переход в I квадрант сопровождается мгновенным изменением потерь в линии 1-2, то для сохранения баланса мощности БУ-3 должен скачкообразно изменить свою мощность, как показано желтой штрихпунктирной стрелкой на рис. 1.5.г. Дальнейшее перемещение УР будет происходить на противоположной (статически неустойчивой) стороне цилиндра ГМ (невидимой на рис. 1.5.г), как показано красными пунктирными стрелками на рис. 1.5.б,г, до тех пор, пока в точке D снова не будет достигнут предел мощности по линии 1-3.

Таким образом, хотя на рис. 1.5.б ОСР $AEDFA$, заполненная эллипсами, кажется выпуклой, но УР, соответствующие области $BEDFB$ (крайнего правого эллипса) являются внеэксплуатационными и статически неустойчивыми, с вырожденной матрицей Якоби на ее границе. В то же самое время, если ОСР определяется на основе последовательных утяжелений, как это было сделано ранее при анализе этого рисунка, расчетной ОСР будет область $AEBFA$, которая является невыпуклой.

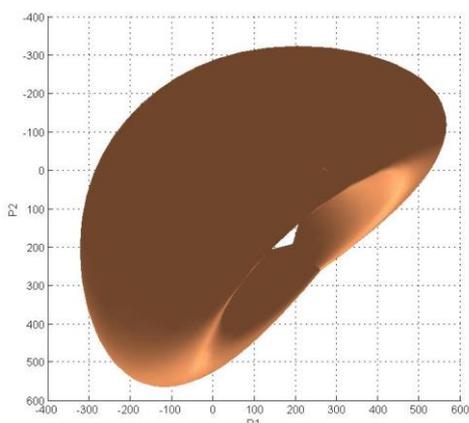
ГМ для 3-х узловой радиальной ЭС представляет собой полый цилиндр, который является вырожденным случаем тора. Если 3-х узловую ЭС на рис. 1.4 сделать кольцевой, т.е. добавить ветвь 2-3 с сопротивлением $Z_{23} = Z_{13} = j70 \Omega$, то ГМ и ОСР примут вид, как показано на рис. 1.6. Согласно рис. 1.6.а-б, где представлен вид ГМ с двух ракурсов, ее изображение напоминает «полый перстень». Поэтому на рис. 1.6.в-е вид каждой проекции ГМ вдоль оси активной мощности БУ на плоскость активной мощности других узлов, т.е. вид соответствующей ОСР, представлен с обеих ее сторон. Рис. 1.6.в-г показывает ОСР при БУ-3. Рассматриваемая система является симметричной относительно узла 3. Поэтому ОСР при БУ-2 (рис. 1.6.д) и БУ-1 (рис. 1.6.е) будут иметь похожий вид. На рис. 1.7 ГМ и ОСР этой ЭС представлены в виде «прозрачной» каркасной поверхности.



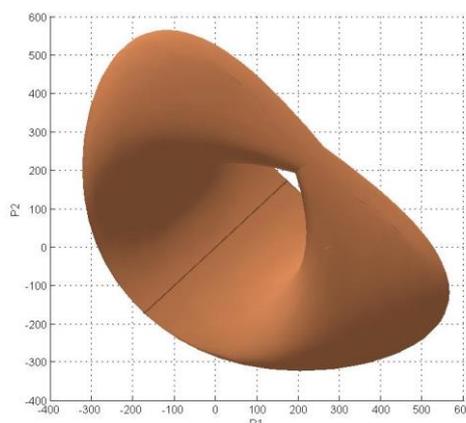
а)



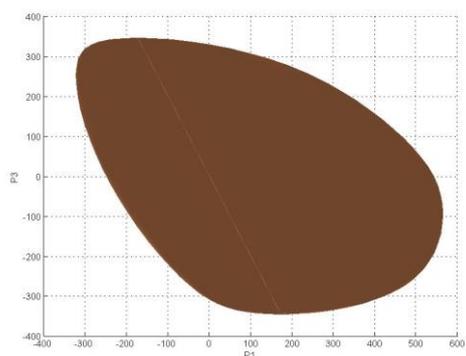
б)



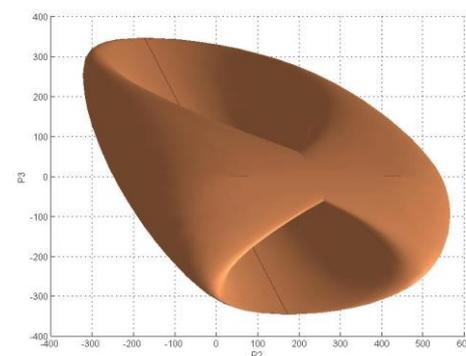
в)



г)



д)



е)

Рисунок 1.6 - ГМ (а)-(б) и ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой» при БУ-3 (в)-(г); ОСР при БУ-2 (д) и БУ-1 (е); $V_1=V_2=V_3=110$ кВ, $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=j70 \Omega$

Для рассматриваемой ЭС условия (8) также не удовлетворяется для БУ-3, поэтому на рис. 1.6.в-г и 1.7.в обнаруживается «дырка» в ОСР при БУ-3. Если для этой ЭС усилить связь узла 3 с остальными, положив $Z_{23}=Z_{13}=j45 \Omega$, то ГМ и ОСР примут вид, как представлено на рис. 1.8-1.9. Хотя ГМ такой ЭС также чем-то напоминает перстень и имеет «сквозное отверстие» на рис. 1.8.б и 1.9.б, но все ее проекции на координатные плоскости мощностей, т.е. ОСР, являются односвязанными; условие (8) выполняется для всех БУ.

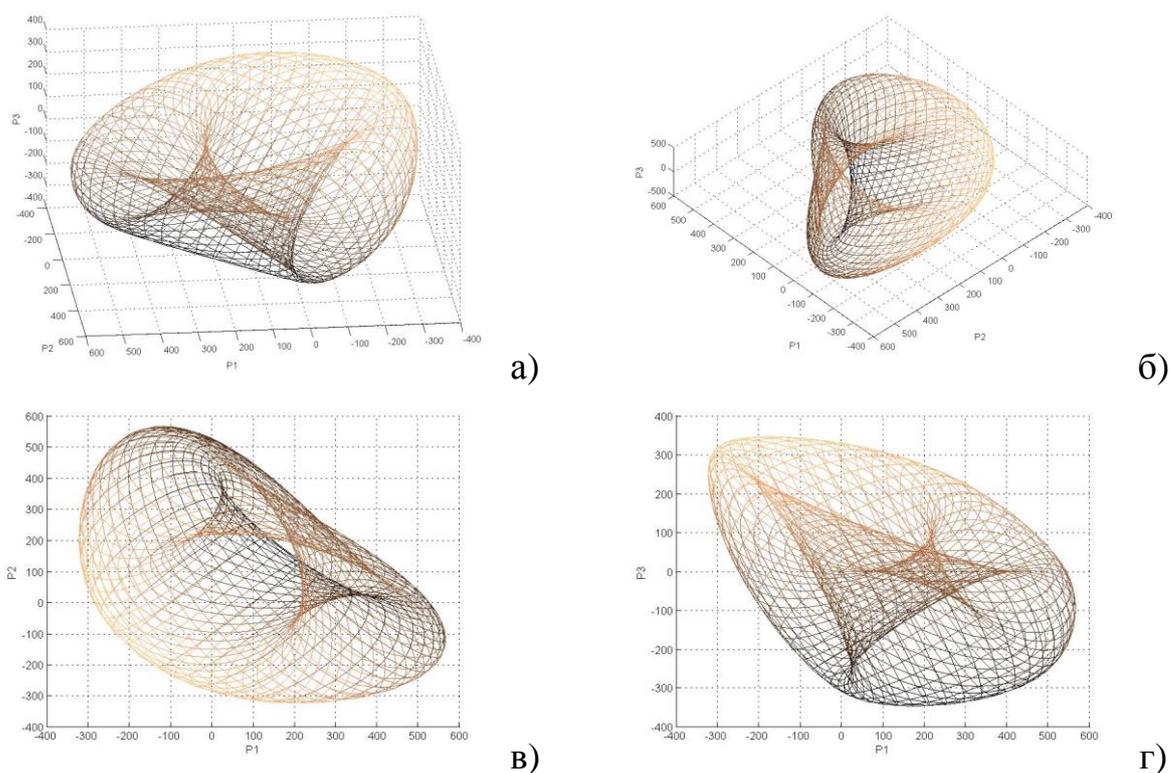
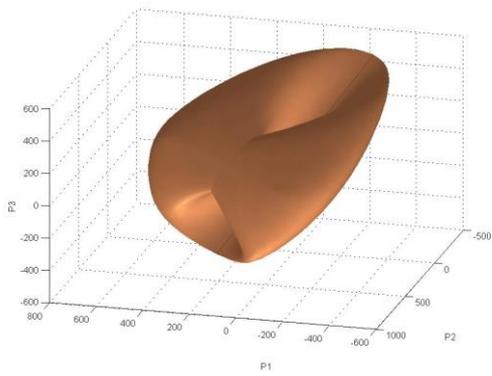
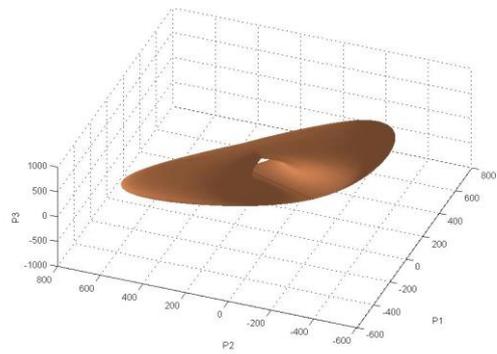


Рисунок 1.7 - ГМ (а)-(б) и ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой» при БУ-3 (в); ОСР при БУ-1(2) (г), представленные в виде прозрачной каркасной поверхности; $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = j70 \Omega$

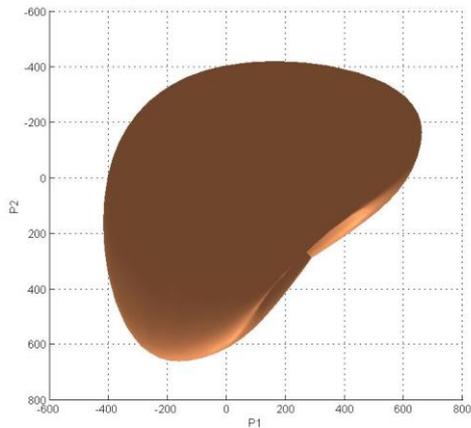
Рассмотрим теперь влияние активных сопротивлений линий на ГМ и ОСР. На рис. 1.10-1.11 представлены ГМ и ОСР для ЭС с параметрами $V_1 = V_2 = V_3 = 110$ кВ, $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$ и $Z_{13} = Z_{23} = 31.5 + j63 \Omega$ ($|Z_{13}| = |Z_{23}| \approx 70 \Omega$). Вид ГМ такой ЭС немного изменился по сравнению с рис. 1.6-1.7, однако также напоминает «перстень»; условия (8) не удовлетворяются для БУ-3, и в соответствующей ОСР (рис. 1.10.в-г и рис. 1.11) наблюдается «дырка». Если усилить связь узла 3 с остальными, положив $Z_{13} = Z_{23} = 20.25 + j40.6 \Omega$ ($|Z_{13}| = |Z_{23}| \approx 45 \Omega$), ГМ и ОСР примут вид, как показано на рис. 1.12-1.13. ГМ этой ЭС уже не будет напоминать «перстень», а похожа на экзотический фрукт с выпуклым шестигранником вместо листиков. Вместо сквозного отверстия рис. 1.10-1.11 на рис. 1.12-1.13 в зоне шестигранника ГМ появляется ячеистая структура, напоминающая конструкцию «мыльных трехгранных пузырей», формирующих выпуклую шестиконечную звезду. Все ОСР являются односвязными, условие (8) выполняется для любого БУ.



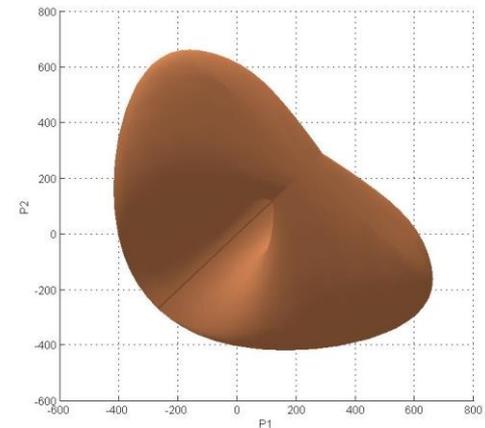
а)



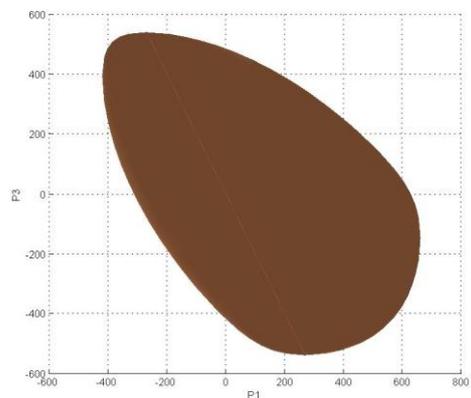
б)



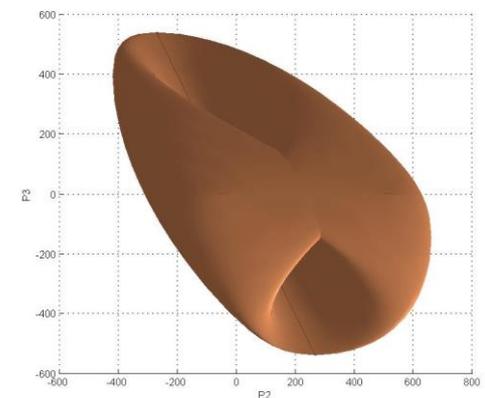
в)



г)



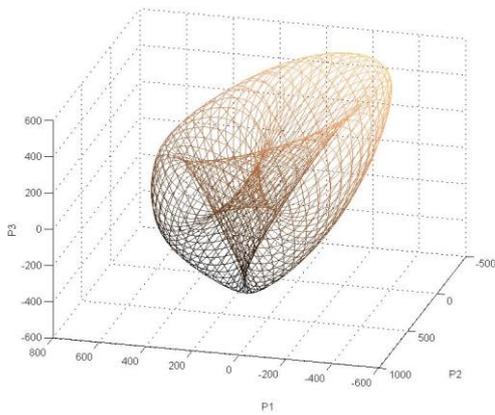
д)



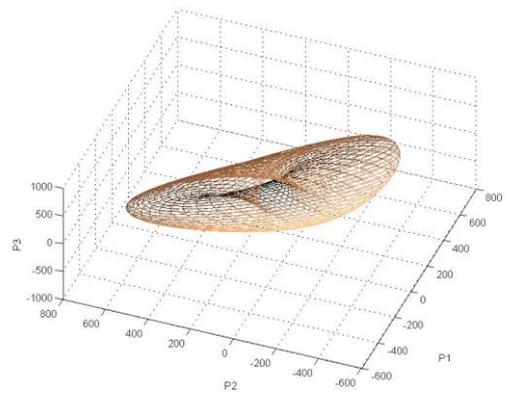
е)

Рисунок 1.8 - ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(г) 3-х узловой ЭС;
 $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = j45 \Omega$

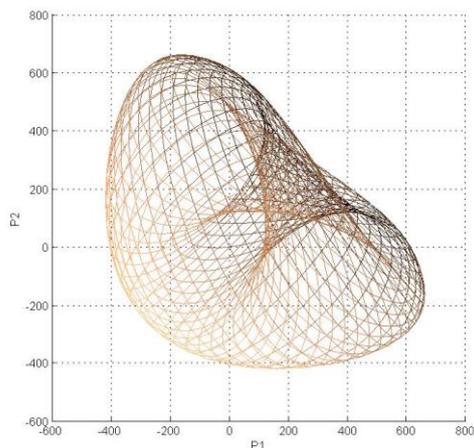
Известно, что система УУР может иметь несколько решений при заданных исходных данных, одни из которых статически устойчивые, другие нет. Если в ЭС все линии не являются чисто индуктивными, тогда количество решений соответствует количеству пересечений ГМ вектором заданных мощностей, направленным параллельно оси активной мощности БУ. В случае, если имеются также чисто индуктивные сопротивления, то даже одна точка пересечения с ГМ может соответствовать нескольким решениям.



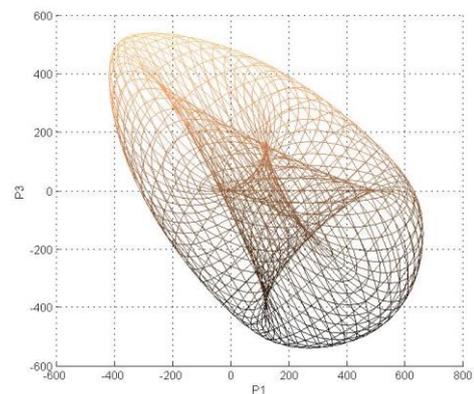
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.9 - ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(г) 3-х узловой ЭС,
представленные в виде прозрачной каркасной поверхности;
 $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = j45 \Omega$

Так, например, для рассмотренной ранее 3-х узловой радиальной ЭС каждая точка цилиндра соответствует двум решениям, одно из которых может быть статически устойчивым. Статически устойчивые режимы ЭС располагаются на той части ГМ, которой соответствуют меньшие значения активной мощности БУ. УР 3-х узловой кольцевой ЭС, расположенные в области шестиконечной звезды, являются статически неустойчивыми.

Таким образом, использование ГМ и рассмотрение ОСР как проекции ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство мощностей остальных узлов обнаруживает, что вид ОСР, ее граница, т.е. ПР, зависят от выбора БУ.

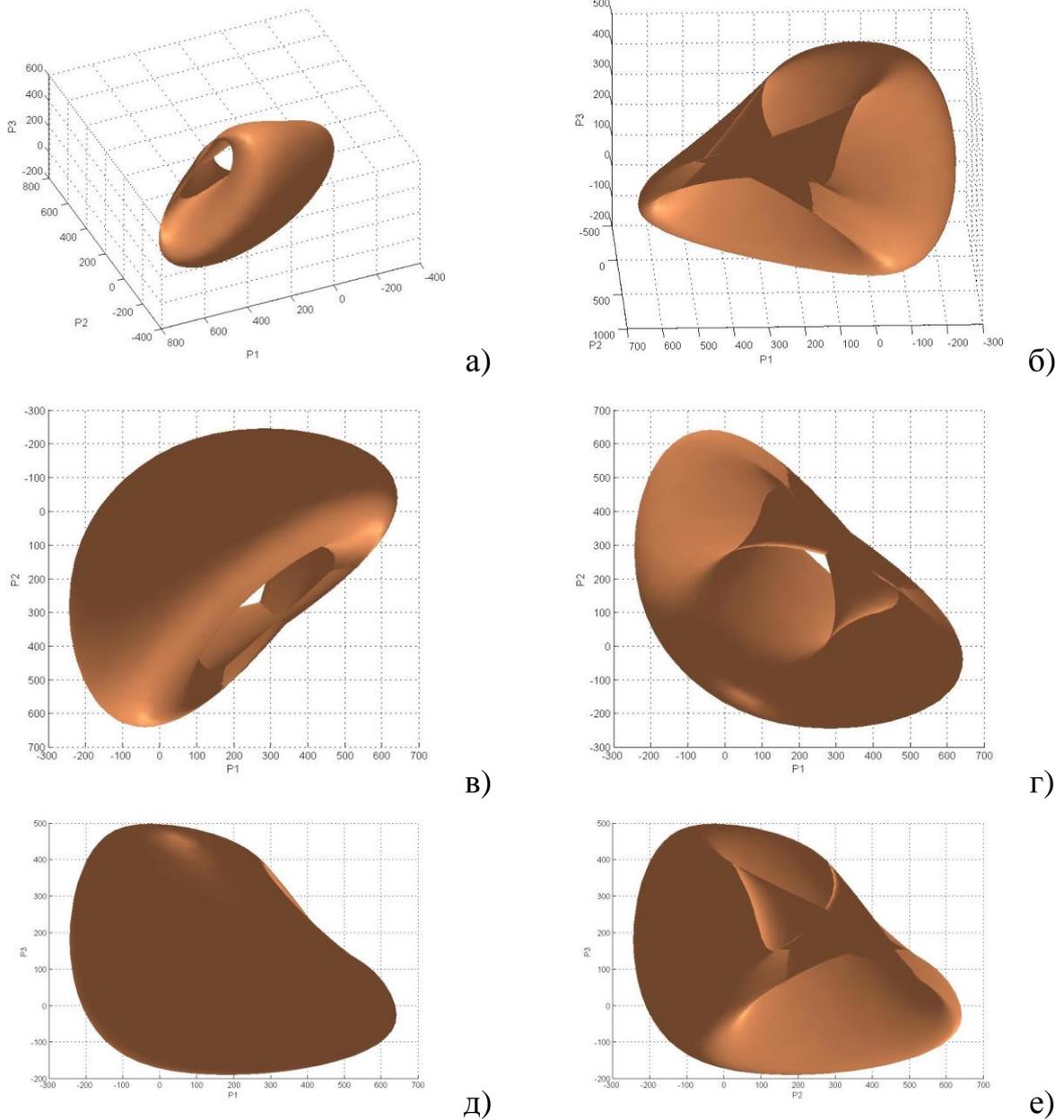
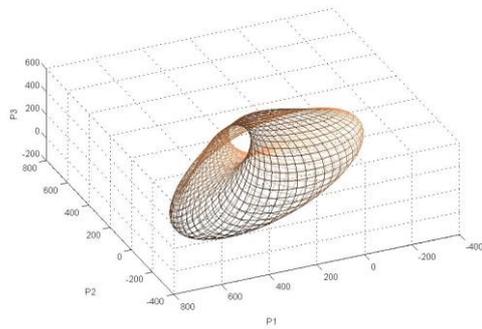


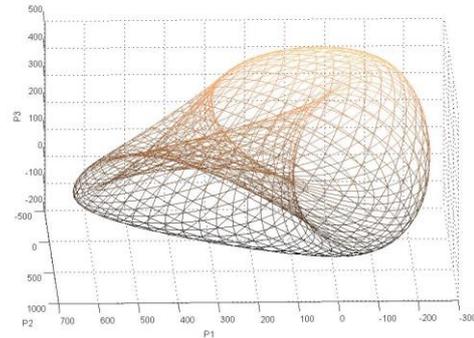
Рисунок 1.10 - ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(е) 3-х узловой ЭС;
 $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = 31.5 + j63 \Omega$

На рис. 1.14.а представлены линии предельных режимов 4-х узловой кольцевой схемы с тремя PV узлами и одним PQ узлом, спроецированные на координатную плоскость мощностей двух PV узлов при варьировании мощностей в PV узлах и неизменной мощности нагрузки в PQ узле. Каждая линия соответствует назначению балансирующим одного из трех PV узлов. На рис. 1.14.б эти линии, которые также соответствуют вырожденности матрицы Якоби потокораспределения при соответствующем БУ, представлены в пространстве углов. Параметры этой 4-х узловой системы

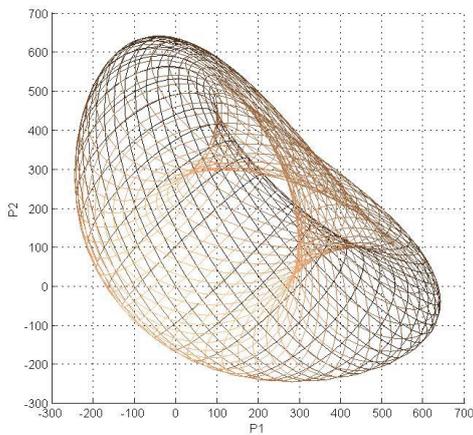
следующие: $V_1=107$ кВ; $V_2=109$ кВ; $V_3=113$ кВ; $P_4=-60-j46$ МВА;
 $Z_{12}=19.11+j32.994 \Omega$; $Z_{14}=5.681+j8.379 \Omega$; $Z_{23}=19.536+j14.916 \Omega$;
 $Z_{34}=13.386+j28.635 \Omega$.



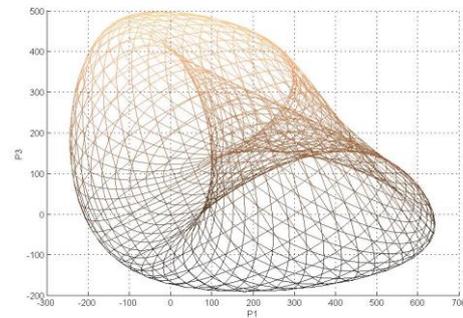
а)



б)



в)

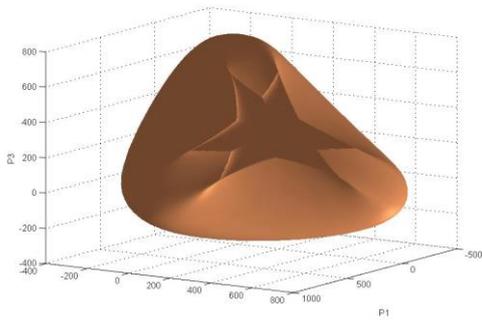


г)

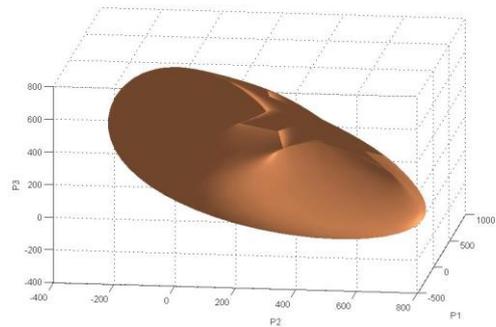
Рисунок 1.11 - ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(г) 3-х узловой ЭС, представленные в виде прозрачной каркасной поверхности; $Z_{12} = 20+j40\Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = 31.5+j63 \Omega$

Как видно из рис. 1.14.а линии предельных режимов касаются между собой. Это происходит в тех точках, где вектор нормали линии ПР вертикален или горизонтален. Ранее указывалось, что предельный режим характеризуется тем, что одна или больше компонент вектора нормали имеют нулевое значение. Для одной из представленных линий предельных режимов, а именно полученной при назначении балансирующим узла, мощность которого не представлена на рисунке, все вектора нормали ГМ в предельных режимах будут параллельны представленной координатной плоскости, а следовательно, будут равны векторам нормали этой линии ПР. Поэтому горизонтальные и вертикальные векторы нормали этой линии будут

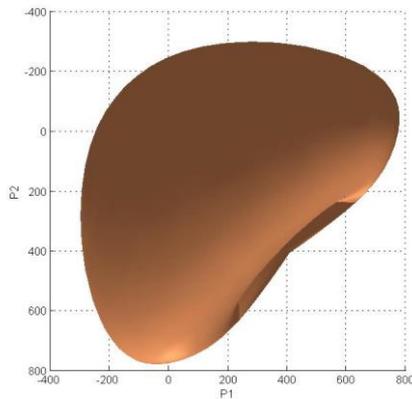
иметь две нулевые компоненты. Следовательно, такие ПР будут предельными и при другом соответствующем БУ.



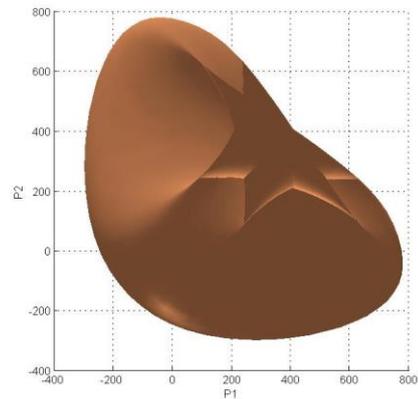
а)



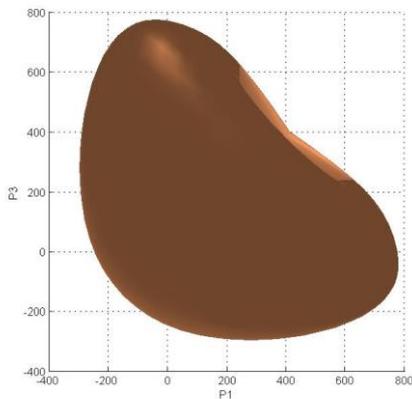
б)



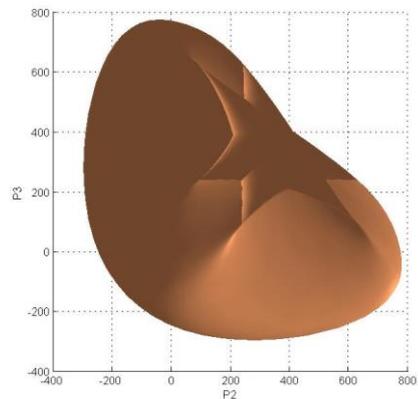
в)



г)



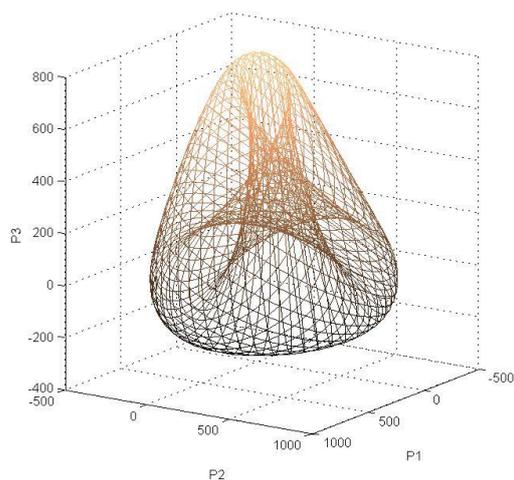
д)



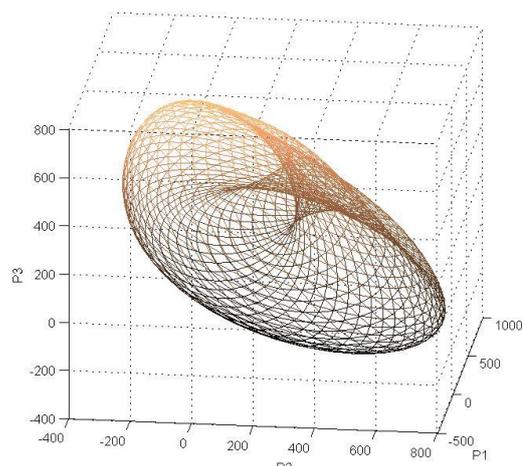
е)

Рисунок 1.12 - ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(е) 3-х узловой ЭС;
 $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = 20.25 + j40.5 \Omega$

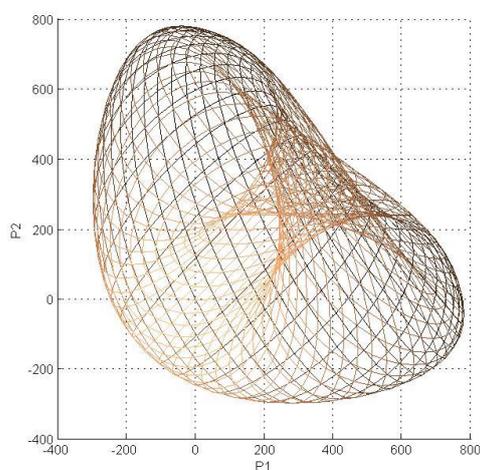
ГМ консервативной ЭС представляет собой «плоскую» гиперповерхность, т.к. отсутствуют потери активной мощности, и мощности узлов удовлетворяют уравнению $\sum P_k = 0$. На рис. 1.15 в качестве примера показана ГМ 3-х узловой консервативной ЭС ($Z_{12} = Z_{13} = Z_{23} = j45 \Omega$) с PV-узлами и ее ОСР. На рис. 1.15.а-г представлен вид ГМ с разных ракурсов.



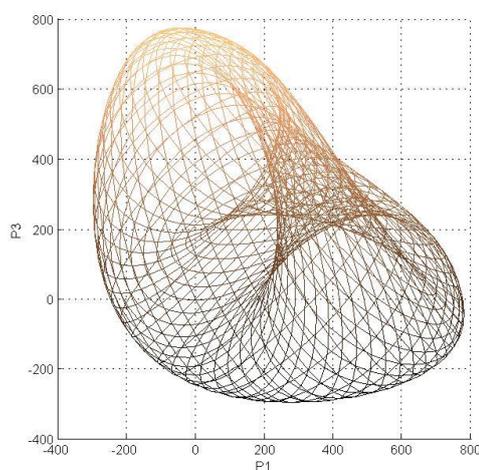
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.13- ГМ (а)-(б) и ОСР (в)-(г) 3-х узловой ЭС, представленные в виде прозрачной каркасной поверхности;
 $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$, $Z_{13} = Z_{23} = 20.25 + j40.5 \Omega$

Эта ГМ представляет собой «плоский» эллипсоид. Только край «плоской» ГМ соответствуют ПР и только его проекция вдоль оси активной мощности любого БУ на подпространство всех других узловых мощностей является границей ОСР консервативной ЭС. Поэтому ПР консервативной ЭС не зависит от месторасположения БУ. На рис. 1.15.д представлена ОСР при БУ-3. На рис. 1.15.е представлена та же ОСР в виде «прозрачной» каркасной поверхности. Интересно заметить также, что одна «сторона» этой плоской ГМ соответствует аperiodически устойчивым УР, другая «сторона» является статически неустойчивой. Т.е. одна и та же точка ГМ консервативной ЭС соответствует устойчивому и неустойчивым УР ЭС.

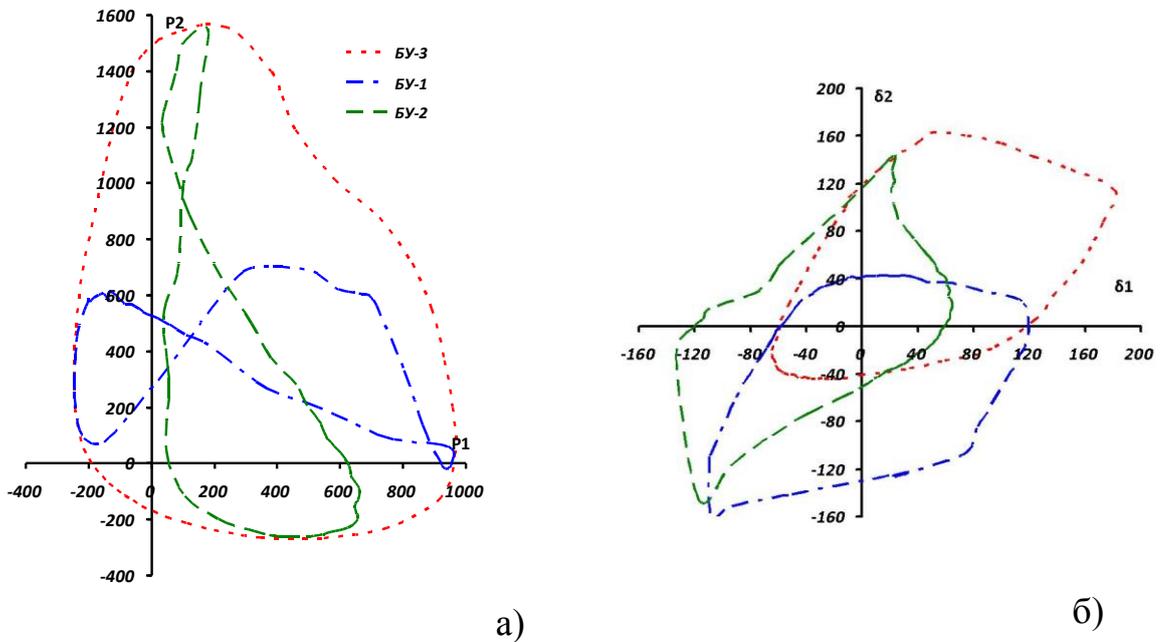
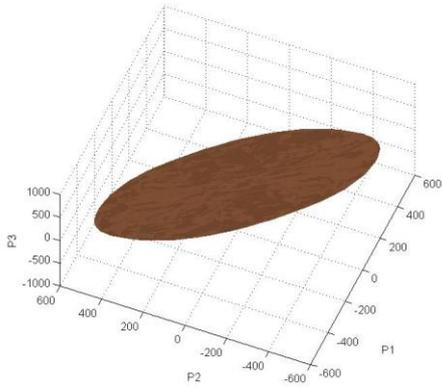


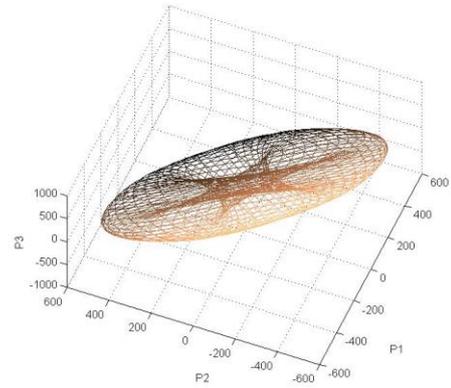
Рисунок 1.14 - Линии предельных режимов 4-х узловой кольцевой ЭС

Так, например, каждая точка «плоской» ГМ 3-х узловой консервативной ЭС с PV-узлами на рис. 1.15.д-е отвечает одному решению на границе ОСР, двум решениям - внутри ОСР, но вне шестиугольной звезды, как бы «сформированной» наложением двух треугольников, а внутри каждого такого треугольника еще двум дополнительным решениям, причем только одно решение является статически устойчивым. В области пересечения треугольников шестиконечной звезды на рис. 1.15.е каждая точка ГМ соответствует 6-ти решениям, в том числе в начале координат [345], т.е. когда мощности всех узлов равны нулю. При нулевых мощностях всех узлов, в четырех решениях, в том числе статически устойчивом, потоки мощности в линиях равны нулю. В других двух решениях происходит замкнутая циркуляция потока активной мощности по контуру (при нулевых мощностях во всех узлах!!!), причем сумма углов в линиях по контуру равна $\pm 360^0$ (в зависимости от решения), а не 0^0 , как для обычных УР. Исследования показали [284], что для кольцевой 6-узловой позиционной модели некоторые такие вторые решения могут быть статически устойчивыми, при этом потери реактивной мощности в ЭС для них

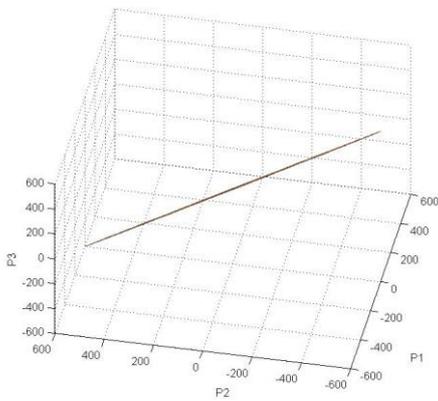
значительно превышают потери обычного решения, соответствующего реальному УР ЭС.



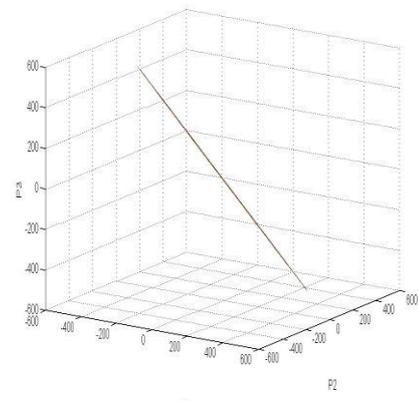
а)



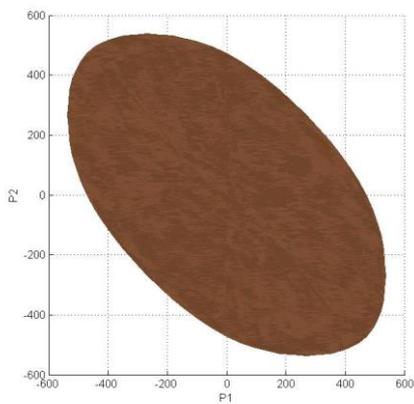
б)



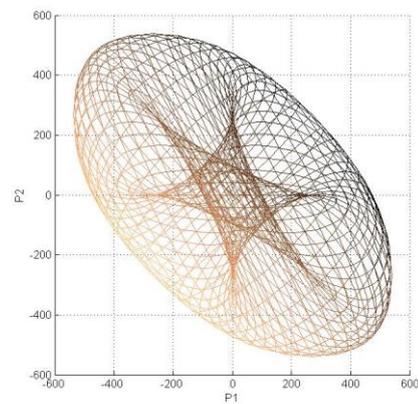
в)



г)



д)



е)

Рисунок 1.15 - ГМ (а)-(г) и ОСР (д)-(е) 3-х узловой консервативной ЭС

Гиперповерхность мощностей ЭС позволяет дать геометрическое объяснение, почему для расчета УР необходимо обязательно использовать БУ, т.е. активную мощность одного из узлов не задавать, а рассматривать как переменную. Обычно такую необходимость объясняют тем, что до расчета УР точное значение потерь не известно. Поэтому невозможно задать

мощности узлов точно, чтобы обеспечить совместность УУР, т.е. их разрешимость. Но такое рассмотрение не может объяснить, почему для расчета УР консервативной (т.е. без потерь активной мощности) ЭС со всеми PV узлами, все равно требуется БУ. В консервативной ЭС потери активной мощности равны нулю, поэтому задать активные мощности во всех узлах, чтобы обеспечить совместность УУР, довольно легко, однако без БУ расчет режима невозможен. Причину этого довольно легко объяснить с помощью ГМ. Каждый УР ЭС соответствует определенной точке на ГМ и наоборот. ГМ есть отображение всей совокупности УР ЭС, в том числе гипотетических (неустойчивых), в пространстве узловых мощностей. Вне ГМ УР не существуют. Как любая гиперповерхность, ГМ имеет меру ноль в рассматриваемом пространстве. С точки зрения теории вероятности это означает, что шанс задать координаты точки на ГМ (мощности узлов) без принятия во внимание их функциональной зависимости, так чтобы они отвечали уравнению гиперповерхности (уравнениям потокораспределения) равен нулю. Поэтому, чтобы получить координаты точки на ГМ (т.е. рассчитать режим), необходимо рассматривать одну из координат этой точки (активную мощность балансирующего узла) как зависимую переменную. Поэтому все вычислительные модели, которые используют УУР, всегда применяют явно или неявно БУ – не только модели расчета УР, но также вычислительные модели оптимизации режима, оценки состояния, статической устойчивости и т.д.

Следует заметить, что исследования ОСР 3-х узловых ЭС уже ранее проводились рядом авторов [32], [98], [99], [167], [345], и т.д. Однако в этих работах анализ ОСР основывался на построении линий вырожденности матрицы Якоби в пространстве зависимых переменных, с их последующим отображением в пространство мощностей, без выявления влияния БУ. Использование ГМ позволяет лучше понять специфику и структуру ОСР, а также воздействие БУ. В частности, она позволяет объяснить причину возникновения нехарактерных случаев, когда матрица Якоби вырождена, т.е.

когда «сливаются» два решения УУР в одно, как, например, в точке B на рис. 1.5.б, и «исчезают» правее точки B , однако возможно дальнейшее «геометрическое» утяжеление режима к точке D . Рассмотрение всех совокупностей УР ЭС как ГМ позволяет использовать мощные средства теорий бифуркации, особенностей и катастроф, рассматривая ГМ как поверхность равновесий («катастроф») в терминах этих теорий. Проекция ГМ на плоскость управляющих параметров (мощностей узлов) имеет особенности, т.е. сборки и складки, и теория особенностей позволяет предсказывать «геометрию» «катастроф», т.е. перескоков из одного равновесия в другое при изменении управляющих параметров [6]. Анализ представленных ГМ показывает, что границы ОСР ЭС, т.е. ПР, являются результатом проектирования сборок ГМ, а линии шестиугольной звезды получаются в результате проектирования складок ГМ.

1.4 Вектор нормали гиперповерхности мощностей и предельных режимов

Отображение всей совокупности установившихся режимов ЭС посредством ГМ позволяет использовать инструментарий дифференциальной геометрии для их исследования. Разновидностью таких инструментов являются касательные гиперплоскости к ГМ и их векторы нормали. Выражение для гиперплоскости, касательной к ГМ, можно получить, если воспользоваться линеаризованными уравнениями потокораспределения:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_{PQ+PV} \\ \Delta V_{PQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta P_{PQ+PV} \\ \Delta Q_{PQ} \\ \Delta P_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1a)$$

В отличие от обычных линеаризованных УУР, используемых при расчете УР, в этой системе явно представлено также линеаризованное уравнение баланса активной мощности в БУ. Следовательно, матрица Якоби

в (1а) является прямоугольной, у нее число строк на единицу превышает число столбцов. Согласно теории линейной алгебры, строки такой прямоугольной матрицы являются линейно-зависимыми [36], а значит, всегда существует ненулевой вектор $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ такой, что

$$\begin{bmatrix} \lambda^{P^T} \\ \lambda^{Q^T} \\ \lambda_b^P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (16)$$

Поэтому умножение (1а) слева на вектор-строку $\lambda^T = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]$ с учетом (16) дает

$$\lambda^{P^T} \Delta P_{PV+PQ} + \lambda_b^P \Delta P_b + \lambda^{Q^T} \Delta Q_{PQ} = 0. \quad (1в)$$

Выражение (1в) есть уравнение гиперплоскости, касательной к ГМ в пространстве активных мощностей всех узлов и реактивных мощностей PQ узлов [51]. Поэтому (1в) определяет вектор $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ как вектор нормали этой касательной гиперплоскости, а следовательно, самой ГМ.

Согласно (16) вектор нормали ГМ $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ может быть получен из решения системы линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^{P^T} \\ \lambda^{Q^T} \end{bmatrix} = -\lambda_b^P \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T. \quad (2)$$

В этой СЛУ матрица коэффициентов является транспонированной матрицей Якоби потокораспределения (1.2.4б). Вектор нормали определяется системой (2) с точностью до множителя. Задав конкретное значение компоненты БУ $\lambda_b^P \neq 0$, остальные можно найти решением (2). В дальнейшем для сокращения записи условимся, что нижние индексы, которые

определяют тип узлов, не будут указываться явно, если тип узлов понятен из контекста.

Для выявления свойств компонент вектора нормали рассмотрим уравнение общего баланса активной мощности ЭС, выделив отдельно активную мощность БУ P_b ,

$$\Delta P^\Sigma = P_b + \sum_{k \neq b} P_k - \pi = 0, \quad (3a)$$

где π есть потери активной мощности в ЭС. Активная мощность БУ, как и потери, является зависимыми переменными. Поэтому дифференцирование (3a) по независимым переменным (заданным мощностям узлов) дает:

$$\begin{aligned} [\partial \Delta P^\Sigma / \partial P] &= [\partial P_b / \partial P] + e^T - [\partial \pi / \partial P] = 0^T; \\ [\partial \Delta P^\Sigma / \partial Q] &= [\partial P_b / \partial Q] - [\partial \pi / \partial Q] = 0^T, \end{aligned} \quad (3б)$$

где $[\partial \pi / \partial P]$ и $[\partial \pi / \partial Q]$ есть векторы относительных приростов активных потерь по активным и реактивным мощностям узлов соответственно. Частные производные $[\partial P_b / \partial P]$ и $[\partial P_b / \partial Q]$ можно получить, если продифференцировать уравнение баланса активной мощности БУ по независимым переменным:

$$\begin{aligned} [\partial \Delta P_b / \partial P] &= [\partial P_b / \partial P] + [\partial \Delta P_b / \partial \delta][\partial \delta / \partial P] + \\ &+ [\partial \Delta P_b / \partial V][\partial V / \partial P] = 0^T; \\ [\partial \Delta P_b / \partial Q] &= [\partial P_b / \partial Q] + [\partial \Delta P_b / \partial \delta][\partial \delta / \partial Q] + \\ &+ [\partial \Delta P_b / \partial V][\partial V / \partial Q] = 0^T. \end{aligned} \quad (3в)$$

В свою очередь, для получения элементов подматриц в (3в) вида $\partial / \partial \delta$ и $\partial / \partial V$, продифференцируем УУР (1.2.1) по независимым переменным:

$$\begin{vmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \partial \delta / \partial P & \partial \delta / \partial Q \\ \partial V / \partial P & \partial V / \partial Q \end{bmatrix} + [E] = [0]. \quad (3г)$$

Подстановка (3г) в (3в) дает

$$\begin{vmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{vmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial P_b / \partial P^T \\ \partial P_b / \partial Q^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \Delta P_b / \partial \delta^T \\ \partial \Delta P_b / \partial V^T \end{bmatrix}. \quad (3д)$$

Использование (3б) в (3д) дает

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}} \end{vmatrix}^T \begin{bmatrix} e - \partial \pi / \partial P^T \\ -\partial \pi / \partial Q^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta^T} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \mathcal{V}^T} \end{bmatrix}. \quad (3e)$$

Сравнение (3e) с (2) позволяет получить следующие выражения взаимосвязи компонент вектора нормали ГМ:

$$\lambda_m^P = (1 - \partial \pi / \partial P_m) \lambda_b^P; \quad (4a)$$

$$\lambda_m^Q = -\partial \pi / \partial Q_m \lambda_b^P. \quad (4b)$$

Вектор нормали ГМ не зависит от выбора БУ, т.к. при смене БУ решение СЛУ (2) не изменится, если компоненту вектора нормали нового БУ установить равной значению этой компоненты, полученной из (2) при старом БУ. Учет этого и (4) позволяет получить выражения относительных приростов потерь при новом БУ:

$$\partial \pi_k / \partial P_m = (\partial \pi_b / \partial P_m - \partial \pi_b / \partial P_k) / (1 - \partial \pi_b / \partial P_k); \quad (5a)$$

$$\partial \pi_k / \partial Q_m = (\partial \pi_b / \partial Q_m) / (1 - \partial \pi_b / \partial P_k), \quad (5b)$$

где $\partial \pi_b / \partial P_m$ есть относительный прирост потерь с БУ b , $\partial \pi_k / \partial P_m$ – то же самое с новым БУ k .

Рассмотрим особенности вектора нормали ГМ в ПР. Согласно (2) и (4) компоненты вектора нормали могут принимать различные значения. Предположим, что в какой-то точке ГМ компонента λ_k^P вектора нормали равна нулю. Согласно (4) это будет только в том случае, когда $1 - \partial \pi / \partial P_k = 0$, т.е.

$$\lambda_k^P = 0 \Rightarrow \partial \pi / \partial P_k = 1. \quad (6a)$$

Предположим, что узел k переназначается БУ в этой точке. Тогда скорректированная СЛУ (2) примет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = -\lambda_k^P \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_{PQ+PV}} \\ \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6b)$$

В этом случае условие (6b) определяет вырожденность матрицы Якоби потокораспределения, т.е. предельный режим ЭС. Поэтому согласно (6a) в ПР относительный прирост потерь активной мощности для БУ равен 1. Другими словами, в ПР БУ не способен поддержать режим одного или ряда

узлов ЭС. Все его попытки сбалансировать активную мощность в ЭС будут нивелироваться потерями активной мощности, обусловленными такими манипуляциями. БУ в ПР как бы теряет электрическую связь с частью или со всей ЭС. Это соответствует отсутствию БУ в вычислительной модели потокораспределения со всеми вытекающими последствиями.

При смене БУ в ПР, условия (6) удовлетворяться в общем случае не будут, если только компонента активной мощности вектора нормали для нового БУ не будет равна нулю. Простая система с четырьмя *PV* узлами на рис. 1.16 позволяет продемонстрировать это.

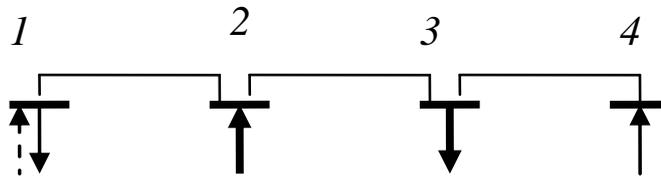


Рисунок 1.16 - 4-х узловая ЭС

В таблице 1.1 представлены мощности узлов P в МВт (знак минус соответствует генерации) и компоненты вектора нормали ГМ λ для исходного режима и для ПР с БУ-1, а также с БУ-4. Эти ПР получены в результате равного увеличения генерации в узле 2 и нагрузки в узле 3 методом последовательного утяжеления. Сопротивления линий были приняты $Z_{12}=Z_{34}=5+j10 \Omega$, $Z_{23}=20+j40 \Omega$ и $V_1=V_2=V_3=V_4=110 \text{ кВ}$.

ТАБЛИЦА 1.1 - ПАРАМЕТРЫ ПР 4-Х УЗЛОВОЙ ЭС

Узел	1	2	3	4
Исходный режим				
P	20	-50	50	-22.1951
λ	0.9259	0.9069	1.0231	1
ПР с БУ - 4				
P	20	-411.77	411.77	-465.27
λ	-1	-0.9794	0	0
ПР с БУ - 1				
P	-118.72	-171.51	171.51	-22.1951
λ	0	0	1	0.9775

Рассмотрим параметры ПР с БУ-4. Так как передача мощности через линию 2-3 сопровождается потерями активной мощности, БУ-4 поддерживает передачу этой мощности через линию 3-4. ПР достигается, когда наступит предел передаваемой мощности через линию 2-3. УР останется предельным, если БУ будет переназначен узел 3, так как, согласно таблице 1.1, его компонента вектора нормали равна нулю. Однако этот УР не останется предельным, если БУ будет назначен узел 1, т.к. его компонента вектора нормали не равна нулю и поэтому существует возможность увеличения генерации в узле 2 и нагрузки в узле 3. В ПР относительный прирост потерь для узла 4 с БУ-1 или 2 равен единице.

ПР с БУ-1 будет другим, т.к. в этом случае БУ-1 поддерживает УР через линию 1-2. С ростом передаваемой мощности по линии 2-3 относительный прирост потерь БУ-1 увеличивается. Как только он достигнет единицы, увеличение нагрузки в узле 3 станет невозможным. БУ-1 неспособен поддержать УР в узлах 3 и 4 в этом ПР. ПР останется предельным, если узел 2 станет БУ, так его компонента вектора нормали ГМ равна нулю. Этот УР не будет предельным, если БУ будет назначен узел 3 или 4, т.к. эти узлы имеют ненулевые компоненты вектора нормали. Предельные значения мощностей и потери с БУ-1 будут меньше, чем с БУ-4. В тоже самое время ПР с БУ-4 не будет статически устойчивым, если для оценки статической устойчивости будет применяться позиционная модель [54].

Влияние размещения БУ на получаемый ПР можно легко объяснить с помощью ГМ. Каждый УР ЭС соответствует определенной точке на ГМ и наоборот. Проекция ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство всех других задаваемых мощностей представляет собой ОСР [50]. Границы этой проекции, т.е. ОСР, соответствуют множеству ПР. Так как обычно ГМ не является «плоской», точки на ГМ, которые соответствуют границе такой проекции, т.е. ПР, будут иными при другом БУ. Поэтому изменение месторасположения БУ в ПР делает этот УР неопредельным.

Таким образом, в реальной ЭС ПР зависит от месторасположения БУ. Смена БУ в ПР делает режим неопредельным. Исключением является консервативная модель ЭС. Так например, ПР будут одинаковыми с БУ-1 и 4 для 4-х узловой консервативной ЭС. В таблице 1.2 представлены исходный режим и параметры ПР для этой ЭС с $Z_{12}=Z_{34}=j10 \Omega$, $Z_{23}=j40 \Omega$.

ТАБЛИЦА 1.2 - ПАРАМЕТРЫ ПР 4-Х УЗЛОВОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ ЭС

Узел	1	2	3	4
Исходный режим				
P	20	-50	50	-20
λ	1	1	1	1
ПР с БУ-4				
P	20	-322,5	322,5	-20
λ	1	1	0	0
ПР с БУ-1				
P	20	-322,5	322,5	-20
λ	0	0	1	1

В любой консервативной ЭС ПР останется предельным безотносительно выбора БУ. Это можно объяснить, если учесть следующее. Во-первых, когда отсутствуют активные сопротивления, вектором нормали ГМ всегда будет вектор $[e^T, 0^T, 1]^T$, т.к. в консервативной ЭС всегда выполняется соотношение $\sum P_k=0$. Во-вторых, в ПР размерность нуль-пространства матрицы СЛУ (16) будет равна двум. Поэтому вектор нормали, определяемый (6б), будет соответствовать другому вектору нормали ГМ в этой точке. Следовательно, в ПР вектор λ линейной комбинации векторов

$$\lambda = \beta [e^T, 0^T, 1]^T + [\lambda^{p^T}, \lambda^{q^T}, 0 (= \lambda_k^p)]^T \quad (7)$$

будет также вектором нормали в этом ПР. Возможны два случая с новым БУ k . Если $\lambda_k^p=0$, то вектор нормали останется неизменным в (6б). С другой стороны вектор λ в (7) будет новым вектором нормали с $\beta=-\lambda_k^p$. Это также соответствует вырожденности матрицы Якоби потокораспределения. Независимость ПР консервативной ЭС от месторасположения БУ легко объясняется также с помощью ГМ, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Интерпретация ГПР в подпространстве задаваемых мощностей узлов как граница проекции ГМ на это подпространство вдоль оси активной мощности БУ обнаруживает интересную связь между вектором нормали ГМ в ПР и вектором нормали ГПР. Согласно (6), в ПР компонента вектора нормали, соответствующая активной мощности БУ, равна нулю. Поэтому в ПР вектор нормали ГМ ортогонален оси активной мощности БУ и будет проецироваться на подпространство задаваемых мощностей в натуральную величину. Поэтому компоненты вектора нормали ГПР будут в точности равны соответствующим компонентам вектора нормали ГМ в ПР.

В случае использования РБУ матрица Якоби потокораспределения принимает вид (1.2.4г) и включает частные производные уравнений баланса активной мощности всех узлов. В ПР режиме эта матрица вырождена. Если обозначить один из узлов индексом b и представить левый собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению, в виде $\gamma = [\gamma^{P^T}, \gamma^{Q^T}, \gamma_b^P]^T$, тогда условия вырожденности матрицы (1.2.4г) можно записать в виде:

$$\mathcal{G}^T \gamma = \sum_{k \in S} \mathcal{G}_k^S \gamma_k^P = 0; \quad (8a)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^P \\ \gamma^Q \\ \gamma_b^P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (8b)$$

Выражение (8б) можно представить как

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta P_{PQ+PV}}{\partial V_{PQ}} \\ \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta_{PQ+PV}} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^P \\ \gamma^Q \end{bmatrix} = -\gamma_b^P \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{PQ+PV}} \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_{PQ}} \end{bmatrix}^T. \quad (8b)$$

Сравнение (8в) с (2) показывает, что вектор $\gamma = [\gamma^{P^T}, \gamma^{Q^T}, \gamma_b^P]^T$ является вектором $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ нормали ГМ. Поэтому условие (8а) может быть записано как

$$\mathcal{G}^T \lambda = \sum_{k \in S} \mathcal{G}_k^S \lambda_k^P = 0. \quad (9)$$

Таким образом, ПР с РБУ соответствует такая точка ГМ, в которой вектор нормали ГМ $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ ортогонален вектору коэффициентов участия узлов в РБУ \mathcal{G} . Для 2-х узловой схемы этому условию удовлетворяют точки E и F эллипса мощностей, как показано на рис. 1.17.

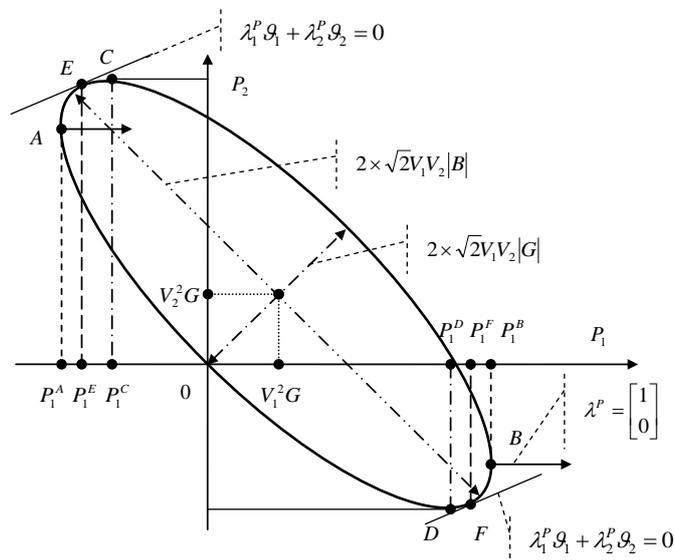


Рисунок 1.17 - Эллипс мощностей УР 2-х узловой ЭС и ПР

На этом рисунке указаны также ПР при БУ-1 (A и B) и 2 (C и D), также как ОСР. Как видно из этого рисунка, ПР при РБУ находятся не на границе, а внутри ОСР. Поэтому при использовании РБУ коэффициенты запаса статической устойчивости будут меньше, чем при одиночном БУ. При этом следует заметить, что оценка коэффициента запаса статической устойчивости на основе параметров ПР E будет некорректной и пессимистической, т.е. заниженной. Действительно, если произвести утяжеление, используя РБУ, вдоль сегмента эллипса OAE , увеличивая нагрузку в узле 1, то сначала мощность этого узла будет постепенно увеличиваться до P_1^A , а затем

уменьшится до P_j^E . Это означает, что в пространстве углов ПР E находится дальше, чем A , но в пространстве мощностей - ближе. В практике управления режимами ЭС коэффициент запаса статической устойчивости обычно оценивается в терминах мощностей. Поэтому для оценки коэффициента запаса статической устойчивости более корректным является использование параметров УР A , являющегося ПР при БУ-2. Вопросы выявления таких случаев и получения ПР, корректных для оценки коэффициентов запаса статической устойчивости ЭС, будут рассмотрены в параграфе 1.7.

Теперь выясним влияние РБУ на относительные приросты потерь. Для этого воспользуемся уравнением общего баланса активной мощности в виде

$$\Delta P^\Sigma = P^S + \sum_{\forall k} P_k - \pi^S = 0, \quad (10a)$$

где P^S есть активная мощность РБУ; π^S – суммарные потери в ЭС. Здесь индекс s используется, чтобы в дальнейшем различать относительные приросты потерь при одиночном БУ и РБУ.

P^S и π^S являются зависимыми переменными. Дифференцирование (10a) по независимым переменным дает:

$$\partial \Delta P^\Sigma / \partial P_k = \partial P^S / \partial P_k + 1 - \partial \pi^S / \partial P_k = 0; \quad (10б)$$

$$\partial \Delta P^\Sigma / \partial Q_k = \partial P^S / \partial Q_k - \partial \pi^S / \partial Q_k = 0. \quad (10в)$$

Выражения вида $\partial P^S / \partial P_k$ и $\partial P^S / \partial Q_k$ можно получить следующим образом.

Запишем систему УУР в форме баланса мощностей с РБУ:

$$\Delta P(P + g^S P^S, \delta, V) = 0; \quad (10г)$$

$$\Delta Q(Q, \delta, V) = 0. \quad (10д)$$

Линеаризация (10г) и (10д) дает:

$$[\partial \Delta P / \partial \delta] \Delta \delta + [\partial \Delta P / \partial V] \Delta V + g^S \Delta P_s = -\Delta P; \quad (10е)$$

$$[\partial \Delta Q / \partial \delta] \Delta \delta + [\partial \Delta Q / \partial V] \Delta V = -\Delta Q, \quad (10ж)$$

поэтому

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta P^s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}. \quad (10з)$$

Дифференцирование (10з) по независимым переменным дает

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial P} & \frac{\partial \delta}{\partial Q} \\ \frac{\partial V}{\partial P} & \frac{\partial V}{\partial Q} \\ \frac{\partial P^s}{\partial P} & \frac{\partial P^s}{\partial Q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (10и)$$

Искомые выражения $\partial P^s / \partial P_k$ и $\partial P^s / \partial Q_k$ расположены в последней строке матрицы (10и), поэтому

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P^s}{\partial P} & \frac{\partial P^s}{\partial Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial P} & \frac{\partial \delta}{\partial Q} \\ \frac{\partial V}{\partial P} & \frac{\partial V}{\partial Q} \\ \frac{\partial P^s}{\partial P} & \frac{\partial P^s}{\partial Q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (10к)$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial P^s}{\partial P} \\ \frac{\partial P^s}{\partial Q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10л)$$

Учет (10б)-(10в) в (10л) дает

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e - \partial \pi^s / \partial P^T \\ -\partial \pi^s / \partial Q^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Используя (11), можно также получить

$$\sum_k g_k^s \frac{\partial \pi^s}{\partial P_k} = 0. \quad (12а)$$

Условие (12а) указывает на то, что формула потерь активной мощности, так же, как при одиночном БУ, не включает балансирующую мощность P^s . Поэтому относительный прирост потерь мощности РБУ равен нулю.

Ограничимся формальным рассмотрением. Предположим, что балансирующая мощность изменилась на ΔP^S . Тогда мощности узлов, участвующие в балансировке, и соответствующие потери изменятся на $\mathcal{G}_k^S \Delta P^S$ и $\frac{\partial \pi^S}{\partial P_k} \mathcal{G}_k^S \Delta P^S$. Суммируя последнее выражение для всех узлов, участвующих в балансировке режима, и используя (12а), получаем

$$\Delta \pi^S = \sum \frac{\partial \pi^S}{\partial P_k} \mathcal{G}_k^S \Delta P^S = \Delta P^S \sum \frac{\partial \pi^S}{\partial P_k} \mathcal{G}_k^S = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial \pi^S}{\partial P^S} = \lim_{\Delta P^S \rightarrow 0} \frac{\Delta \pi^S}{\Delta P^S} = \sum \frac{\partial \pi^S}{\partial P_k} \mathcal{G}_k^S = 0. \quad (12б)$$

Выражения (11) справедливы при любом БУ, в том числе одиночном. В последнем случае $\mathcal{G}_b^S = 1$ и $\mathcal{G}_k^S = 0, \forall k \neq b$ и из (11) получается (3е). Вектор нормали ГМ $\lambda = [\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ всегда удовлетворяет уравнению (2).

Поэтому, введя в рассмотрение

$$\lambda^S = \mathcal{G}^{S^T} \lambda^P = \sum_k \mathcal{G}_k^S \lambda_k^P, \quad (13а)$$

можно получить следующее выражение

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & \mathcal{G}^S \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda^S \end{bmatrix}. \quad (13б)$$

Сравнение (11) с (13б) дает:

$$\lambda_m^P = (1 - \partial \pi^S / \partial P_m) \lambda^S; \quad (14а)$$

$$\lambda_m^Q = -\partial \pi^S / \partial Q_m \lambda^S. \quad (14б)$$

Т.к. вектор нормали ГМ не зависит от выбора БУ, из (4) и (14) можно получить связь между относительными приростами потерь активной мощности при РБУ и одиночном балансирующем узле b :

$$\frac{\partial \pi^S}{\partial P_m} = 1 - \left(1 - \frac{\partial \pi_b}{\partial P_m}\right) \left(1 - \frac{\partial \pi^S}{\partial P_b}\right); \quad (15а)$$

$$\frac{\partial \pi^S}{\partial Q_m} = \frac{\partial \pi_b}{\partial Q_m} \left(1 - \frac{\partial \pi^S}{\partial P_b} \right). \quad (15б)$$

Следовательно, в зависимости от знака и значения $\partial \pi^S / \partial P_b$, относительные приросты потерь активной мощности с РБУ могут как увеличиться, так и уменьшиться по сравнению с одиночным БУ.

Согласно (14а) будет также выполняться следующее выражение

$$\lambda_m^P = \left(1 - \partial \pi^{Snew} / \partial P_m \right) \lambda^{Snew}, \quad (16а)$$

где $\partial \pi^{Snew} / \partial P_m$ - относительный прирост потерь активной мощности для узла m с новым РБУ $Snew$. В ПР соотношение (9) выполняется для РБУ S , и подстановка (16а) в (9) дает

$$\sum_{k \in S} g_k^S \lambda_k^P = \sum_{k \in S} g_k^S \left(1 - \frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P_K} \right) \lambda^{Snew} = \left(1 - \sum_{k \in S} g_k^S \frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P_K} \right) \lambda^{Snew} = 0.$$

Поэтому, если $\lambda^{Snew} \neq 0$, то

$$\sum_{k \in S} g_k^S \frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P_K} = 1. \quad (16б)$$

Поскольку $\lambda^{Snew} = \sum_{k \in Snew} g_k^{Snew} \lambda_k^P \neq 0$, то согласно (9), режим при новом РБУ $Snew$ не будет предельным. В этом случае мощность старого РБУ S можно изменить, например, на величину ΔP^S . Фактически при этом изменятся мощности узлов, входящих в старый РБУ, пропорционально их коэффициентам участия. При этом потери активной мощности изменятся на величину

$$\Delta \pi^{Snew} = \sum_{k \in S} \frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P_K} g_k^S \Delta P^S. \quad (16в)$$

Из (16в) можно получить

$$\frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P^S} = \lim_{\Delta P^{Snew} \rightarrow 0} \frac{\Delta \pi^{Snew}}{\Delta P^S} = \sum_{k \in S} \frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P_K} g_k^S. \quad (16г)$$

Подстановка (16б) в (16г) дает

$$\frac{\partial \pi^{Snew}}{\partial P^S} = 1. \quad (17)$$

Таким образом, в ПР прирост относительных потерь активной мощности для РБУ равен единице. Поэтому в ПР любые манипуляции РБУ сбалансировать режим будут полностью компенсированы потерями активной мощности, вызванными этими манипуляциями. Это значит, что РБУ не может обеспечить поддержку такого режима, любое малое случайное изменение мощности некоторых узлов в неблагоприятном направлении невозможно сбалансировать.

При смене РБУ (коэффициентов участия) в ПР условие (9) в общем случае выполняться не будет. Поэтому в реальной ЭС, как с одиночным, так и с РБУ, ПР зависит от месторасположения БУ. Смена БУ или изменение коэффициентов участия узлов РБУ в ПР делает этот режим непредельным. Исключением является консервативная модель ЭС, для которой в ПР вектор λ (7) с $\beta = -\sum g_k^{Snew} \lambda_k^P$ при любом новом РБУ удовлетворяет условию (9), поэтому матрица Якоби потокораспределения (1.2.4г) также будет вырождена, т.е. этот УР останется предельным при новом РБУ.

Итак, в ПР относительный прирост потерь активной мощности для БУ (как одиночного, так и распределенного) равен единице. В отличие от активной мощности, в балансировке режима по реактивной мощности участвует не только БУ, но также все PV узлы. Учитывая это, рассмотрим следующие уравнения:

$$\Delta Q^{\Sigma}(Q, Q_S) = Q_S + \sum_{k \neq b; k \in PV} Q_k - q = 0; \quad (18a)$$

$$\Delta Q_S(Q_S, \delta, V) = \Delta Q_b(Q_b, \delta, V) + \sum_{k \in PV} \Delta Q_k(Q_k, \delta, V) = 0, \quad (18b)$$

где $Q_S = Q_b + \sum_{k \neq b; k \in PV} Q_k$ - суммарная реактивная мощность узлов, участвующих в балансировке реактивной мощности (реактивная балансирующая мощность); q - суммарные потери реактивной мощности в ЭС. Выражение (18a) является уравнением баланса реактивной мощности ЭС, а (18b) - баланса реактивной мощности узлов, участвующих в балансировке реактивной мощности в ЭС.

В этих уравнениях Q_s и q являются зависимыми переменными. Если воспользоваться подходом, который применялся ранее для вывода относительных приростов потерь активной мощности, то можно получить следующие выражения с обычным БУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_s}{\partial P^T} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial Q^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial \delta^T} \\ \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial V^T} \end{bmatrix}; \quad (19a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{\partial q}{\partial P^T} \\ e - \frac{\partial q}{\partial Q^T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial \delta^T} \\ \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial V^T} \end{bmatrix}. \quad (19б)$$

Аналогично определяются выражения при РБУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial Q^s}{\partial P^T} \\ \frac{\partial Q^s}{\partial Q^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial \delta^T} \\ \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial V^T} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (20a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} & g^s \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{\partial q^s}{\partial P^T} \\ e - \frac{\partial q^s}{\partial Q^T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial \delta^T} \\ \frac{\partial \Delta Q_s}{\partial V^T} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20б)$$

В последнем случае из (20б) также следует

$$\sum_k g_k^s \frac{\partial q^s}{\partial P_k} = 0. \quad (20в)$$

Условие (20в) указывает на то, что формула потерь реактивной мощности не включает активную балансирующую мощность P^s РБУ так же, как и при одиночном БУ, т.е. относительный прирост потерь реактивной мощности для РБУ также равен нулю. Это можно показать, используя (20в) и подход, реализованный ранее при выводе подобного соотношения (12б) для потерь активной мощности.

Рассмотрим линеаризованные уравнения общего баланса реактивной мощности (18а):

$$\sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial Q_s}{\partial Q_k} \Delta Q_k + \sum_{k \neq b} \frac{\partial Q_s}{\partial P_k} \Delta P_k + \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \Delta Q_k - \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \Delta Q_k - \sum_{k \neq b} \frac{\partial q}{\partial P_k} \Delta P_k = 0. \quad (21)$$

В (19) - (20) матрица СЛУ является транспонированной матрицей Якоби потокораспределения. Вблизи ПР эта матрица будет очень плохо обусловленной и решением (19б) или (20б) будет $|\partial q/\partial Q_k| \gg 1$. Поэтому в ПР будет выполняться соотношение

$$\sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \Delta Q_k - \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \Delta Q_k = \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} (1 - \frac{\partial q}{\partial Q_k}) \Delta Q_k \approx - \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \Delta Q_k .$$

Учитывая это, а также, что

$$\Delta Q_S = \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial \Delta Q_S}{\partial Q_k} \Delta Q_k + \sum_{k \neq b} \frac{\partial \Delta Q_S}{\partial P_k} \Delta P_k ;$$

$$\Delta q = \sum_{\substack{k \neq b \\ k \notin PV}} \frac{\partial q}{\partial Q_k} \Delta Q_k + \sum_{k \neq b} \frac{\partial q}{\partial P_k} \Delta P_k ,$$

уравнение (21) в ПР можно представить как $\Delta Q_S \approx \Delta q$, поэтому в ПР

$$\partial q/\partial Q_S \approx \Delta q/\Delta Q_S = 1. \quad (22)$$

Получается примерно тот же результат, что и для относительного прироста потерь активной мощности. В ПР относительный прирост потерь реактивной мощности по отношению к суммарной реактивной мощности узлов, участвующих в балансировке реактивной мощности ЭС, равен единице. Поэтому в ПР эти узлы не могут поддерживать режим реактивной мощности в ряде узлов или во всех узлах ЭС. Любые манипуляции с узлами, участвующими в балансировке реактивной мощности, будут нивелироваться потерями реактивной мощности, вызванными такими манипуляциями. Поэтому, чтобы получить в этом случае неопредельный режим, достаточно обеспечить инъекцию реактивной мощности в критических узлах, например, посредством подключения конденсаторных батарей [203], что снизит потребление реактивной мощности из сети. Если конденсаторных батарей нет, то потребуются отключение некоторой нагрузки предпочтительно с более низким коэффициентом мощности [352].

1.5 Кривизна гиперповерхности мощностей и предельных режимов

Одной из важных характеристик гиперповерхности являются ее кривизны. В параграфе 1.3 ГМ рассматривалась как график мощности БУ от задаваемых активных и реактивных мощностей. Для представления формул кривизны гиперповерхности удобно вначале рассмотреть ГМ как параметризованное n -мерное многообразие (n -мерная гиперповерхность) в $(n+1)$ -мерном пространстве [168].

В УУР (1.2.1) мощности узлов входят как отдельные слагаемые. Поэтому эти уравнения можно представить в виде

$$Y = F(X). \quad (1a)$$

Здесь $X \subset R^n$ - вектор, включающий фазовые углы комплекса напряжения всех узлов, кроме базисного узла, а также модули напряжения в PQ узлах; $Y \subset R^{n+l}$ - вектор, включающий активные мощности всех узлов и реактивные мощности PQ -узлов. Так как, частные производные всех порядков вектор - функции $F(X)$ существуют и непрерывны, система (1a) представляет собой гладкое отображение $F : X \subset R^n \rightarrow Y \subset R^{n+l}$, т.е. параметризованное n -мерное многообразие в $(n+1)$ -мерном пространстве, или, другими словами говоря, параметрическое представление гиперповерхности (n -мерная поверхность в $(n+1)$ -мерном пространстве) в координатах $X \subset R^n$.

Согласно (А.3) Приложения А вектор нормали ГМ (1a) λ с точностью до множителя определяется выражением

$$[\partial F(X)/\partial X]^T \lambda = 0. \quad (1б)$$

Гиперповерхность можно рассматривать как множество ее линий, поэтому кривизна гиперповерхности может быть определена через кривизну ее линий. Воспользуемся векторным параметрическим заданием кривой на гиперповерхности:

$$Y = Y(t) = F(X(t)), \quad (1в)$$

где $t \in I$, I - некоторый интервал оси $R = R^1$, и будем основываться на представлении о линии как траектории движущейся точки (1в) на

гиперповерхности. Тогда касательным вектором к этой кривой будет вектор, определяемый выражением,

$$\dot{Y}(t) = dY(t)/dt = [\partial F/\partial X]dX(t)/dt. \quad (1г)$$

Касательные векторы гиперповерхности – это в точности векторы, касательные к кривым на этой гиперповерхности. Кривизна гиперповерхности определяется через кривизну нормальных сечений гиперповерхности, а именно - через кривизну плоских кривых, являющихся результатом пересечения гиперповерхности нормальными гиперплоскостями, т.е. гиперплоскостями, проходящими через вектор нормали гиперповерхности $N = \lambda/\|\lambda\|_2$ и соответствующий касательный вектор $dY(t)/dt$ гиперповерхности. Согласно (А.13) выражение кривизны χ нормального сечения ГМ имеет вид

$$\chi = N^T d\dot{Y}(t)/dt / \left\| \dot{Y}(t) \right\|_2^2, \quad (1д)$$

а с учетом (1г)

$$\chi = \frac{dX^T/dt [\partial^2 F^T N/\partial X^2] dX/dt}{dX^T/dt [\partial F/\partial X]^T [\partial F/\partial X] dX/dt} = \frac{dX^T [\partial^2 F^T N/\partial X^2] dX}{dX^T [\partial F/\partial X]^T [\partial F/\partial X] dX} = \frac{II}{I}. \quad (1е)$$

Здесь символами I и II обозначены соответственно так называемые первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности:

$$I = dX^T [\partial F/\partial X]^T [\partial F/\partial X] dX = dX^T [G] dX;$$

$$II = dX^T [\partial^2 F^T N/\partial X^2] dX = dX^T [H] dX.$$

Первая квадратичная форма задает квадрат элемента длины на гиперповерхности $dl^2 = dY^T dY = dX^T [\partial F/\partial X]^T [\partial F/\partial X] dX = dX^T [G] dX$, т.е. так называемую метрику Римана гиперповерхности в координатах параметризующих переменных X . Так как в нашем случае эта метрика использует матрицу $[G]$, в дальнейшем будем ее называть также G -метрикой, а векторы $dX1$ и $dX2$, ортогональные в этой метрике, т.е. удовлетворяющие условию $dX1^T [G] dX2 = 0$, - G -ортогональными. В теории нелинейного

программирования такие векторы называются G -сопряженными или просто сопряженными.

Как видно из (1е), величина кривизны нормального сечения гиперповерхности равна отношению второй квадратичной формы к первой, как и для обычного трехмерного евклидова пространства. Первая квадратичная форма для гиперповерхности всегда положительна, т.к. она определяет квадрат элемента длины на гиперповерхности $dl^2 = dY^T dY$. Величина второй квадратичной формы может быть, как положительной, так и отрицательной. Обозначив $Z = dX$, наибольшую величину кривизны нормального сечения гиперповерхности можно найти, решая оптимизационную задачу:

$$\chi = Z^T [H] Z \rightarrow \max \quad (2a)$$

при условии

$$1 - Z^T [G] Z = 0. \quad (2б)$$

Сформируем функцию Лагранжа этой задачи

$$L = Z^T [H] Z + \gamma (1 - Z^T [G] Z). \quad (2в)$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по Z , получаем

$$\nabla_Z L = (\partial L / \partial Z)^T = 2[H]Z - 2\gamma[G]Z = 0. \quad (2г)$$

Систему (2г) можно представить в виде

$$[H]Z = \gamma[G]Z. \quad (2д)$$

Задача нахождения чисел γ и ненулевых векторов Z , являющихся решениями уравнения (2д), называется обобщенной проблемой собственных значений. Искомые числа γ являются собственными значениями обобщенной проблемы, а ненулевые векторы Z – собственными векторами.

Умножив (2д) слева на Z^T и учитывая (2б), можно получить

$$\chi = Z^T [H] Z = \gamma. \quad (2е)$$

Поэтому собственные значения γ_i обобщенной проблемы (2д) определяют кривизны гиперповерхности, называемые главными кривизнами гиперповерхности, а их собственные вектора Z_i – главными направлениями.

Матрица $[G]$ является симметричной и положительно определенной, т.к. $dl^2 = dY^T dY = dX^T [\partial F / \partial X]^T [\partial F / \partial X] dX = dX^T [G] dX > 0$ для $dY \neq 0$. Поэтому ее можно представить в виде разложения по Холесскому $[G] = [L][L]^T$ [173], где $[L]$ - невырожденная нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами. Тогда систему (2д) можно представить в виде

$$[H]Z = \gamma [L][L]^T Z \quad (2ж)$$

или

$$[L]^{-1}[H]Z = \gamma [L]^T Z; \quad (2з)$$

$$[L^{-1}][H][L^{-1}]^T W = \gamma W, \quad (2и)$$

где

$$W = [L]^T Z. \quad (2к)$$

Таким образом, главные кривизны гиперповерхности равны собственным значениям матрицы $[L^{-1}][H][L^{-1}]^T$ (2и). Эта матрица является симметричной, поэтому все ее собственные значения вещественны, и она имеет полную систему линейно независимых собственных векторов, из которых всегда можно сформировать ортонормальную систему $\langle W_i \rangle$, т.е. выбрать их так, чтобы $W_i^T W_j = 0, i \neq j$; $W_i^T W_i = 1$. Используя (2к), можно показать, что главные направления Z_i являются G -ортгоналичными, т.к. $W_i^T W_j = Z_i^T [L][L]^T Z_j = Z_i^T [G] Z_j = 0, i \neq j$, $W_i^T W_i = Z_i^T [G] Z_i = 1$. В свою очередь, касательные векторы $dY_i = [\partial F / \partial X] Z_i$ гиперповерхности, соответствующие главным направлениям Z_i главных кривизен γ_i , будут ортогональны, т.к. $dY_i^T dY_j = Z_i^T [\partial F / \partial X]^T [\partial F / \partial X] Z_j = Z_i^T [G] Z_j = 0, i \neq j$, и $dY_i^T dY_j = Z_i^T [G] Z_j = 1$.

В качестве примера рассмотрим ГМ 2-х узловой ЭС с PV- узлами, представленной в параграфе 1.3. В этом случае $Y = P$, $X = \delta$ и параметрическое уравнение ГМ (1а) примет вид:

$$P_1 = V_1^2 G - V_1 V_2 (G \cos \delta + B \sin \delta) = 0;$$

$$P_2 = V_2^2 G - V_1 V_2 (G \cos \delta - B \sin \delta) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\partial F / \partial X &= \partial P / \partial \delta = \begin{bmatrix} V_1 V_2 (G \sin \delta - B \cos \delta) \\ V_1 V_2 (G \sin \delta + B \cos \delta) \end{bmatrix}; \\ N &= \begin{bmatrix} -(G \sin \delta + B \cos \delta) \\ G \sin \delta - B \cos \delta \end{bmatrix} / \sqrt{2(G \sin \delta)^2 + 2(B \cos \delta)^2}; \\ [G] &= [\partial F / \partial X]^T [\partial F / \partial X] = 2(V_1 V_2)^2 \langle (G \sin \delta)^2 + (B \cos \delta)^2 \rangle; \\ \partial F^T N / \partial X &= 2V_1 V_2 / |BG| / \sqrt{2 \langle (G \sin \delta)^2 + (B \cos \delta)^2 \rangle}; \\ \chi &= \frac{|BG|}{\sqrt{2} V_1 V_2 \langle (G \sin \delta)^2 + (B \cos \delta)^2 \rangle^{3/2}},\end{aligned}\quad (3a)$$

и радиус кривизны

$$R = 1/\chi = \frac{\sqrt{2} V_1 V_2 \langle (G \sin \delta)^2 + (B \cos \delta)^2 \rangle^{3/2}}{|BG|}.\quad (3б)$$

Поэтому, согласно (3а)-(3б) наименьшая кривизна, т.е. наибольший радиус кривизны, будет при $\sin \delta = 0$, т.е. $\delta = 0, \pi$:

$$\chi_{\min} = \frac{G}{\sqrt{2} V_1 V |B|^2}; \quad R_{\max} = 1/\chi_{\min} = \frac{\sqrt{2} V_1 V |B|^2}{G}.\quad (3в)$$

Наибольшая кривизна, т.е. наименьший радиус кривизны будет, когда $\cos \delta = 0$, т.е. $\delta = \pi/2, 3\pi/2$:

$$\chi_{\max} = \frac{|B|}{\sqrt{2} V_1 V G^2}; \quad R_{\min} = 1/\chi_{\max} = \frac{\sqrt{2} V_1 V G^2}{|B|}.\quad (3г)$$

Теперь рассмотрим случай, когда гиперповерхность задана уравнением в неявном виде

$$f(Y) = 0.\quad (4а)$$

Воспользуемся выражением кривизны нормального сечения гиперповерхности (1д), которое представим в виде

$$\chi = \frac{N^T d^2 Y(t) / dt^2}{\|dY(t) / dt\|_2^2}.\quad (4б)$$

Дифференцирование (4а) по параметру t дает

$$df(Y)/dt = \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{dt} = 0. \quad (4в)$$

Следовательно, единичным вектором нормали гиперповерхности является вектор

$$N = [\partial f / \partial Y]^T / \|\partial f / \partial Y\|_2. \quad (4г)$$

Дифференцируя еще раз выражение (4в) по параметру t , получаем

$$d^2 f(Y)/dt^2 = \frac{dY^T}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \frac{dY}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0.$$

Отсюда с учетом (4г) можно получить величину числителя в выражении кривизны (4б):

$$N^T \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = \frac{1}{\|\partial f / \partial Y\|_2} \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = - \frac{dY^T / dt [\partial^2 f / \partial Y^2] dY / dt}{\|\partial f / \partial Y\|_2}.$$

Поэтому

$$\chi = \frac{N^T d^2 Y(t) / dt^2}{\|dY(t) / dt\|_2^2} = - \frac{dY^T / dt [\partial^2 f / \partial Y^2] dY / dt}{\|dY(t) / dt\|_2 \|\partial f / \partial Y\|_2 \|dY(t) / dt\|_2}. \quad (4д)$$

Полученные соотношения позволяют сформировать оптимизационную задачу для нахождения главных кривизн ГМ, заданной уравнением (4а) в неявном виде,

$$\chi = \max_z Z^T [H] Z \quad (5а)$$

при условиях

$$1 - Z^T Z = 0; \quad (5б)$$

$$Z^T N = 0, \quad (5в)$$

где $[H] = [\partial^2 f / \partial Y^2] / \|\partial f / \partial Y\|_2$, и (5в) учитывает (4в)

Сформируем функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} Z^T [H] Z + \frac{1}{2} \gamma (1 - Z^T Z) + \mu Z^T N.$$

Дифференцирование этой функции Лагранжа по Z дает

$$\nabla_Z L = [H] Z - \gamma Z + \mu N = 0. \quad (5г)$$

Умножая (5г) слева на Z^T и учитывая (5б)-(5в), можно получить

$$Z^T [H] Z = \gamma. \quad (5д)$$

Таким образом, главным кривизнам ГМ соответствуют множители Лагранжа γ задачи оптимизации (5а)-(5в).

Выясним, чему соответствует эти множители Лагранжа. Для этого умножая (5г) слева на N^T и учитывая (5в), получим

$$\mu = -N^T [H] Z. \quad (5е)$$

Используя (5е) в (5г), можно получить

$$[\pi^{\perp N}] [H] Z = \gamma Z, \quad (5ж)$$

где $[\pi^{\perp N}] = [E - NN^T]$ - матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору нормали N гиперповерхности, т.е. на касательную гиперплоскость гиперповерхности. Следовательно, главным кривизнам ГМ соответствуют собственные значения матрицы $[\pi H] = [\pi^{\perp N}] [H]$, а главным направлениям - соответствующие собственные вектора этой матрицы. Заметим, что матрица проектирования вырожденная, т.к. $[\pi^{\perp N}] N = [E - NN^T] N = N - N = 0$, а следовательно, вырожденной будет и матрица $[\pi H]$. Поэтому, по крайней мере, одно из ее собственных чисел будет равно нулю.

Дополнительно проанализируем соотношения (5ж), используя свойства матрицы проектирования $[\pi^{\perp N}]$

$$[\pi^{\perp N}] = [\pi^{\perp N}]^T; \quad [\pi^{\perp N}] [\pi^{\perp N}] = [\pi^{\perp N}]. \quad (5з)$$

Учитывая (5в) и (5з), получаем

$$[\pi^{\perp N}] Z = Z = [\pi^{\perp N}]^T Z. \quad (5и)$$

Поэтому (5ж) можно представить в виде

$$[\pi^{\perp N}] [H] [\pi^{\perp N}]^T Z = \gamma Z. \quad (5к)$$

Следовательно, собственные значения матрицы $[\pi^{\perp N}] [H]$ совпадают с собственными значениями $[\pi^{\perp N}] [H] [\pi^{\perp N}]^T$, как и их правые собственные векторы. Но матрица $[\pi^{\perp N}] [H] [\pi^{\perp N}]^T$ является симметричной, поэтому все ее собственные значения вещественны, а собственные векторы - ортогональные.

В качестве примера опять рассмотрим 2-х узловую ЭС с PV узлами. Для упрощения записи воспользуемся каноническим уравнением эллипса мощностей (1.3.5), представив его в виде

$$f(Y) = (Y_1/a)^2 + (Y_2/b)^2 - 1 = 0, \quad (6a)$$

где $a = \sqrt{2V_1V_2|B|}$ и $b = \sqrt{2V_1V_2|G|}$. Правомочность использования (6a) для нахождения кривизны ГМ следует из того факта, что замена переменных (1.3.4) не изменила метрику эллипса, поскольку (1.3.4a) перемещает центр эллипса в начало координат, а (1.3.4б) поворачивает главные оси эллипса на 45° и совмещает их с осями ординат.

Реализация (4) - (5) с (6a) дает:

$$\begin{aligned} [\partial f / \partial Y] &= 2 \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{a^2} & \frac{Y_2}{b^2} \end{bmatrix}; \quad \|\partial f / \partial Y\|_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2}; \\ N &= [\partial f / \partial Y]^T / \|\partial f / \partial Y\|_2 = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{a^2} \\ \frac{Y_2}{b^2} \end{bmatrix} / \sqrt{\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2}; \quad [\partial^2 \Delta F^T / \partial Y^2] = 2 \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix}; \\ [H] &= [\partial^2 f / \partial Y^2] / \|\partial f / \partial Y\|_2 = \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix} / \sqrt{\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2}; \\ Z \perp N &= \begin{bmatrix} -\frac{Y_2}{b^2} \\ \frac{Y_1}{a^2} \end{bmatrix} / \sqrt{\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (6б)$$

$$V = [H]Z = \frac{1}{a^2 b^2} \begin{bmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix} / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2 \right); \quad N^T V = \frac{Y_1 Y_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}{a^2 b^2} / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2 \right)^{3/2};$$

$$V - NN^T V = \frac{1}{a^2 b^2} \begin{bmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix} / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2 \right) - \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{a^2} \\ \frac{Y_2}{b^2} \end{bmatrix} \frac{Y_1 Y_2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}{a^2 b^2} / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2}\right)^2 \right)^2 =$$

$$\frac{1}{a^2 b^2} \left[\begin{array}{c} -\frac{Y_2}{b^2} \left(\left(\frac{Y_1}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2} \right)^2 \right) \\ \frac{Y_1}{a^2} \left(\left(\frac{Y_1}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2} \right)^2 \right) \end{array} \right] / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2} \right)^2 \right)^2 = \frac{1}{a^2 b^2} \left[\begin{array}{c} -\frac{Y_2}{b^2} \\ \frac{Y_1}{a^2} \end{array} \right] / \left(\left(\frac{Y_1}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2} \right)^2 \right)^2. \quad (6в)$$

Тогда (5ж) с (6б) - (6в) и (5и) дает

$$\chi = \gamma = \frac{1}{a^2 b^2 \left(\left(\frac{Y_1}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2}{b^2} \right)^2 \right)^{3/2}}. \quad (6г)$$

Анализ (6г) с (6а) показывает, что наибольшая кривизна, т.е. наименьший радиус кривизны будет, когда $Y_1 = a$ и $Y_2 = 0$:

$$\chi_{max} = \frac{a}{b^2} = \frac{|B|}{\sqrt{2V_1 V G^2}}; \quad R_{min} = 1/\chi_{max} = \frac{\sqrt{2V_1 V G^2}}{|B|}. \quad (6д)$$

В свою очередь, наименьшая кривизна, т.е. наибольший радиус кривизны будет, когда $Y_1 = 0$ и $Y_2 = b$:

$$\chi_{min} = \frac{b}{a^2} = \frac{G}{\sqrt{2V_1 V B^2}}; \quad R_{max} = 1/\chi_{min} = \frac{\sqrt{2V_1 V B^2}}{G}. \quad (6е)$$

Сравнение (6д) - (6е) с (3в) - (3г) подтверждает идентичность этих формул.

Рассмотрим еще одно выражения кривизны ГМ (4д), воспользовавшись уравнением общего баланса активной мощности ЭС

$$f(P) = P_b + \sum_{m \neq b} P_m - \pi = 0. \quad (7а)$$

В этом случае

$$[df/\partial Y]^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ \partial f/\partial P_m \\ \vdots \\ \partial f/\partial Q_m \\ \vdots \\ \partial f/\partial P_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 - \partial \pi/\partial P_m \\ \vdots \\ -\partial \pi/\partial Q_m \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \rho; \quad (7б)$$

$$[\partial^2 f/\partial Y^2] = - \begin{bmatrix} \partial^2 \pi/\partial P^2 & \partial^2 \pi/\partial P \partial Q & 0 \\ \partial^2 \pi/\partial Q \partial P & \partial^2 \pi/\partial Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7в)$$

Здесь учтено, что мощность БУ не входит в формулу потерь. Тогда (4д) с учетом (7б) - (7в) дает

$$\chi = \frac{d\hat{Y}^T [H] d\hat{Y}}{d\hat{Y}^T [G] d\hat{Y}}, \quad (7г)$$

где

$$[H] = \|\rho\|_2^{-1} \begin{bmatrix} \partial^2 \pi / \partial P^2 & \partial^2 \pi / \partial P \partial Q \\ \partial^2 \pi / \partial Q \partial P & \partial^2 \pi / \partial Q^2 \end{bmatrix}; \quad [G] = [E] + \hat{\rho} \hat{\rho}^T, \quad (7д)$$

где, в свою очередь, $\hat{\rho}$ - вектор (7б) без компоненты активной мощности БУ.

Теперь рассмотрим общий случай ГМ, задаваемой системой нелинейных уравнений

$$\Delta F(X, Y) = 0, \quad (8а)$$

где $X \in R^n$, $Y \in R^k$, $\Delta F(X, Y) \in R^{n+1}$. Будем полагать что $rank[\partial \Delta F / \partial X] = n$, $rank[\partial \Delta F / \partial Y] = k$. Тогда система нелинейных уравнений (8а) определяет параметризованное $n + k - (n + 1) = k - 1$ -мерное многообразие (($k - 1$)-мерную поверхность) в подпространстве R^k параметров Y .

Предполагая $X = X(t)$ и $Y = Y(t)$, продифференцируем (8а) по параметру t

$$d\Delta F(X, Y)/dt = [\partial \Delta F / \partial X] dX/dt + [\partial \Delta F / \partial Y] dY/dt = 0. \quad (8б)$$

Матрица $[\partial \Delta F / \partial X]$ - прямоугольная, число строк на единицу превышает число столбцов, поэтому всегда найдется ненулевой вектор λ , отвечающий условию

$$\lambda^T [\partial \Delta F / \partial X] = 0. \quad (8в)$$

Умножив (8б) слева на вектор строку λ^T и учитывая (8в), получаем

$$\lambda^T [\partial \Delta F / \partial Y] dY/dt = 0. \quad (8г)$$

Следовательно, вектор

$$\lambda^{<y>} = [\partial \Delta F / \partial Y]^T \lambda = [\partial \Delta F^T \lambda / \partial Y] \quad (8д)$$

является вектором нормали к ($k-1$)-мерной поверхности в подпространстве параметров Y . Нормируем вектор λ так

$$N = \lambda / \|\partial \Delta F^T \lambda / \partial Y\|_2, \quad (8е)$$

чтобы длина вектора нормали (8д) была равна единице.

$$N^{<y>} = [\partial \Delta F^T N / \partial Y] = [\partial \Delta F^T \lambda / \partial Y] / \|\partial \Delta F^T \lambda / \partial Y\|_2. \quad (8ж)$$

Умножим (8б) слева на вектор строку N^T

$$N^T d\Delta F(X, Y)/dt = N^T [\partial \Delta F / \partial X] dX/dt + N^T [\partial \Delta F / \partial Y] dY/dt = 0. \quad (8з)$$

Продифференцируем (8з) по параметру t

$$\begin{aligned} d^2 \Delta F(X, Y)^T N / dt^2 &= dX^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2] dX/dt + \\ &+ dY^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y \partial X] dX/dt + [\partial \Delta F^T N / \partial X] d^2 X / dt^2 + \\ &+ dX^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X \partial Y] dY/dt + dY^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y^2] dY/dt + \\ &+ [\partial \Delta F^T N / \partial Y] d^2 Y / dt^2 + dN^T / dt ([\partial \Delta F / \partial X] dX/dt + [\partial \Delta F / \partial Y] dY/dt) = \\ &= dX^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2] dX/dt + \\ &+ dY^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y \partial X] dX/dt + [\partial \Delta F^T N / \partial X] d^2 X / dt^2 + \\ &+ dX^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X \partial Y] dY/dt + dY^T / dt [\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y^2] dY/dt + \\ &+ [\partial \Delta F^T N / \partial Y] d^2 Y / dt^2 = 0. \end{aligned} \quad (8и)$$

Применение (4б) с (8ж) дает выражение кривизны рассматриваемой $(k-1)$ -мерной поверхности в k -мерном пространстве параметров Y :

$$\chi = \frac{N^{<y>T} d^2 Y / dt^2}{\|dY/dt\|_2^2} = \frac{[\partial \Delta F^T N / \partial Y] d^2 Y / dt^2}{\|dY/dt\|_2^2}. \quad (8к)$$

Поэтому, учитывая (8и), главные кривизны $(k-1)$ -мерной поверхности можно найти решением оптимизационной задачи:

$$\chi = [x^T \ y^T] [H] [x^T \ y^T]^T \rightarrow \text{extr} \quad (9а)$$

при условиях

$$1 - y^T y = 0; \quad (9б)$$

$$[J^x]x + [J^y]y = 0, \quad (9в)$$

где

$$[J^x] = [\partial \Delta F / \partial X]; \quad [J^y] = [\partial \Delta F / \partial Y]; \quad [H] = \begin{bmatrix} \partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2 & \partial^2 \Delta F^T N / \partial X \partial Y \\ \partial^2 \Delta F^T N / \partial Y \partial X & \partial^2 \Delta F^T N / \partial Y^2 \end{bmatrix}. \quad (9г)$$

Сформируем функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} [x^T \ y^T] [H] [x^T \ y^T]^T + \frac{1}{2} \gamma (1 - y^T y) + ([J^x]x + [J^y]y)^T \beta.$$

Дифференцирование функции Лагранжа по векторам x и y дает

$$\nabla_{xy} L = [H] [x^T \ y^T]^T + \begin{bmatrix} J^{x^T} \beta \\ -\gamma y + J^{y^T} \beta \end{bmatrix} = 0. \quad (9д)$$

Если умножить (9д) слева на вектор-строку $[x^T \ y^T]$, то с учетом (9б)-(9в) можно получить

$$\chi = [x^T \ y^T] [H] [x^T \ y^T]^T = \gamma. \quad (9е)$$

Следовательно, главные кривизны поверхности равны множителям Лагранжа γ задачи оптимизации (9а)-(9в).

Выражения (9) справедливы для УУР в любой форме записи, будь то форма баланса мощностей или токов, полярные или прямоугольные координаты. С вычислительной точки зрения для вычисления кривизны лучше всего использовать УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат. Рассмотрим, какими будут представленные выражения в этом случае

Когда УУР представлены в форме баланса мощностей, мощности узлов присутствуют в этих уравнениях как отдельные слагаемые. В этом случае подматрицы $\partial^2 \Delta F^T N / \partial X \partial Y$, $\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y \partial X$ и $\partial^2 \Delta F^T N / \partial Y^2$ в (9г) будут нулевыми. Поэтому задача оптимизации (9а) - (9в) будет выглядеть следующим образом:

$$\chi = dX^T [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2] dX \rightarrow extr \quad (10а)$$

при условиях

$$1 - dY^T dY = 0; \quad (10б)$$

$$[\partial \Delta F / \partial X] dX + [E^Y] dY = 0. \quad (10в)$$

Если рассматривается ГМ, т.е. когда $k=n+1$, $[E^Y]$ будет единичной матрицей, то оптимизационная задача (10а)-(10в) будет полностью соответствовать рассмотренной ранее оптимизационной задаче (1е)- (2).

В случае, если рассматривается $(k-1)$ -мерная поверхность в k -мерном пространстве параметров Y , т.е. когда в $(n+1-k)$ мощностей полагают фиксированными, как например, при использовании технологии эквивалентирования, оптимизационную задачу нахождения главных кривизен этой поверхности можно сформировать следующим образом. Воспользуемся блочным разбиением матрицы Якоби и запишем линеаризованные уравнения (10в) в виде:

$$[J_{11}]dX_1 + [J_{12}]dX_2 + dY = 0; \quad (10г)$$

$$[J_{21}]dX_1 + [J_{22}]dX_2 = 0. \quad (10д)$$

Матрица $[J_{22}]$ в (10д) является квадратной и невырожденной, поэтому из этого уравнения можно получить:

$$dX_2 = [A]dX_1; \quad (10е)$$

$$dX = \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} dX_1, \quad (10ж)$$

где $[A] = -[J_{22}]^{-1}[J_{21}]$. Подстановка (10е) в (10г) дает

$$[J^e]dX_1 + dY = 0, \quad (10з)$$

где $[J^e] = [J_{11}] - [J_{12}][J_{22}]^{-1}[J_{21}]$. В свою очередь, использование (10е) - (10ж) в (10а) - (10в) позволяет сформировать следующую оптимизационную задачу, аналогичную (2),

$$\chi = Z^T [H^e] Z \rightarrow \text{extr} \quad (10и)$$

при условии

$$1 - Z^T [G^e] Z = 0, \quad (10к)$$

где $[G^e] = [J^e]^T [J^e]$, $[H^e] = [H_{11}] + [H_{12}][A] + [A]^T [H_{21}] + [A]^T [H_{22}][A]$, а $[H_{**}]$, в свою очередь, являются подматрицами соответствующего блочного представления матрицы $[\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2]$.

Ранее указывалось, что обычно используемое понятие «область существования режимов» представляет собой проекцию ГМ вдоль координатной оси активной мощности балансирующего узла на

подпространство задаваемых мощностей узлов. Поэтому полученные выражения можно использовать для вычисления кривизны границы существования УР – ГПР. Однако необходимы определенные модификации представленных выражений.

В случае, когда исследуется ГПР, dY в (10б) - (10в) не будет включать компоненту активной мощности БУ, а линеаризованные уравнения потокораспределения (10в) – уравнение баланса активной мощности БУ. Следовательно, матрица Якоби в (10в) будет квадратной и вырожденной. В этом случае система (10б) - (10в) будет недоопределенной, и как следствие, функция цели (10а) будет неограниченной. Поэтому систему (10а) - (10б) необходимо дополнить еще одним уравнением. Это уравнение можно получить, если воспользоваться линейной зависимостью строк и столбцов матрицы Якоби в ПР:

$$[\partial\Delta F/\partial X]^T N = 0; \quad (11а)$$

$$[\partial\Delta F/\partial X]v = 0, \quad (11б)$$

где N и v есть левый (вектор нормали) и правый собственные векторы матрицы Якоби, соответствующие ее нулевому собственному значению.

Умножая (11б) слева на вектор-строку нормали N^T , можно получить

$$N^T [\partial\Delta F/\partial X]v = 0. \quad (11в)$$

Дифференцирование (11в) по параметру t и учет (11а)-(11б) дает

$$\begin{aligned} \frac{dN^T [\partial\Delta F/\partial X]v}{dt} &= v^T \left[\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2 \right] \frac{dX}{dt} + N^T [\partial\Delta F/\partial X] \frac{dv}{dt} + \\ &+ \frac{dN^T}{dt} [\partial\Delta F/\partial X]v = \zeta^T \frac{dX}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (11г)$$

где

$$\zeta = \left[\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2 \right] v. \quad (11д)$$

Тогда искомое дополнительное уравнение к (10а) - (10в) будет

$$\zeta^T dX = 0. \quad (11е)$$

Согласно [191]-[192], если вектор ζ (11д) получается ненулевым, тогда ПР будет соответствовать бифуркации складки или сборки. Если вектор ζ (11д) равен нулю, тогда ПР будет отвечать бифуркации точки возврата складки и искомое уравнение для (10а)-(10б) можно получить, дифференцируя $v^T \zeta = 0$ по параметру t . Интересно отметить, что уравнение (11е) определяет вектор ζ как вектор нормали ГПР в пространстве зависимых переменных, т.е. углов и модулей напряжения узлов, в отличие от правого собственного вектора матрицы Якоби, соответствующего нулевому собственному значению.

Возможен также другой подход применения (11д) к (10а)-(10в). Предположим, что n -я компонента правого собственного вектора v матрицы Якоби, соответствующего нулевому собственному значению, не равна нулю. Тогда, выполнив нормировку вектора v так, чтобы его последняя компонента была равна единице, рассмотрим вектор

$$dX^v = dX - dX_n v. \quad (11ж)$$

Очевидно, что последняя n -я компонента вектора (11ж) равна нулю. Поэтому, используя (11ж) в (10в), можно получить

$$[\partial \Delta F / \partial X](dX^v + dX_n v) + [E^Y] dY = 0, \quad (11з)$$

или

$$[\partial \Delta \hat{F} / \partial \hat{X}] d\hat{X} + [E^Y] dY = 0, \quad (11и)$$

где $[\partial \Delta \hat{F} / \partial \hat{X}]$ есть матрица $[\partial \Delta F / \partial X]$ без последнего столбца, а $d\hat{X}$ вектор, состоящий из первых $n-1$ компонент вектора dX^v . В свою очередь, аналогичная подстановка в (10а) дает

$$\begin{aligned} dX^T [H] dX &= (dX^v + dX_n v)^T [H] dX = dX^{vT} [H] (dX^v + dX_n v) = \\ &= dX^{vT} [H^{xx}] dX^v + dX^{vT} [H^{xx}] dX_n v = d\hat{X}^T [\hat{H}] d\hat{X}^T + (dX - dX_n v)^T [H^{xx}] dX_n v = \\ &= d\hat{X}^T [\hat{H}] d\hat{X}^T - dX_n^2 v [H] v, \end{aligned} \quad (11к)$$

где $[\hat{H}]$ - матрица $[H] = [\partial^2 \Delta F^T N / \partial X^2]$ без последней строки и столбца.

Подстановка (11ж) в (11е) также дает

$$dX_n = -d\hat{X}^T \hat{\zeta} / v^T \zeta, \quad (11л)$$

где $\hat{\zeta}$ - вектор, состоящий из первых $n-1$ компонент вектора ζ . В свою очередь, подстановка (11л) в (11к) дает

$$\begin{aligned} dX^T [H] dX &= d\hat{X}^T [\hat{H}] d\hat{X}^T - dX_n^2 v [H] v = \\ &= d\hat{X}^T [\hat{H}] d\hat{X}^T - d\hat{X}^T \hat{\zeta} v^T [H] v \hat{\zeta}^T d\hat{X} / (\zeta^T v)^2 = d\hat{X}^T [\hat{H}^e] d\hat{X}^T, \end{aligned} \quad (11м)$$

где

$$[\hat{H}^e] = [\hat{H}] - \mu \hat{\zeta} \hat{\zeta}^T \text{ и } \mu = v^T [H] v / (\zeta^T v)^2. \quad (11н)$$

Полученные выражения позволяют сформировать задачу нелинейного программирования, аналогичную (10), но в которой вместо (10в) будет (11и), а матрица (11н) заменит матрицу вторых производных в (10а). Остальные выражения (10) останутся неизменными.

Таким образом, представленные ранее выражения могут быть использованы для определения кривизны как ГМ, так и ГПР, например, для проверки ближайшего ПР [189], [242]. Довольно часто на практике при решении различных задач ЭС возникает необходимость гарантии того, что ОСР в исследуемой окрестности является выпуклой [287], [290], [296], [370]. Такая потребность возникает также при решении оптимизационных задач, чтобы получить глобальный минимум или гарантировать существование непрерывной траектории перемещения режима ЭС от одной рабочей точки к другой, желаемой. Согласно теории дифференциальной геометрии, ОСР ЭС будет выпуклая, если кривизны ГПР будут положительными, т.е. будут положительно определенными матрицы, представленные в соответствующих функциях цели рассмотренных ранее оптимизационных задач вычисления главных кривизен гиперповерхностей. В свою очередь, все эти матрицы будут положительно определены, если будет положительно определена матрица вторых производных $[\partial^2 \Delta F(X, Y)^T N / \partial X^2]$, т.е. когда выпуклой будет ГМ в области рассматриваемых режимов. Эта матрица является матрицей второй квадратичной формы ГМ. Но, что важно заметить, эта матрица является той матрицей в задачах оптимального потокораспределения,

положительная определенность которой требуется для получения строгого локального минимума задачи. Подробнее об этом будет рассмотрено в Главе 3.

1.6 Исследование параметров предельных режимов электрической системы

Уравнения потокораспределения, используемые для расчета, анализа и исследования режимов ЭС, являются нелинейными. В общем случае их решение в виде аналитических зависимостей можно получить только для модели небольшой электрической системы, обычно 2-х узловой, иногда - 3-х узловой ЭС. Для большей системы решение возможно только численными методами. Однако, имея численное решение, т.е. набор чисел, довольно трудно выявить и исследовать те или иные особенности, и численные решения, т.е. вычислительные эксперименты используются, как правило, для подтверждения или опровержения тех или иных подходов. Обычно, для выявления и исследования каких-либо особенностей используются небольшие модели, на которых можно получить аналитические выражения или их визуальное отображение [316], учитывая тот факт, что для исследования того или иного свойства важны функциональные зависимости, которые с помощью того или иного подхода можно отобразить на эквивалентной модели. Поэтому, хотя 2-х узловая система является простейшей, но именно она использовалась и используется многими исследователями, например, [130], [167], [186], [240], [262], [306], [311], [357] и т.д., для того, чтобы наглядно продемонстрировать или аналитически обосновать предлагаемые подходы к решению ряда проблем. Аналогичным образом, используя эту простейшую систему, рассмотрим полученные ранее, а также другие характеристики ПР, чтобы лучше понять ПР реальных ЭС.

Простейшая 2-х узловая система вместе с рядом параметров, используемых для анализа, представлена на рис. 1.18

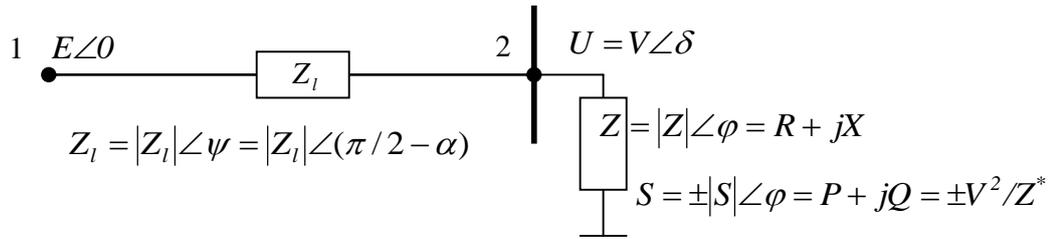


Рисунок 1.18 - 2-х узловая ЭС

Источник питания неограниченной мощности с напряжением $E \angle 0$ расположен в узле 1. Для вывода аналитических соотношений нагрузка (генерация) представлена в узле 2 в виде комплексного сопротивления $\pm Z$, где знак «+» соответствует нагрузке, а «-» - генерации. В этом случае активная и реактивная мощности в узле 2, а также его комплекс напряжения определяются следующими выражениями:

$$P = \pm \frac{E^2 k \cos \varphi}{|Z_l| (1 \pm 2k \cos \beta + k^2)}; \quad (1a)$$

$$Q = \pm \frac{E^2 k \sin \varphi}{|Z_l| (1 \pm 2k \cos \beta + k^2)}; \quad (1б)$$

$$U = \pm IZ = \frac{\pm EZ}{Z_l \pm Z} = \frac{E}{1 \pm k \angle -\beta}. \quad (1в)$$

где $k = |Z_l|/|Z|$; $\beta = \varphi - \psi = \varphi + \alpha - \pi/2$; α - угол потерь.

Если принять, что напряжение источника питания постоянно, так же, как сопротивление линии, то представленные выражения являются функциями двух переменных. Рассмотрим вначале выражение (1a). Максимально возможной величине активной мощности $|P_{max}|$ в узле 2 соответствуют два условия: $\frac{\partial P}{\partial k} = 0$ и $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$. Применение первого условия дает

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \pm \frac{E^2 \cos \varphi}{|Z_l|} \cdot \frac{1 - k^2}{(1 \pm 2k \cos \beta + k^2)^2} = 0. \quad (2a)$$

Отсюда следует, что режим максимальной активной нагрузки (генерации) $|P^{max}|$ будет тогда, когда

$$k = |Z_l/Z| = 1, \text{ т.е. } |Z| = |Z_l|. \quad (2б)$$

Это условие является ничем иным, как известной из электротехники теоремой о максимальной получаемой активной мощности: полное сопротивление передающего устройства должно быть равно полному сопротивлению приемника. Это условие справедливо как для потребляемой, так и выдаваемой активной мощности. Используя (2б) в (1а), можно получить

$$P^{max} = \pm \frac{E^2 \cos \varphi}{|Z_l| 2(1 \pm \cos \beta)}. \quad (2в)$$

Поэтому максимальные мощности нагрузки и генерации в рассматриваемом узле будут равны:

$$P_L^{max} = \frac{E^2 \cos \varphi}{2|Z_l|(1 + \cos \beta)} = \frac{E^2 \cos \varphi}{4|Z_l| \cos^2(\pi/4 - (\alpha + \varphi)/2)}; \quad (2г)$$

$$P_G^{max} = \frac{E^2 \cos \varphi}{2|Z_l|(1 - \cos \beta)} = \frac{E^2 \cos \varphi}{4|Z_l| \cos^2(\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2)}. \quad (2д)$$

Второе условие $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$ при учете (2б) дает

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mp \frac{E^2}{2|Z_l|} \cdot \frac{\sin \varphi \pm \sin \psi}{(1 \pm \cos \beta)^2} = 0, \quad (3а)$$

т.е. $\varphi = \mp \psi$, и

$$Z = Z_l^* \text{ или } Z = -Z_l. \quad (3б)$$

Другими словами, условию (3а) соответствуют два режима:

1. Режим максимальной нагрузки: $\varphi = -\psi$, $Z = Z_l^*$, т.е. $X = -X_l$, $R = R_l$.

Реактивная составляющая нагрузки носит емкостной характер и полностью компенсирует реактивное сопротивление линии, поэтому

$$P_L^{max} = \frac{E^2 \cos \varphi}{|Z_l| 2(1 + \cos 2\varphi)} = \frac{E^2 \cos \varphi}{|Z_l| 4 \cos^2 \varphi} = \frac{E^2}{|Z_l| 4 \cos \varphi}.$$

2. Режим максимальной генерации: $\varphi = \psi$, $Z = -|Z_l| \angle \psi = -R_l - jX_l$.

Активное и реактивное сопротивление линии полностью компенсируются, ток становится бесконечно большим, вырабатывается бесконечно большая

активная и реактивная мощность, которые идут только на потери мощности в линии, всякая передача мощности в противоположный узел отсутствует.

Таким образом, условие $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$ не соответствует практике эксплуатации

ЭС, поэтому не может использоваться.

Теперь рассмотрим условия получения (выработки) максимальной реактивной мощности (1б) в узле 2. Условие $\frac{\partial Q}{\partial k} = 0$ дает то же самое, что и

$\frac{\partial P}{\partial k} = 0$, а именно (2б). В свою очередь, условие $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$ при учете (2б) дает

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \pm \frac{E^2 k}{|Z_l|} \cdot \frac{\cos \varphi \pm \cos \psi}{(1 \pm \cos \beta)^2} = 0, \quad (4a)$$

т.е.

$$\varphi = \pi - \psi \text{ или } \varphi = -\psi. \quad (4б)$$

Поэтому получаются следующие два режима

1. $\varphi = \pi - \psi$, $Z = |Z_l| \angle (\pi - \psi) = -|Z_l| \angle -\psi = -R_l + jX_l$. Узел генерирует активную мощность, которая в точности покрывает потери активной мощности линии. Получается режим наибольшей реактивной нагрузки.

2. $\varphi = -\pi + \psi$, $Z = |Z_l| \angle (-\pi + \psi) = -|Z_l| \angle \psi = -R_l - jX_l$. Этот режим аналогичен 2-му случаю в режиме максимальной генерации активной мощности.

Таким образом, критерий $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$, так же, как $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$, дает условия, не соответствующие практике эксплуатации ЭС, поэтому в дальнейшем соотношения, получаемые из этих условий, не будут рассматриваться. В свою очередь условия $\frac{\partial P}{\partial k} = 0$ и $\frac{\partial Q}{\partial k} = 0$ определяют одно и то же соотношение (2б), т.е. оно является необходимым условием, как для режима максимальной активной мощности, так и реактивной мощности.

Рассмотрим выражение комплекса напряжения в узле в режиме максимальной нагрузки

$$\begin{aligned}
 U^{P_L^{max}} &= V^{P_L^{max}} \angle \delta^{P_L^{max}} = \frac{E}{1 + 1 \angle -\beta} = \frac{E \angle (\beta/2)}{2 \cos(\beta/2)} = \\
 &= \frac{E \angle (-\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2)}{2 \cos(-\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2)}.
 \end{aligned}
 \tag{5a}$$

Т.е. в режиме максимально возможной получаемой мощности в узле 2 угол по линии равен

$$\delta_{P_{max}} = -\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2.
 \tag{5б}$$

Проанализируем представленные выражения.

1. Так как $\cos(\dots) \leq 1$, $V^{P_L^{max}} = |U^{P_L^{max}}| \geq E/2$. Наименьшее значение $V^{P_L^{max}} = E/2$ достигается, когда

$$\delta^{P_L^{max}} = -\pi/4 + (\alpha + \varphi) = 0, \text{ т.е. } \alpha + \varphi = \pi/2.$$

2. В режиме максимальной потребляемой мощности величина угла по линии при индуктивной нагрузке ($\varphi > 0$) будет намного меньше 45° :

$$\delta^{P_L^{max}} = -\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2 > -\pi/4.$$

Интересно сравнить это значение угла с углом по линии 2-х узловой системы с постоянными модулями напряжения (т.е. с PV узлами), для которой в режиме максимальной нагрузки угол по линии равен $-\pi/2 + \alpha$, т.е. существенно превышает величину $\delta^{P_L^{max}}$.

С компенсацией реактивной мощности угол φ уменьшается, что увеличивает угол по линии $\delta^{P_L^{max}}$ по абсолютной величине, а также модуль напряжения $V^{P_L^{max}}$. На рис. 1.19 представлены графики зависимости величины напряжения и угла по линии в зависимости от потребляемой активной мощности при различных фиксированных значениях коэффициентов мощности. Так как в этих случаях реактивная мощность определяется соотношением $Q = P \tan \varphi$, графики зависимости от реактивной мощности будут иметь аналогичный вид.

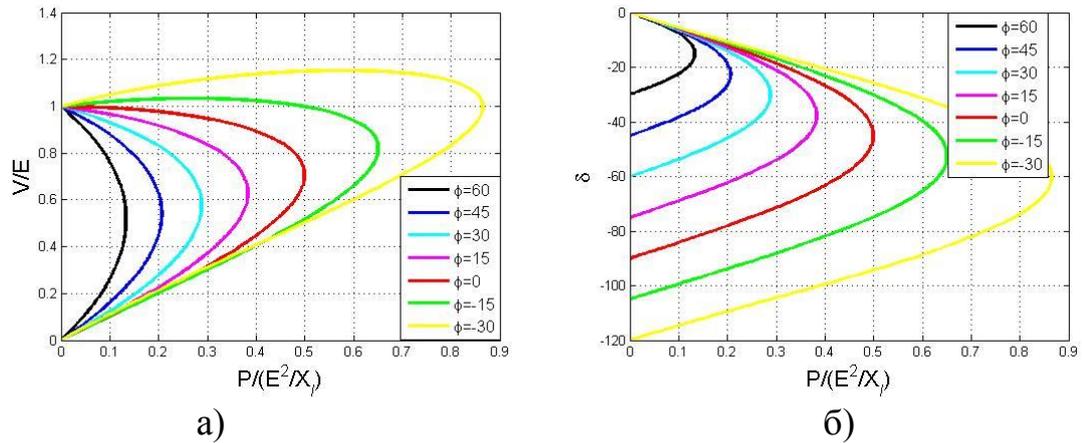


Рисунок 1.19 - Графики зависимости (а) напряжения и (б) фазового угла от величины потребляемой активной мощности, когда $R=0$ ($\alpha=0$)

3. Если $V > V_L^{max}$, то рабочая точка (режим) находится на обычной (прямой) характеристике. Если $V < V_L^{max}$, то режим будет находиться на «обратной» характеристике [263]. В этом случае увеличение активной или реактивной нагрузки сопровождается не снижением, а напротив, увеличением напряжения в нагрузочном узле (на прямой ветви характеристики происходит наоборот). Также на обратной ветви характеристики, при увеличении величины напряжения E в балансирующем узле, напряжение в нагрузочном узле V не увеличивается, а наоборот, снижается. Переход на обратную характеристику может произойти, когда PV узел (генератор) выходит на ограничение по реактивной мощности. Рассматриваемая 2-х узловая схема позволяет пояснить такую опасную ситуацию. Предположим, что узел 2 - это шина генератора, напряжение которой поддерживается системой АРВ, а узел 1 представляет «внутреннюю» ЭДС генератора, величина которой пропорциональна току возбуждения. Тогда сопротивлению X_l будет соответствовать синхронное сопротивление генератора. Постоянному напряжению на шинах генератора отвечает горизонтальная линия на рис. 1.20.

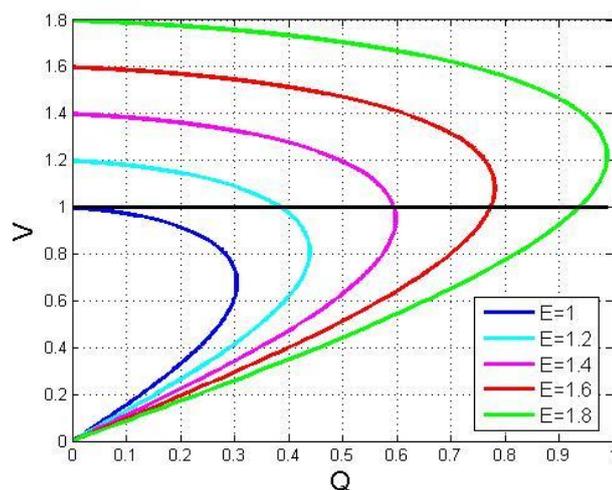


Рисунок 1.20 - QV – кривые в о.е. для различных значений E

С ростом нагрузки генератора система АРВ увеличивает ток возбуждения, а значит E , чтобы поддержать напряжения на его шинах, как показано на рис. 1.20. Т.е. система АРВ поддерживает напряжение на шинах генератора за счет перехода с одной QV характеристики на другую. Предположим, что в результате работы АРВ ток возбуждения, которому соответствует $E=1.8$ на рис. 1.20, достиг предельно допустимого значения. В этом случае напряжение на шинах генератора больше не будет поддерживаться постоянной, которой соответствует горизонтальная прямая линия на рис. 1.20, а будет изменяться согласно соответствующей QV кривой. Для представленного случая рабочая точка будет находиться на обратной ветви QV характеристики. Эта рабочая точка будет статически неустойчивой, т.к. действие любой автоматической системы регулирования ориентированы на прямую ветвь характеристики. В западной литературе такая ситуация называется индуцированным пределом бифуркаций (*Limit-induced bifurcation*) и рассматривается как статически неустойчивая. Согласно выражению для $V_L^{P_{max}}$ (5а), угол перехода на обратную характеристику зависит от соотношения между модулями напряжения по концам линии $\delta_{inv} = \arccos(E/2V)$. Если $E=V$, тогда $\delta_{inv}=60^\circ$. С ростом E/V δ_{inv} уменьшается.

Такая ситуация редко встречается как в практике расчетов УР, так и при эксплуатации ЭС, но все же встречается, как например, при утяжелении режимов двух IEEE тестовых ЭС IEEE-118 и RTS-96, когда активная и реактивная мощности нагрузок и активная мощность генераторов увеличиваются пропорционально мощностям исходного режима. В таких случаях расчет УР не сходится не за счет достижения максимального перетока мощности, а из-за неправильного действия системы АРВ на обратной ветви характеристики, поскольку происходит следующее – генератор выходит на ограничение по верхнему пределу реактивной мощности. Но так как рабочая точка будет находиться на обратной ветви характеристики, напряжение на его шинах не будет снижаться при дальнейшем утяжелении, а наоборот, будет увеличиваться в соответствии с рис. 1.20. Поэтому у генератора на следующей итерации будет зафиксирован заданный модуль напряжения, но это опять приведет к превышению верхнего предела вырабатываемой им реактивной мощности. Генератор снова будет посажен на верхний предел реактивной мощности, что приведет опять к повышению его напряжения и т.д. и т.п. Т.е. программа расчета УР не может рассчитать такой режим, а также определить генератор, чей предел индуцирует такую ситуацию. Решение этого вопроса будет рассмотрено в главе 4 диссертации. Следует отметить, что такие ситуации могут возникать не только в расчетной практике, но и в реальных ЭС. Так, например, такие случаи неоднократно наблюдались в Тюменской энергосистеме в середине 80-х годов прошлого века [43]. Проявлялись они в том, что напряжение в Сургутском энергоузле внезапно повышалось до довольно высоких значений, опасных для изоляции оборудования, и никакими средствами регулирования, включая изменение уставок АРВ генераторов, невозможно было уменьшить величину напряжения. Потом, через довольно продолжительное время, напряжения внезапно восстанавливались до нормальных значений.

Теперь рассмотрим случай, когда узел 2 генерирует активную мощность. На рис. 1.21 представлены графики зависимости напряжения и угла по линии от генерируемой величины активной мощности в узле 2, представленной на отрицательной части оси абсцисс, при различных значениях коэффициента мощности. Там же, для сравнения, на положительной части оси представлены рассмотренные ранее графики этих зависимостей, когда узел 2 потребляет активную мощность. Как видно из этого рисунка, характер изменения этих графиков получается иной.

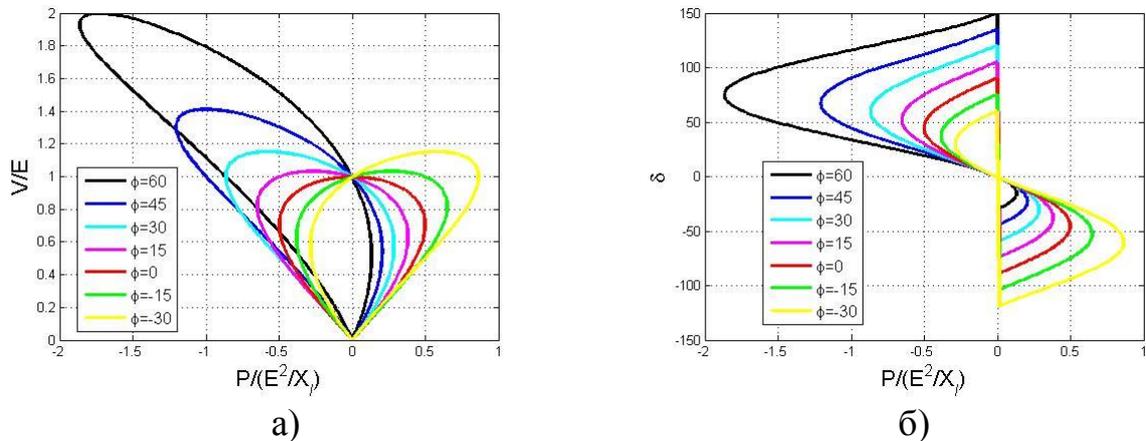


Рисунок 1.21 - Графики зависимости (а) напряжения и (б) фазового угла от величины активной мощности, при $R=0$ ($\alpha=0$)

Выражение для комплекса напряжения в режиме выдачи максимальной мощности в узле 2 имеет вид

$$U^{P_G^{max}} = V^{P_G^{max}} \angle \delta^{P_G^{max}} = \frac{E}{1 - \cos \beta} = \frac{E \angle (\beta/2 + \pi/2)}{2 \cos(\beta/2 + \pi/2)} = \frac{E \angle (\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2)}{2 \cos(\pi/4 + (\alpha + \varphi)/2)}. \quad (6a)$$

Таким образом, угол по линии в режиме максимума генерации активной мощности в узле 2 равен

$$\delta^{P_G^{max}} = \pi/4 + (\alpha + \varphi)/2. \quad (6b)$$

Поэтому в обычном режиме генерации активной и реактивной мощности величина $\delta^{P_G^{max}} > 45^\circ$. Меньшие значения получаются, когда генератор работает в режиме «недовозбуждения», т.е. с $\varphi < 0$. С ростом φ угол по линии $\delta^{P_G^{max}}$ также растет. Отметим, что в режиме максимума генерации (в узле 2) в

2-х узловой ЭС с PV узлами угол по линии равен $\delta = \pi/2 + \alpha$, что намного превышает $\delta^{P_G^{max}}$.

Формула для угла δ_{inv} перехода на обратную характеристику получается такой же, как в режиме потребления активной мощности в узле 2. Однако необходимо учесть, что когда узел работает в режиме генератора, противоположный узел является нагрузкой, поэтому $E < V$. Отсюда из формулы для δ_{inv} следует, что хотя $\delta_{inv} > 60^\circ$, но всегда меньше 90° . Когда $E = V/2$ (наименьшее значение для E в режиме максимума генерации мощности), $\delta_{inv} = \arccos(1/4) = 75,52^\circ$.

Обратная ветвь характеристики представляет интерес тем, что при увеличении ЭДС E , приложенной к узлу 1, напряжение в узле 2 не увеличивается, а наоборот, снижается, при неизменной величине мощности в узле 2. Рассмотрим, как влияют статические характеристики нагрузки на переход на обратную ветвь характеристики, ограничившись режимом потребления активной мощности в узле 2.

Величина напряжения в узле 2 определяется выражением

$$V = |U| = \frac{E}{|1 + k\angle -\beta|} = \frac{E}{\sqrt{(1 + k\cos\beta)^2 + (k\sin\beta)^2}} = \frac{E}{\sqrt{1 + 2k\cos\beta + k^2}},$$

или

$$V^2(1 + 2k\cos\beta + k^2) = E^2.$$

Дифференцируя последнее выражения по E и используя линеаризованные уравнения для неявных зависимостей, можно получить

$$\frac{dV}{dE} = \frac{\sqrt{1 + 2k\cos\beta + k^2}}{1 - k^2 + \frac{k\cos\varphi + \sin\alpha}{V|Y_l|} \frac{\partial P}{\partial V} + \frac{k\sin\varphi + \cos\alpha}{V|Y_l|} \frac{\partial Q}{\partial V}}, \quad (7a)$$

где $Y_l = 1/Z_l$; $\partial P/\partial V$ и $\partial Q/\partial V$ - регулирующие эффекты нагрузки узла 2. В режиме холостого хода, т.е. когда нагрузка отсутствует, $k=0$ и поэтому $dV/dE > 0$ при обычных значениях величины регулирующего эффекта нагрузки. С ростом нагрузки k увеличивается, уменьшая тем самым

величину dV/dE . Переход на обратную ветвь характеристики происходит, когда знаменатель этого выражения переходит через ноль. Этому соответствует значение величины

$$k = \frac{\cos \varphi \frac{\partial P}{\partial V} + \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial V}}{2V|Y_l|} \pm \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi \frac{\partial P}{\partial V} + \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial V}}{2V|Y_l|} \right)^2 + 1 + \frac{\sin \alpha \frac{\partial P}{\partial V} + \cos \alpha \frac{\partial Q}{\partial V}}{V|Y_l|}}. \quad (76)$$

Если увеличивается нагрузка, у которой регулирующий эффект равен нулю, переход на обратную ветвь характеристику происходит в режиме максимальной нагрузки, т.е. когда $k=1$. Если нагрузка характеризуется величинами обычного регулирующего эффекта, то переход на обратную характеристику происходит при $k > 1$ т.е. при величине нагрузки меньше максимально возможной, на обратной ветви характеристики рис. 1.19-1.21.

Моделирование нагрузки комплексным сопротивлением является удобным инструментарием для получения аналитических выражений анализируемых параметров УР. Однако при расчете УР нагрузка или генерация задаются в виде мощностей. Поэтому исследуем переход на обратную ветвь характеристики, воспользовавшись узловыми уравнениями баланса мощностей узла 2, полагая узел 1 балансирующим:

$$\Delta P = P + V^2|Y_l| \sin \alpha + EV|Y_l| \sin(\delta - \alpha) = 0; \quad (8a)$$

$$\Delta Q = Q + V^2|Y_l| \cos \alpha - EV|Y_l| \cos(\delta - \alpha) = 0. \quad (8б)$$

Линеаризация (8a)-(8б) дает

$$\begin{vmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{vmatrix}, \quad (8в)$$

где

$$\partial \Delta P / \partial \delta = EV|Y_l| \cos(\delta - \alpha) = Q + V^2|Y_l| \cos \alpha;$$

$$\partial \Delta P / \partial V = 2V|Y_l| \sin \alpha + E|Y_l| \sin(\delta - \alpha) + \partial P / \partial V = -P/V + V|Y_l| \sin \alpha + \partial P / \partial V;$$

$$\partial \Delta Q / \partial \delta = E|Y_l| \sin(\delta - \alpha) = -P - V^2|Y_l| \sin \alpha;$$

$$\partial \Delta Q / \partial V = 2V|Y_l| \cos \alpha - E|Y_l| \cos(\delta - \alpha) + \partial Q / \partial V = -Q/V + V|Y_l| \cos \alpha + \partial Q / \partial V.$$

Определить матрицы Якоби будет равен

$$\det \begin{vmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{vmatrix} = (Q + V^2 |Y_l| \cos \alpha) \partial Q / \partial V + \\ + (P + V^2 |Y_l| \sin \alpha) \partial P / \partial V + V^3 |Y_l|^2 - Q^2 / V - P^2 / V. \quad (8\text{г})$$

Если для текущего режима ввести в рассмотрение «шунт нагрузки» Y , т.е. положить

$$P = V^2 |Y| \cos \varphi, \quad Q = V^2 |Y| \sin \varphi,$$

и воспользоваться $|Y| = k |Y_l|$, выражение для Якобиана (8г) после ряда преобразований можно представить в виде

$$\det = V^3 |Y_l|^2 \left(1 - k^2 + \frac{k \cos \varphi + \sin \alpha}{V |Y_l|} \frac{\partial P}{\partial V} + \frac{k \sin \varphi + \cos \alpha}{V |Y_l|} \frac{\partial Q}{\partial V} \right). \quad (8\text{д})$$

Сравнение (8д) с (7а) показывает, что выражение для Якобиана (8д), поделенное на $V^3 |Y_l|^2$, в точности равно выражению знаменателя (7а). Т.е. все ранее полученные соотношения и выводы можно подтвердить, рассматривая уравнения потокораспределения, используемые в обычных алгоритмах расчета УР. Например, согласно (8д), если статические характеристики нагрузки не учитываются, т.е. принимается, что $\partial P / \partial V = 0$ и $\partial Q / \partial V = 0$, Якобиан будет равен нулю, когда $k = 1$. Таким образом, получается такой же критерий предельного режима $|Y_l| = |Y|$. При переходе через предельный режим Якобиан (8д) изменяет знак, и происходит переход на обратную ветвь характеристики. Если статические характеристики нагрузки учитываются, тогда переход на обратную ветвь характеристики происходит за режимом максимальной нагрузки, так как для обычных статических характеристик нагрузки $\partial P / \partial V > 0$ и $\partial Q / \partial V > 0$.

Ранее отмечалось, что переход на обратную характеристику может быть вызван «посадкой» генератора на ограничение по реактивной мощности. В этом случае определитель матрицы Якоби одномоментно изменяет знак, и режим ряда узлов мгновенно (скачкообразно) переходит на обратную ветвь характеристики. Возникающие при этом последствия для

генераторных узлов были рассмотрены ранее. Для узлов, нагрузка которых включает асинхронные двигатели (АД), индуцированная пределом реактивной мощности бифуркация вызывает немедленную потерю статической устойчивости. Поэтому за рубежом эта бифуркация называется также немедленная неустойчивость (“immediate instability”).

Впервые такое воздействие индуцированной пределом бифуркации на статическую устойчивость нагрузки было исследовано в [245] на основе анализа численного решения системы дифференциальных нелинейных уравнений движения 3-х узловой модели ЭС. Авторы, по сути дела, дали только численное подтверждение возможности появления таких происшествий без выявления причин такого катастрофического поведения нагрузки.

Прояснить ситуацию можно на рассматриваемой 2-х узловой модели, если предположить, что узел 1 представляет собой шину генератора, напряжение которой поддерживается неизменной его системой АРВ, а нагрузкой узла 2 выступает АД. На рис. 1.22.а представлены PV-кривые АД, а на рис. 1.22.б – его соответствующие характеристики активной мощности. Сплошные кривые с номером 1 соответствуют случаю, когда пределы реактивной мощности генератора не принимаются во внимание, т.е. напряжение в узле 1 поддерживается неизменным при любой величине нагрузки в узле 2. Кривые с номером 2 отвечают случаю, когда генератор, подключенный к узлу 1, вышел на верхний предел по реактивной мощности.

Предположим, что текущему режиму соответствует точка на этих кривых (с номером 1) левее точки А на рис. 1.22а и ниже на рис. 1.22б. При этом реактивная мощность генератора находится в допустимых пределах, система АРВ поддерживает напряжение узла 1 неизменным. Рассмотрим, что произойдет, если нагрузка узла 2 начнет возрастать. С увеличением мощности нагрузки скольжение АД будет возрастать, напряжение в узле 2 снижаться, а реактивная мощность генератора, поддерживающая модуль напряжения в узле 1 неизменным, будет возрастать.

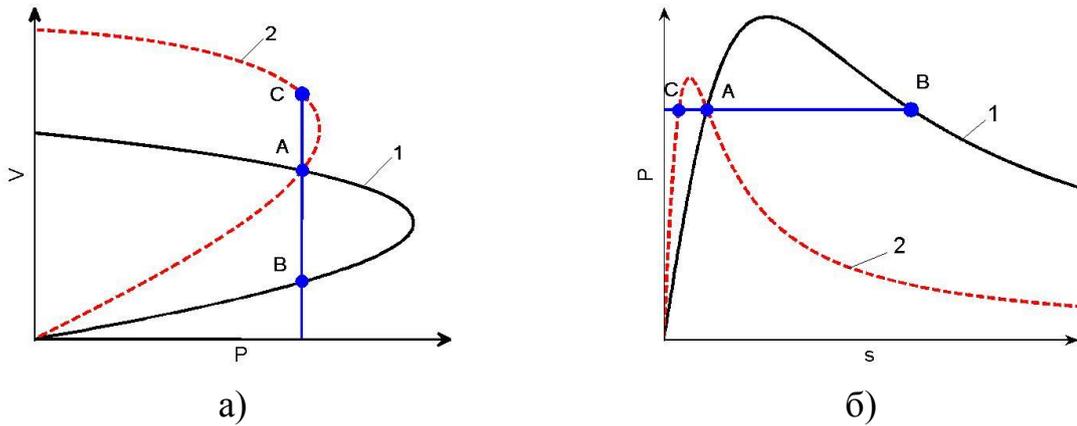


Рисунок 1.22 - PV – кривые (а) и характеристики АД (s – скольжение) (б)

Предположим, что в точке A реактивная мощность генератора достигнет верхнего предела. Поэтому начиная с этой точки система АРВ генератора блокируется и генератор в схеме замещения должен представляться не шиной с постоянным модулем напряжения, а внутренним ЭДС за синхронным сопротивлением. Соответственно, параметры 2-х узловой системы в точке A должны быть скорректированы – к узлу 1 подключается внутренняя ЭДС генератора, а индуктивное сопротивление связи увеличивается на величину синхронного сопротивления генератора. Поэтому в точке A мгновенно уменьшится критическое скольжение АД за счет увеличения индуктивного сопротивления связи, PV -кривая и характеристика АД мгновенно изменятся и примут вид характеристик с индексом 2 на рис. 1.22. При этом, хотя скольжение АД останется прежним, точка A будет находиться на обратной (неустойчивой) ветви характеристики 2. Поэтому АД немедленно потеряет статическую устойчивость и опрокинется. Следует отметить, что анализ результатов численного решения дифференциальных уравнений 3-х узловой ЭС [245] показал, что при определенных начальных условиях АД не опрокидывается в точке A , а его режим «перемещается» в точку C . Эта точка находится на прямой ветви характеристик 2 и является статически устойчивой. Т.е. АД ведет себя так, как система АРВ генератора на обратной ветви характеристики. Однако в практике эксплуатации реальные начальные условия неизвестны, точно так же, как реальные

параметры дифференциальных уравнений движения системы. Поэтому принимается, что бифуркация, индуцированная пределом реактивной мощности генератора, вызывает немедленную потерю статической устойчивости.

Теперь рассмотрим и проанализируем выражения для относительных приростов потерь мощности, воспользовавшись:

$$P = |I|^2 |Z| \cos \varphi; P_2 = |I|^2 (|Z_1| \cos \psi + |Z| \cos \varphi); \pi = |I|^2 |Z_1| \cos \psi; \quad (9a)$$

$$Q = |I|^2 |Z| \sin \varphi; Q_2 = |I|^2 (|Z_1| \sin \psi + |Z| \sin \varphi); q = |I|^2 |Z_1| \sin \psi; \quad (9б)$$

$$I = \frac{E}{Z_1 + Z} = \frac{E}{Z_1(1 + Z/Z_1)} = \frac{E}{Z_1(1 + \mu \angle(\varphi - \psi))}, \quad (9в)$$

где $\mu = 1/k = |Z/Z_1|$. После линеаризации (9) и ряда преобразований можно получить следующие выражения для относительных приростов потерь:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = -\frac{2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \cos \psi}{1 - \mu^2}; \quad \frac{\partial \pi}{\partial P_1} = \frac{-2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \cos \psi}{1 - \mu^2 - 2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \cos \psi}; \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -\frac{2(\mu \sin \varphi + \sin \psi) \cos \psi}{1 - \mu^2}; \quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \frac{-2(\mu \sin \varphi + \sin \psi) \cos \psi}{1 - \mu^2 - 2 \sin \psi (\mu \sin \varphi + \sin \psi)}; \quad (10б)$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \sin \psi}{1 - \mu^2}; \quad \frac{\partial q}{\partial P_1} = \frac{-2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \sin \psi}{1 - \mu^2 - 2(\mu \cos \varphi + \cos \psi) \cos \psi}; \quad (10в)$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = -\frac{2 \sin \psi (\mu \sin \varphi + \sin \psi)}{1 - \mu^2}; \quad \frac{\partial q}{\partial Q_1} = \frac{-2 \sin \psi (\mu \sin \varphi + \sin \psi)}{1 - \mu^2 - 2 \sin \psi (\mu \sin \varphi + \sin \psi)}. \quad (10г)$$

На рис. 1.23 представлены графики зависимости относительных приростов потерь активной и реактивной мощности от величины активной нагрузки в узле 2. В режиме максимальной мощности в узле 2 $|\mu| = 1$, поэтому, согласно (10),

$$\frac{\partial \pi^{P^{\max}}}{\partial P} = \pm \infty; \quad \frac{\partial \pi^{P^{\max}}}{\partial Q} = \pm \infty; \quad \frac{\partial \pi^{P^{\max}}}{\partial P_1} = 1; \quad \frac{\partial \pi^{P^{\max}}}{\partial Q_1} = \operatorname{ctg} \psi; \quad (11a)$$

$$\frac{\partial q^{P^{\max}}}{\partial P} = \pm \infty; \quad \frac{\partial q^{P^{\max}}}{\partial Q} = \pm \infty; \quad \frac{\partial q^{P^{\max}}}{\partial P_1} = \operatorname{tg} \psi; \quad \frac{\partial q^{P^{\max}}}{\partial Q_1} = 1; \quad (11б)$$

Таким образом, в режиме максимальной (потребляемой или генерируемой в узле 2) мощности относительные приросты потерь для балансирующего узла

$\partial \pi^{P^{max}} / \partial P_1$ и $\partial q^{P^{max}} / \partial Q_1$ равны единице. Поэтому в этих условиях БУ не способен поддержать режим в узле 2 как по активной, так и по реактивной мощности. Вся его дополнительная выработка активной и реактивной мощности будет полностью компенсироваться возникающими при этом потерям активной и реактивной мощности в передающей линии.

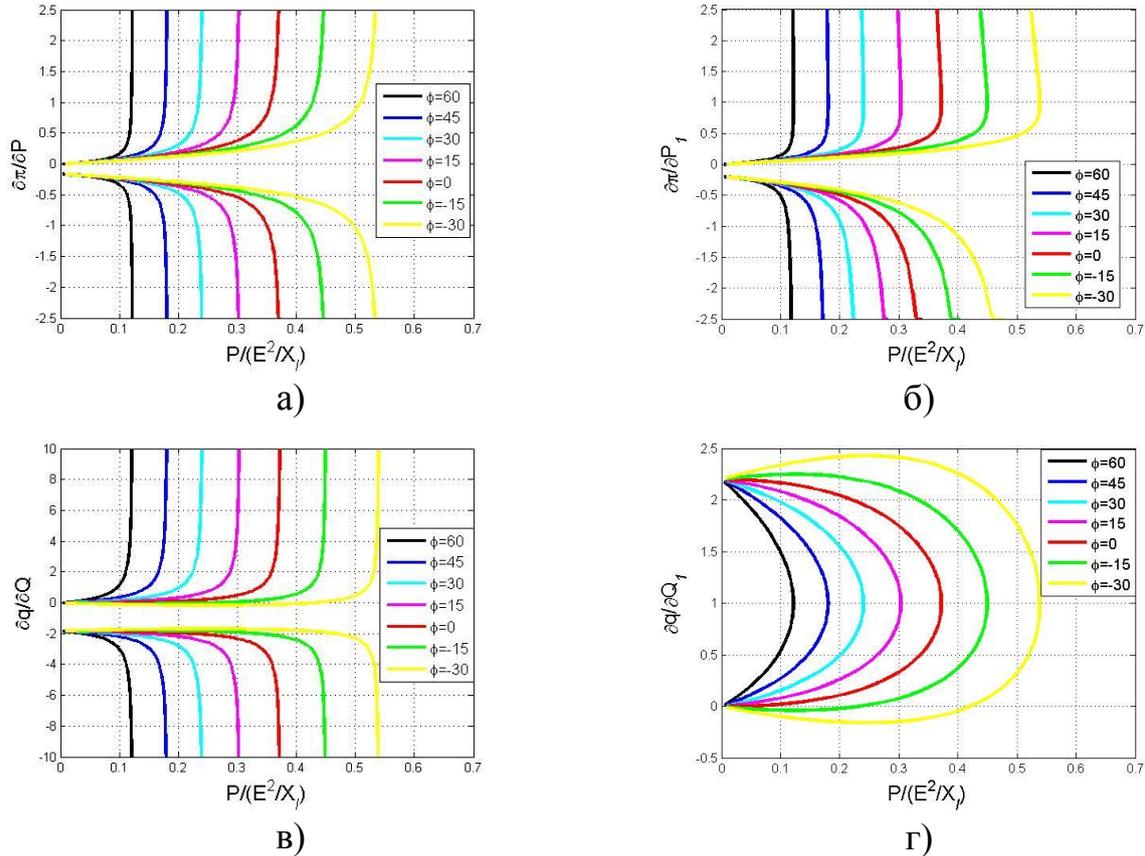


Рисунок 1.23 - Графики зависимости относительных приростов потерь мощности от величины активной нагрузки в узле 2 ($R_l/X_l=0.3$)

Интересно сравнить полученные относительные приросты потерь для той же 2-х узловой схемы, но с PV узлами, для которой

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = \frac{\cos(\delta - \alpha) - \cos(\delta + \alpha)}{\cos(\delta - \alpha)}; \quad \frac{\partial \pi}{\partial P_1} = \frac{\cos(\delta - \alpha) - \cos(\delta + \alpha)}{-\cos(\delta + \alpha)}; \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\cos(\delta - \alpha) - \cos(\delta + \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)}; \quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \frac{\cos(\delta - \alpha) - \cos(\delta + \alpha)}{\sin(\delta + \alpha)}; \quad (12б)$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\sin(\delta - \alpha) + \sin(\delta + \alpha)}{\cos(\delta - \alpha)}; \quad \frac{\partial q}{\partial P_1} = \frac{\sin(\delta - \alpha) + \sin(\delta + \alpha)}{-\cos(\delta + \alpha)}; \quad (12в)$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\sin(\delta - \alpha) + \sin(\delta + \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)}; \quad \frac{\partial q}{\partial Q_1} = \frac{\sin(\delta - \alpha) + \sin(\delta + \alpha)}{\sin(\delta + \alpha)}. \quad (12г)$$

На рис. 1.24 представлены соответствующие графики относительных приростов потерь мощности от активной мощности нагрузки в узле 2.

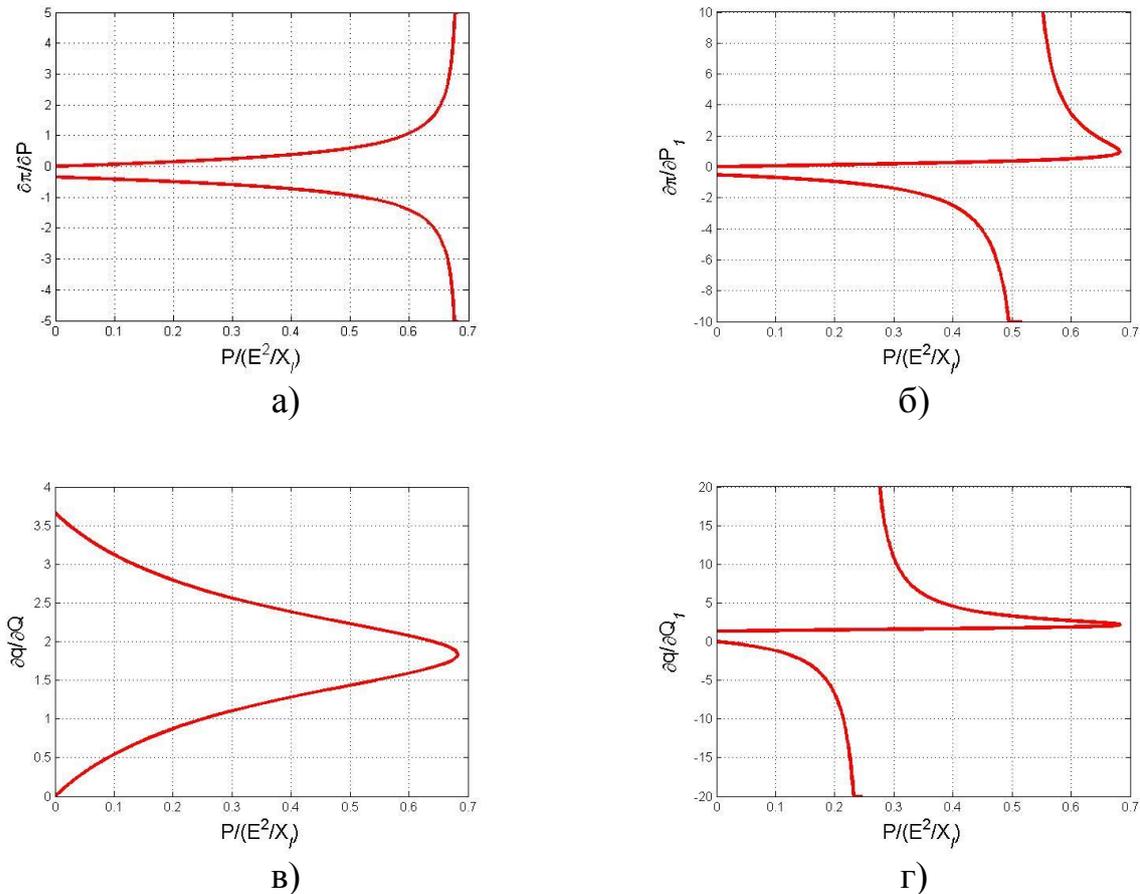


Рисунок 1.24 - Графики зависимости относительных приростов потерь мощности от величины нагрузки в узле 2 ($R_1/X_1=0.3$)

Если в качестве балансирующего узла использовать узел 1, то ПР отвечает условие

$$\partial P/\partial \delta = EV|Y_1|\cos(\delta - \alpha) = 0,$$

т.е. $\delta = \pm\pi/2 + \alpha$. Угол $\delta = -\pi/2 + \alpha$ соответствует режиму потребления максимальной активной мощности узлом 2, и его подстановка в (12) дает:

$$\partial\pi^{P_L^{\max}}/\partial P = \pm\infty; \quad \partial\pi^{P_L^{\max}}/\partial P_1 = 1; \quad \partial\pi^{P_L^{\max}}/\partial Q = \sin(2\alpha); \quad \partial\pi^{P_L^{\max}}/\partial Q_1 = \operatorname{tg}(2\alpha);$$

$$\partial q^{P_L^{\max}}/\partial P = \pm\infty; \quad \partial q^{P_L^{\max}}/\partial P_1 = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\partial q^{P_L^{\max}}/\partial Q = 1 + \cos(2\alpha); \quad \partial q^{P_L^{\max}}/\partial Q_1 = 1 + \frac{1}{\cos(2\alpha)}.$$

В случае $\delta + \alpha = -\pi/2$, т.е. $\delta = -\pi/2 - \alpha$ (режим максимальной генерации в узле 2) получаются аналогичные соотношения, но некоторые изменяют знак.

Таким образом, для 2-х узловой системы с PV узлами признаком ПР является $\partial\pi/\partial P_1 = 1$, т.е. неспособность БУ обеспечить узел 2 требуемой активной мощностью.

1.7 Предельные по статической апериодической устойчивости режимы электрической системы

Вопросы статической устойчивости играют определяющую роль для функционирования ЭС. Синхронное вращение роторов всех генераторов является основой основ работы синхронного энергообъединения. Практически все технические регламенты, в конечном счете, направлены на обеспечение и поддержание устойчивости ЭС.

Расчеты статической устойчивости базируются на исследовании системы дифференциальных уравнений малых колебаний. По характеру нарушения статическую устойчивость обычно разделяют на апериодическую и колебательную. Первый вид неустойчивости возникает с появлением действительных положительных собственных значений матрицы линеаризованных дифференциальных уравнений движения в канонической форме, второй – с появлением комплексных собственных значений с положительной вещественной частью.

Если рассматривать вопросы устойчивой работы ЭС в полном объеме, то необходимо учитывать множество элементов и факторов, и задача становится попросту необъятной. Она требует исследования множества переменных, но, что самое главное, требуется значительный объем исходной информации, который попросту недоступен. Поэтому в практике исследования статической устойчивости обычно используют агрегированный подход – считается, что все механизмы каждого элемента ЭС работают устойчиво и требуется оценить устойчивость их совместной работы в энергосистеме, т.е. статическую устойчивость режима ЭС. Общая методология анализа статической устойчивости конкретных режимов ЭС глубоко и подробно разработана применительно к широкому классу моделей энергосистем [4], [29], [41], [42], [56], [57], [79], [95], [114], [124], [152], [285],

[295], [310], [312], [328]. Следует отметить, что при работе ЭС состав электрооборудования постоянно меняется. Данные о планируемом режиме работы и оперативная информация ограничивается, как правило, составом генерирующего оборудования, их выработкой и нагрузкой потребителей. В лучшем случае для потребителей имеется также информация о статических характеристиках [184]. Состав же включенного электрооборудования потребителей, как правило, неизвестен. Да и получение статических характеристик весьма проблематично. Поэтому при краткосрочном планировании и оперативном управлении режимами ЭС анализируется только статическая аperiodическая устойчивость, основываясь на том, что причины возникновения колебательной неустойчивости в ЭС обусловлены, как правило, некорректным выбором настроек автоматических регуляторов, и полагают, что имеющиеся настройки автоматических устройств обеспечивают статическую колебательную устойчивость ЭС [359].

Простого установления факта устойчивости того или иного режима недостаточно. Для обеспечения надежной и безопасной работы ЭС необходимо оценить степень близости рассматриваемого режима к множеству предельных по статической устойчивости режимов системы. Согласно [329] предельным по статической устойчивости режимом ЭС является такой УР, в котором любые малые изменения его параметров в любом неблагоприятном направлении вызывают потерю синхронизма генераторов или лавину напряжения. Вычисление собственных значений матрицы линеаризованных уравнений малых колебаний для анализа их знаков является весьма трудоемкой. Поэтому П.С. Жданов предложил анализировать статическую аperiodическую устойчивость ЭС по изменению знака свободного члена характеристического уравнения, т.е. начинать с заведомо устойчивого УР и ухудшать (утяжелять) режим, пока свободный член характеристического уравнения не пройдет через нуль. Свободный член характеристического уравнения представляет собой определитель матрицы линеаризованных уравнений малых колебаний, составной частью которой

является матрица Якоби потокораспределения. Впоследствии обнаружилось, что при определенных условиях определители этих матриц могут одновременно изменять свой знак. Впервые такое важное свойство было выявлено [99], [359], где показано, что Якобиан УУР практически совпадает со свободным членом характеристического уравнения, т.е. с определителем матрицы линеаризованных уравнений переходных процессов, если анализ статической устойчивости выполняется при следующих допущениях: 1) активные сопротивления в цепях статоров генераторов не учитываются; 2) отсутствуют демпферные обмотки и демпфирующие моменты; 3) все генераторы оснащены системами АРВ с малыми постоянными времени и высокими коэффициентами усиления, так что модули напряжения всех генераторов поддерживаются неизменными; 4) неизменный механический момент на валу каждого генератора; 5) один из генераторов имеет бесконечную постоянную инерцию и незначительное синхронное сопротивление, так что его угол и модуль напряжения поддерживаются неизменными; 6) нагрузки задаются статическими характеристиками по напряжению, а УУР формируются при следующих условиях: а) для генерирующих узлов в качестве независимых (т.е. фиксируемых) переменных задаются активные мощности и модули напряжения (*PV*-узлы); б) узлы нагрузок вводятся в расчет теми же статическими характеристиками, что и при расчете статической устойчивости; в) в качестве БУ выбраны шины бесконечной мощности. Согласно [99], [359], только при этих условиях знак Якобиана потокораспределения дает информацию о статической устойчивости исследуемого режима, как при представлении напряжений узлов в полярной, так и прямоугольной системе координат.

В работе [327] были подробно проанализированы условия, предложенные в [359], и показано, что хотя Якобиан УУР не совпадает со свободным членом характеристического уравнения для системы, в которой сверхпереходные процессы (т.е. электромагнитные переходные процессы в цепях статора генераторов и сети) не учитываются, все генераторы

представляются моделью 3-го порядка с системами АРВ пропорционального типа и первичным регулированием частоты, однако при принятых условиях [359] Якобиан и свободный член характеристического уравнения такой системы могут одновременно изменять свой знак. Это означает, что проверка изменения знака Якобиана УУР может выявить возможную статическую апериодическую неустойчивость. В работе [327] обнаружены также несколько другие условия, когда изменение знака Якобиана УУР может выявить возможную статическую апериодическую неустойчивость для исследуемой модели ЭС: 1) активные сопротивления в цепях статоров генераторов пренебрежительно малы и не учитываются; 2) переходные реактивные сопротивления каждой машины пренебрежительно малы и не учитываются; 3) постоянные времени демпферных и обмоток возбуждения каждой машины бесконечно большие, поэтому переходные ЭДС не изменяются; 4) неизменный механический момент на валу каждого генератора; 5) один из генераторов имеет бесконечную постоянную инерцию и незначительное синхронное сопротивление, так что его угол и модуль напряжения поддерживаются неизменными; 6) нагрузки задаются постоянными активной и реактивной мощностями. При этих предположениях каждый угол генератора будет равен углу на его шине плюс некоторая константа, и напряжения на шинах генераторов будут оставаться неизменными.

В настоящее время большинство расчетов предельных режимов по статической апериодической устойчивости ведутся, основываясь на результатах [29], [95], [99], [359], т.е. полагают, что исходный режим статически устойчив, затем его изменяют тем или иным образом до тех пор, пока матрица Якоби УУР не станет вырожденной. При таком подходе получается, что предельный по статической апериодической устойчивости будет также предельным по существованию решения УУР. Однако ранее было показано, что в реальных ЭС, т.е. когда учитываются активные сопротивления элементов сети, предельные по существованию режимы

зависят от месторасположения БУ. Это означает, что при таком подходе предельные по статической апериодической устойчивости режимы будут также зависеть от выбора БУ. Хотя для выбора БУ имеются определенные рекомендации (например, в качестве БУ рекомендуется выбирать наиболее мощную генерирующую систему, или наиболее мощную электростанцию), однако такие рекомендации не могут во всех случаях гарантировать адекватный выбор БУ для определения действительного коэффициента запаса статической устойчивости. Поэтому вызывает интерес вопрос определения предельного по статической апериодической устойчивости режима без явного назначения и использования БУ. Для представленных выше условий это означает исключение условия 5), т.е. шин бесконечной мощности. В этом случае исследуемая модель будет в некоторой степени соответствовать так называемым позиционным моделям ЭС.

Следует отметить, что позиционная модель, т.е. модель в которой мощности или моменты генераторов зависят только от относительных углов роторов машин, нашла довольно широко применение при решении задач устойчивости ЭС [29], [95]. За рубежом [4] позиционная модель именуется классической. Однако в 70-х годах прошлого столетия были высказаны сомнения о правомерности использования позиционной модели для расчетов статической устойчивости ЭС [106], причем основными аргументами были следующие. Во-первых, в отличие от критериев классической механики, критерий ПР позиционной модели, известный как критерий Вагнера-Эванса, содержит постоянные инерции машин. Во-вторых, «центр» инерции позиционной модели не находится в состоянии покоя или равномерного движения, как в механической системе, а подвержен незатухающим колебаниям. В-третьих, если линеаризованная позиционная модель испытывает внешние возмущения моментов или мощностей, удовлетворяющих условию «равновесия», т.е. их алгебраическая сумма равна нулю, то «... позиционная система движется с постоянным ускорением за счет одних внутренних упругих деформаций без подвода энергии извне

(самодвижение, свойственное *perpetuum mobile*)» [126]. Отсюда сделан вывод, что позиционная модель противоречит закону сохранения энергии и физике упругих колебаний. Хотя рядом авторов ([31], [122], [126], [179], [171] и др.) были представлены довольно убедительные доводы несостоятельности критики позиционной модели, инициатор критики в последующей работе [107] вновь поставил вопрос с более серьезной аргументацией о принципиальной неудовлетворенности позиционных моделей ЭС.

В работах [106]-[107] для критики позиционной системы используются небольшие, в основном 3-х узловые модели ЭС. Однако для исследования адекватности позиционной модели следует рассматривать общий многомерный случай. Напомним, что построение «классических» позиционных моделей связано с принятием упрощающих предположений, важнейшими из которых являются [151]: 1) нагрузки при составлении схемы замещения ЭС представляются эквивалентными синхронными двигателями или (и) замещаются постоянными полными сопротивлениями; 2) все синхронные машины (СМ) - генераторы и двигатели - вводятся в схему замещения постоянными переходными ЭДС за расчетными индуктивными сопротивлениями, величины которых зависят от типа АРВ; 3) все остальные элементы системы представляются пассивными схемами замещения, параметры которых не зависят от режима ЭС; 4) моменты первичных двигателей (приводимых механизмов) считаются постоянными; 5) демпфирование электромеханических колебаний генераторных (двигательных) агрегатов не учитываются. При сделанных допущениях уравнения движения позиционной модели ЭС представляют собой совокупность движения роторов синхронных машин, входящих в ЭС, причем правые части уравнений зависят лишь от угловых сдвигов роторов (т.е. от положения, «позиции» роторов). Если в полученной таким образом расчетной модели эквивалентировать пассивные элементы, то систему

нелинейных дифференциальных уравнений движения можно представить в виде

$$T_k \frac{d^2 \delta_k}{dt^2} = P_{Tk} - P_k = \Delta P_k, k = 1, \dots, n, \quad (1a)$$

где T_k - постоянная инерции роторов турбины (приводного механизма) и генератора (двигателя) в узле k ; P_{Tk} - мощность вращающегося момента турбины или приводного механизма; P_k - электромагнитная мощность тормозного момента, определяемая нагрузкой генератора, или получаемая из сети двигателем привода; n - количество машин.

Рассмотрим особенности позиционной модели ЭС (1a), полагая для краткости записи, что постоянные инерции T и мощности P для всех машин приведены к одним базовым значениям.

Суммирование (1a) по всем k дает

$$T_\Sigma \frac{d^2 \delta^c}{dt^2} = \Delta P_\Sigma,$$

где $\Delta P_\Sigma = \sum_k (P_{Tk} - P_k)$; $T_\Sigma = \sum_k T_k$; δ^c - координата центра инерции системы

$$\delta^c = \sum_k \delta_k T_k / T_\Sigma. \quad (16)$$

Если записать изменение углов в виде $\delta_k = \Delta \delta_k + \delta^c$, то уравнение движения (1a) можно представить как

$$T_k \frac{d^2 \delta_k}{dt^2} = T_k \frac{d^2 (\Delta \delta_k + \delta^c)}{dt^2} = T_k \frac{d^2 \Delta \delta_k}{dt^2} + T_k \frac{\Delta P_\Sigma}{T_\Sigma} = \Delta P_k,$$

или

$$T_k \frac{d^2 \Delta \delta_k}{dt^2} = \Delta P_k - \frac{T_k}{T_\Sigma} \Delta P_\Sigma. \quad (1b)$$

В установившемся режиме ЭС левые, так же, как и правые части уравнений (1b) должны быть равны нулю, а это обеспечивается только тогда, когда общий небаланс мощности в ЭС ΔP_Σ распределяется между машинами пропорционально их постоянным инерциям [4]

$$\Delta P_k = \frac{T_k}{T_\Sigma} \Delta P_\Sigma, \quad k = 1, n. \quad (1г)$$

Другие особенности позиционной модели проявляются при анализе статической устойчивости исследуемой системы.

Систему дифференциальных уравнений движения позиционной модели (1а) можно представить в матричном виде:

$$[T] \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \Delta P(\delta), \quad (2а)$$

где $[T]$ – диагональная матрица постоянных инерции; δ – вектор углов вращения роторов машин; $\Delta P(\delta)$ – вектор небалансов мощности на их валу. В теории электрических систем анализ устойчивости основывается на теории устойчивости движения, разработанной А.М. Ляпуновым, которая, в свою очередь, базируется на следующих положениях [128]: 1) возмущения налагаются только на начальные условия, иначе говоря, возмущенное движение происходит при тех же силах (источниках энергии), что и невозмущенное движение; 2) устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени; 3) возмущения предполагаются малыми. Поэтому исследуемые уравнения малых колебаний можно представить в виде

$$[T] \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} = [A] \Delta \delta, \quad (2б)$$

где

$$[A] = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \end{array} \right] \quad (2в)$$

является матрицей Якоби модели потокораспределения без БУ. Выражение (2б) представляет собой систему из n линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа решения этой системы введем дополнительные переменные $\Delta \omega_k = d\Delta \delta_k / dt$ и представим систему (2б) в форме задачи Коши:

$$\begin{bmatrix} d\Delta\delta(t)/dt \\ d\Delta\omega(t)/dt \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \end{bmatrix}; \quad \Delta\delta(0) = \Delta\delta^{(0)}; \quad \Delta\omega(0) = \Delta\omega^{(0)}, \quad (2г)$$

где

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & E \\ B & 0 \end{bmatrix}, \quad (2д)$$

где, в свою очередь, $[E]$ и $[0]$ – единичная и нулевые подматрицы соответствующих размерностей, и

$$[B] = [T]^{-1}[A]. \quad (2е)$$

Чтобы проанализировать свободное движение системы, рассмотрим собственные значения и векторы матрицы $[H]$. Собственные значения можно определить из характеристического уравнения, получаемого приравнением определителя матрицы нулю, $\det[H - pE] = 0$, где p – собственное значение. Используя свойства определителей, можно получить

$$\begin{aligned} \det[H - pE] &= \det \begin{bmatrix} -pE & E \\ B & -pE \end{bmatrix} = (-1)^n \det \begin{bmatrix} E & -pE \\ -pE & B \end{bmatrix} = \\ &(-1)^n \det \left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ -pE & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -pE \\ 0 & B - p^2E \end{bmatrix} \right) = (-1)^n \det(B - p^2E) = 0 \end{aligned} \quad (2ж)$$

Отсюда следует, что собственные значения матрицы малых колебаний равны

$$p_{2k-1} = \sqrt{\gamma_k}; \quad p_{2k} = -\sqrt{\gamma_k}, \quad (2з)$$

где $\gamma_k = \alpha_k + j\beta_k$ являются собственными значениями матрицы (2е). В свою очередь, левые $LH^{<p_k>}$ и правые $RH^{<p_k>}$ собственные векторы матрицы (2д) равны:

$$\begin{aligned} LH^{<p_{2k-1}>} &= \left[0.5L^{<\gamma_k>T}, \frac{0.5}{\sqrt{\gamma_k}}L^{<\gamma_k>T} \right]^T; \quad LH^{<p_{2k}>} = \left[0.5L^{<\gamma_k>T}, -\frac{0.5}{\sqrt{\gamma_k}}L^{<\gamma_k>T} \right]^T; \\ RH^{<p_{2k-1}>} &= \left[R^{<\gamma_k>T}, \sqrt{\gamma_k}R^{<\gamma_k>T} \right]^T; \quad RH^{<p_{2k}>} = \left[R^{<\gamma_k>T}, -\sqrt{\gamma_k}R^{<\gamma_k>T} \right]^T, \end{aligned} \quad (2и)$$

где $L^{<\gamma_k>}$ и $R^{<\gamma_k>}$ – левый и правый собственные векторы матрицы $[B]$ (2е), соответствующие собственному значению γ_k .

Согласно (2з) каждому собственному значению матрицы $[B]$ соответствуют два собственных значения матрицы $[H]$. Важной особенностью уравнений малых колебаний позиционной модели является вырожденность матрицы $[B]$, обусловленная вырожденностью матрицы $[A]$. Матрица $[A]$ представляет собой матрицу Якоби модели потокораспределения без БУ, сумма ее элементов каждой строки равна нулю, поэтому ее правым собственным вектором является вектор e , все компоненты которого равны единице [8]. Поэтому вырожденной будет и матрица $[H]$, причем, согласно (2з)-(2и), она имеет два нулевых собственных значения с единичной геометрической кратностью. Другими словами матрица $[H]$ является дефектной, поэтому недиагонализуемой, но может быть представлена в виде разложения [178]:

$$[H] = [S][Jh][S]^{-1}, \quad (3a)$$

где

$$[Jh] = \begin{bmatrix} Jh^{<0>} & 0 \\ 0 & D^{<p>} \end{bmatrix} \quad (3б)$$

- жорданова каноническая форма матрицы $[H]$, где, в свою очередь, $[Jh^{<0>}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - жорданова клетка двух нулевых собственных значений, а $D^{<p>}$ - диагональная матрица остальных собственных значений. Тогда переход к каноническим переменным $y(t) = [S]^{-1} [\Delta\delta(t)^T, \Delta\omega(t)^T]$ позволяет преобразовать систему (2г) к задаче

$$dy(t)/dt = [Jh]y(t), \quad y(0) = y^{(0)}, \quad (3в)$$

где $[\Delta\delta(t)^T, \Delta\omega(t)^T] = [S]y(t)$ и заданным считается вектор $y^{(0)} = [S]^{-1} [\Delta\delta^{(0)T}, \Delta\omega^{(0)T}]$, т.е. к более простой «почти несвязанной» системе линейных дифференциальных уравнений:

$$dy_1(t)/dt = y_2(t), \quad y_1(0) = y_1^{(0)}; \quad (3г)$$

$$dy_2(t)/dt = 0, \quad y_2(0) = y_2^{(0)}; \quad (3д)$$

$$dy_k(t)/dt = p_k y_k(t), \quad y_k(0) = y_k^{(0)}, \quad k > 2. \quad (3e)$$

Здесь индексы 1 и 2 отвечают двум нулевым собственным значениям, а $k > 2$ - остальным собственным значениям матрицы $[H]$.

Решением уравнения (3д) будет $y_2(t) = y_2(0)$, его подстановка в (3г) дает $y_1(t) = y_1(0) + y_2(0)t$. Решением (3е) для остальных канонических переменных является $y_k(t) = y_k(0)e^{p_k t}$, $\forall k > 2$. Переход к исходным переменным дает решение возмущенного движения (2г):

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta(t) \\ \Delta\omega(t) \end{bmatrix} = S_1(\zeta_1^{(0)} + t\zeta_2^{(0)}) + S_2\zeta_2^{(0)} + \sum_{\forall k > 2} S_k e^{p_k t} \zeta_k^{(0)}, \quad (3ж)$$

где S_k - столбец k матрицы $[S]$; $\zeta_k^{(o)} = \begin{bmatrix} \Delta\delta^{(0)T} & \Delta\omega^{(0)T} \end{bmatrix} Z_k$, а Z_k - столбец k матрицы $[Z] = [S]^{-1T}$. Выясним, что представляют собой столбцы матрицы $[S]$ и $[Z]$.

Умножение (3а) справа на матрицу $[S]$ дает

$$[H][S] = [S][Jh],$$

или, используя блочное представление матриц,

$$[H][S_1 \quad S_2 \quad S_{k>2}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_{k>2}] \begin{bmatrix} Jh^{<0>} & 0 \\ 0 & D^{<p>} \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что

$$[H]S_1 = 0; \quad [H]S_2 = S_1; \quad [H]S_k = p_k S_k, \quad k > 2,$$

поэтому, $S_1 = [e^T, 0^T]$; $S_2 = [0^T, e^T]$, а S_k для $k > 2$ соответствуют правым собственным векторам (2и) матрицы (2д), отвечающим собственному значению p_k .

Умножение (3а) слева на матрицу $[S]^{-1}$ и последующее транспонирование дает

$$[H]^T [Z] = [Z][Jh]^T,$$

или, используя блочное представление матриц,

$$[H]^T [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_{k>2}] = [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_{k>2}] \begin{bmatrix} Jh^{<0>T} & 0 \\ 0 & D^{<p>T} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$[H]^T Z_1 = Z_2; [H]^T Z_2 = 0; [H]^T Z_k = p_k Z_k, k > 2,$$

поэтому, учитывая $Z_k^T S_k = 1$, можно получить: $Z_1 = [L^{<0>T}, 0^T] / e^T L^{<0>}$, $Z_2 = [0^T, L^{<0>T}] / e^T L^{<0>}$, а Z_k для $k > 2$ соответствуют левым собственным векторам (2и) матрицы (2д), отвечающим собственному значению p_k .

Как и в общем случае, для устойчивости системы необходима отрицательность вещественных частей собственных значений p . Однако из-за особенности комплексной арифметики в силу соотношения

$$p = \pm\sqrt{\gamma} = \pm\sqrt{\alpha + j\beta} = \pm\sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + (\alpha/\beta)^2}}{2}} \pm j \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha(1 + \sqrt{1 + (\alpha/\beta)^2})}} \quad \text{этого}$$

добиться нельзя, возможно получить только чисто мнимые значения

$p_{2k-1} = j\varpi_k; p_{2k} = -j\varpi_k$ с $\varpi_k = \sqrt{-\alpha_k}$, когда собственные значения $\gamma_k = \alpha_k + j\beta_k$ матрицы $[B]$ являются вещественными и отрицательными: $\alpha_k < 0; \beta_k = 0$.

Тогда колебания системы будут периодическими, незатухающими:

$$\begin{aligned} \Delta\delta(t) &= e(\Delta\delta^{C(0)} + t\Delta\omega^{C(0)}) + \sum_{m=2}^n R^{<\gamma_m>} \zeta_m^{(0)} \cos(\varpi_m t - \varphi_m^{(0)}); \\ \Delta\omega(t) &= e\Delta\omega^{C(0)} + \sum_{m=2}^n R^{<\gamma_m>} \varpi_m \zeta_m^{(0)} \sin(\varpi_m t - \varphi_m^{(0)}), \end{aligned} \quad (4a)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\delta^{C(0)} &= L^{<0>T} \Delta\delta^{(0)} / e^T L^{<0>}; & \Delta\omega^{C(0)} &= L^{<0>T} \Delta\omega^{(0)} / e^T L^{<0>}; \\ \zeta_m^{(0)} &= \sqrt{(L^{<\gamma_m>T} \Delta\delta^{(0)})^2 + (\varpi_k^{-1} L^{<\gamma_m>T} \Delta\omega^{(0)})^2}; & (4б) \\ \varphi_m^{(0)} &= \arctan(\varpi_k^{-1} L^{<\gamma_m>T} \Delta\omega^{(0)} / L^{<\gamma_m>T} \Delta\delta^{(0)}). \end{aligned}$$

Считается, что за счет рассеивания энергии, вызванного неучтенными в (2а) демпфирующими силами, свободные колебания будут затухать. Таким образом, критерием статической устойчивости является вещественность и отрицательность собственных значений матрицы (2е).

В предельном по статической аperiodической устойчивости режиме один из ненулевых собственных значений матрицы $[B]$ станет равен нулю. В этом случае алгебраическая кратность нулевого собственного значения матрицы $[B]$ будет равна двум, а для матрицы $[H]$ – четырем, но геометрическая кратность останется равной единице [9]. Поэтому матрицы будут дефектными и для представления решения потребуются жордановы клетки большей размерности, что существенно усложняет расчетные выражения [53]. Следует также заметить, что в случае дефектной матрицы вообще не существует численно устойчивого способа вычисления жордановых канонических форм. Так, например, для матрицы $[H]$ имеется бесконечное множество разложений матрицы (3а). Нетрудно проверить, что если $S_2 = [0^T, e^T]$ заменить на $S_2 = [\rho e^T, e^T]$, а вектор $Z_1 = [L^{<0>T}, 0^T] / e^T L^{<0>}$ на $Z_1 = [L^{<0>T}, -\rho L^{<0>T}] / e^T L^{<0>}$, где ρ - любое число, то соотношение (3а) также будет выполняться. При этом решение системы (4а)-(4б) останется таким же. Согласно [178], жорданова форма матрицы не является непрерывной функцией ее элементов. Поэтому малые изменения элементов матрицы могут приводить к большим изменениям элементов ее жордановой формы. Обеспечить устойчивость при вычислении такого объекта – дело безнадежное. Именно поэтому жордановы формы редко используют в вычислительной практике, а реализуются другие подходы.

Причиной появления жордановой клетки в (3б) является постоянная вырожденность матрицы $[B]$. В тоже время, наличие тождественного нулевого собственного значения отражается в решении линеаризованных дифференциальных уравнений двумя первыми компонентами в (4а), которые определяют изменение всех углов на одну и ту же величину, не оказывая влияние на относительные углы, от которых только и зависит матрица линеаризованных уравнений. Поэтому для исключения вырожденности матрицы обычно используется подход, развитый П.С. Ждановым, который состоит в том, что уравнения возмущенного движения в абсолютных углах

трансформируются в уравнения возмущенного движения в углах относительно угла одного из узлов (базисного), скажем, с номером b [95]. Для этого уравнение узла b вычитается из всех других уравнений системы. Поскольку слева в дифференциальных уравнениях будут присутствовать углы относительно базисного, а справа - только относительные углы, и выполняется соотношение $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m = (\delta_k - \delta_b) - (\delta_m - \delta_b) = \delta_{kb} - \delta_{mb}$, такой подход позволяет проводить исследование устойчивости движения, избежав вырожденности матрицы. Если воспользоваться блочным разбиением:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb} \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

где индекс b соответствует базисному узлу, а g - всем остальным узлам, систему уравнений малых колебаний в относительных углах можно представить в виде

$$\frac{d^2 \Delta \delta_g^r}{dt^2} = [B^r] \Delta \delta_g^r, \quad (5б)$$

где $\Delta \delta_g^r = \Delta \delta_g - e \Delta \delta_b$, и

$$[B^r] = [B_{gg}] - e [B_{bg}]. \quad (5в)$$

В этом случае решение для (5б) будет иметь вид, аналогичный (4а)-(4б), только без начальных слагаемых, стоящих перед знаком суммы по m , $m=1, \dots, n-1$, а собственные векторы и значения будут отвечать матрице $[B^r]$ (5в). Рассмотрим, чему будут соответствовать эти собственные значения и векторы.

Для собственного значения γ матрицы $[B]$ справедливо

$$\det[B - \gamma E] = \det \begin{bmatrix} B_{gg} - \gamma E & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb} - \gamma E \end{bmatrix} = 0. \quad (5г)$$

Матрица $[B]$ вырождена, и если к последнему ее столбцу прибавить остальные, результатом будет нулевой столбец. Поскольку при прибавлении столбца к другому столбцу определитель матрицы не изменится, то, применив такую процедуру к (5г), можно получить

$$\det \begin{bmatrix} B_{gg} - \gamma E & -\gamma e \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix} = 0, \quad (5д)$$

со всеми компонентами последнего столбца, равными $-\gamma$. Поскольку при вычитании строки из других строк определитель также не изменится, то вычитание последней строки из вышележащих дает

$$\det \begin{bmatrix} B_{gg} - eB_{bg} - \gamma E & 0 \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix} = 0. \quad (5е)$$

Раскрывая определитель (5е) по последнему столбцу, можно получить

$$\det[B - \gamma E] = \det \begin{bmatrix} B_{gg} - eB_{bg} - \gamma E & 0 \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix} = -\gamma \det[B^e - \gamma E] = 0, \quad (5ж)$$

где

$$[B^e] = [B_{gg}] - e[B_{bg}]. \quad (5з)$$

Но матрица $[B^e]$ есть не что иное, как матрица $[B^r]$ (5в) линеаризованных уравнений возмущенного движения роторов синхронных машин в относительных углах. Следовательно, собственные значения этой матрицы будут в точности соответствовать соответствующим собственным значениям исходной матрицы [80].

Рассмотрим, чему будут соответствовать компоненты правых собственных векторов R^r матрицы $[B^r]$. Воспользуемся соотношениями для правого собственного вектора исходной матрицы $[B]$, отвечающего собственному значению γ ,

$$[B_{gg}]R_g + [B_{gb}]R_b = \gamma R_g; \quad (6а)$$

$$[B_{bg}]R_g + B_{bb}R_b = \gamma R_b. \quad (6б)$$

Из вырожденности матрицы $[B]$ следует

$$B_{gb} = -[B_{gg}]e; \quad B_{bb} = -[B_{bg}]e. \quad (6в)$$

Подставляя эти выражения в (6а)-(6б), можно получить:

$$[B_{gg}]R_g - eR_b = \gamma R_g; \quad (6г)$$

$$[B_{bg}]R_g - eR_b = \gamma R_b. \quad (6д)$$

Вычитание (6д) из каждого уравнения (6г) дает

$$([B_{gg}] - e[B_{bg}])(R_g - eR_b) = \gamma(R_g - eR_b). \quad (6е)$$

Сравнение (6е) с

$$[B^r]R^r = ([B_{gg}] - e[B_{bg}])R^r = \gamma R^r \quad (6ж)$$

показывает, что

$$R^r = R_g - eR_b. \quad (6з)$$

Для левого собственного вектора $[L] = [L_g^T, L_b]^T$ справедливо

$$L_g^T [B_{gg}] + L_b [B_{bg}] = \gamma L_g^T; \quad (6и)$$

$$L_g^T [B_{gb}] + L_b B_{bb} = \gamma L_b,$$

или

$$[L_g^T, L_b] \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb} \end{bmatrix} = \gamma [L_g^T, L_b]. \quad (6к)$$

Умножая (6к) справа на вектор e , можно получить

$$0 = \gamma (L_g^T e + L_b), \quad (6л)$$

поскольку этот вектор является правым собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению этой матрицы. Таким образом, при ненулевых значениях γ

$$L_b = -L_g^T e. \quad (6м)$$

Подстановка (6м) в (6и) дает

$$L_g^T ([B_{gg}] - e[B_{bg}]) = L_g^T [B^r] = \gamma L_g^T. \quad (6н)$$

Если $\gamma = 0$, (6к) примет вид:

$$L_g^T [B_{gg}] + L_b [B_{bg}] = 0; \quad (6о)$$

$$L_g^T [B_{gb}] + L_b B_{bb} = 0.$$

Тогда для матрицы $[B^r]$ можно записать

$$L^T [B^r] = L^T ([B_{gg}] - e[B_{bg}]) = 0, \quad (6п)$$

или

$$L^T [B_{gg}] - L^T e [B_{bg}] = L_g^T [B_{gg}] + L_b [B_{bg}] = 0, \quad (6р)$$

где

$$L^b = -L^{rT} e. \quad (6c)$$

Умножая (6p) справа на вектор e и учитывая свойства матрицы $[B^r]$, можно получить

$$L^{rT} [B_{gb}] + L^b [B_{bb}] = 0. \quad (6т)$$

Из сравнения (6p) и (6т) с (6o), а также рассмотрения (6м)-(6н) и (6с) следует, что левый собственный вектор L^r матрицы $[B^r]$ будет равен левому собственному вектору L_g исходной матрицы $[B]$: $L^r = L_g$; $L_b = -L_g^T e$.

Таким образом, полученные соотношения для собственных значений и векторов дают следующие результаты [48]. Во-первых, выражение (5ж) показывает, что собственные значения будут одними и теми же независимо от выбора базисного узла b и соответствуют собственным значениям исходной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Другими словами, если исходная система устойчива (неустойчива), то она будет устойчивой (неустойчивой) при любом базисном узле. Во-вторых, компоненты правых собственных векторов системы в относительных углах будут отличаться от соответствующих векторов исходной системы на одну и ту же величину, равную компоненте правого собственного вектора базисного узла. Компоненты левых собственных векторов всегда будут равны соответствующим компонентам левых собственных векторов полной системы.

Важным является получение критерия предельного по статической аperiodической устойчивости режима позиционной модели. Для такого ПР одно из ненулевых собственных значений матрицы $[B^r]$ уравнений малых колебаний в относительных углах будет равно нулю. Учитывая (2в) и (2е), представим матрицу $[B^r]$ в виде

$$[B^r] = [T_g]^{-1} \left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_g} \right] - [T_b]^{-1} e \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_g} \right]. \quad (7a)$$

Умножая (7а) слева на вектор-строку левого собственного вектора L_g^T , отвечающего нулевому собственному значению матрицы $[B^r]$, и транспонируя полученное выражение, можно получить

$$\left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_g} \right]^T [T_g]^{-1} L_g - \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_g} \right]^T [T_b]^{-1} e^T L_g = 0. \quad (7б)$$

Выполнив замену переменных,

$$\lambda_g^p = [T_g]^{-1} L_g; \quad \lambda_b^p = -[T_b]^{-1} e^T L_g, \quad (7в)$$

можно представить (7б) в виде

$$\left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_g} \right]^T \lambda_g^p + \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_g} \right]^T \lambda_b^p = 0. \quad (7г)$$

Кроме этого, (7в) также дает

$$\sum_{g \neq b} T_g \lambda_g^p + T_b \lambda_b^p = 0. \quad (7д)$$

Используя (7г)-(7д) и учитывая (1г), критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели ЭС можно представить в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \quad \mathcal{G} \right]^T \lambda^p = 0, \quad (7е)$$

где \mathcal{G} - вектор с компонентами

$$\mathcal{G}_k = T_k / \sum_m T_m. \quad (7ж)$$

Сравнение (7е)-(7ж) с матрицей Якоби модели потокораспределения с распределенным БУ (1.2.4г) показывает, что критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима классической позиционной модели в точности соответствует критерию предельного режима модели потокораспределения ЭС с распределенным балансирующим узлом, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке режима назначены прямо пропорционально их постоянным инерции СМ.

Полученные выражения позиционной модели позволяют опровергнуть утверждения [106]-[107] о физической несостоятельности позиционной

модели, ее противоречии закону сохранения энергии и физике упругих колебаний.

По сути дела критерием предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели является условие (7д), где компоненты вектора λ^P определяются решением системы линейных уравнений (7г). Условие (7д) ПР можно рассматривать как обобщение критерия Вагнера-Эванса на многомашинные системы. В этом критерии присутствуют постоянные инерции машин, т.к., согласно (1в)-(1г), для существования установившегося режима позиционной модели необходимо, чтобы общий небаланс мощности распределился между машинами пропорционально их постоянным инерциям. Это значит, что в позиционной модели постоянные инерции играют ту же роль, что и крутизна статических характеристик автоматических регуляторов скорости (частоты) в непозиционной модели, учитывающей изменение частоты в ЭС. Можно показать для непозиционной модели, что при достаточно малом отклонении частоты критерий ее предельного режима будет аналогичен условию (7е), только вместо постоянных инерций будут значения крутизны статических частотных характеристик автоматических регуляторов скорости.

Теперь рассмотрим систему уравнений малых колебаний позиционной модели (2б)-(2в). Для механических систем в аналогичном выражении матрица $[A^{mex}]$ системы линеаризованных дифференциальных уравнений является лапласианом, т.е. симметричной с диагональными элементами

$$A_{kk}^{mex} = - \sum_{\forall m \neq k} A_{k,m}^{mex} = - \sum_{\forall m \neq k} A_{m,k}^{mex}. \text{ В противоположность этому матрица } [A] \text{ в (2б)-}$$

(2в) для неконсервативной системы несимметрична с

$$A_{kk} = - \sum_{\forall m \neq k} A_{k,m} \neq - \sum_{\forall m \neq k} A_{m,k}, \text{ то есть коэффициенты «жесткости» упругих связей}$$

позиционной модели не обладают свойством взаимности. Поэтому использование выражения координаты центра инерции (1б), заимствованного из классической механики, для позиционной модели является некорректным.

Согласно (4а)-(4б) координата центра инерции позиционной системы определяются выражением

$$\Delta\delta^C = L^{<0>T} \Delta\delta / e^T L^{<0>}, \quad (8а)$$

которая, в зависимости от начальных условий, в процессе малых колебаний системы (4а) будет находиться или в состоянии покоя, или равномерного движения, аналогично поведению механической системы. Действительно, вектор $L^{<0>}$ является левым собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению матрицы $[B]$. Из теории матриц известно, что любой левый собственный вектор, отвечающий одному собственному значению, ортогонален любому правому собственному вектору другого, неравного ему собственного значения. Поэтому умножение (4а) слева на вектор строку $L^{<0>T} / e^T L^{<0>}$ дает:

$$\Delta\delta^C(t) = \Delta\delta^{C(0)} + t\Delta\omega^{C(0)}; \quad \Delta\omega^C(t) = \Delta\omega^{C(0)}. \quad (8б)$$

Если учесть, что $L^{<0>} = [T]\lambda^P$, где вектор λ^P является собственным вектором матрицы $[B] = [\partial\Delta P / \partial\delta]$, отвечающим ее нулевому собственному значению и (7г), тогда выражение для координаты центра инерции позиционной модели можно представить в более привычном виде

$$\Delta\delta^C = ([T]\lambda^P)^T \Delta\delta / e^T [T]\lambda^P = \sum_{\forall k} T_k \lambda_k^P \Delta\delta_k / \sum_{\forall k} T_k \lambda_k^P. \quad (8в)$$

Для анализа выполнения закона сохранения энергии в позиционной модели рассмотрим уравнения малых колебаний при приложении малых внешних возмущений ΔP :

$$[T] \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} = [\partial\Delta P / \partial\delta] \Delta\delta + \Delta P. \quad (8г)$$

В [126] для критики позиционной модели используется случай, «... когда внешние возмущения удовлетворяют условиям равновесия ...» $\sum_k \Delta P_k = 0$. Однако, такое условие соответствует «уравновешенным» возмущениям только для консервативной системы. В установившемся режиме должен выполняться баланс мощности с учетом потерь в сети.

Поэтому в неконсервативной позиционной системе «уравновешенные» внешние возмущения должны удовлетворять условию

$$\sum_k (1 - \partial\pi/\partial P_k) \Delta P_k = 0, \quad (8д)$$

где $\partial\pi/\partial P_k$ - относительный прирост потерь узла k . В работе [9] было показано, что компоненты собственного вектора λ^P матрицы $[\partial\Delta P/\partial\delta]$, отвечающего нулевому собственному значению, взаимосвязаны через относительные приросты потерь

$$\lambda_k^P = (1 - \partial\pi/\partial P_k) \lambda_b^P. \quad (8е)$$

Этот вектор является вектором нормали гиперповерхности мощностей уравнений установившихся режимов ЭС [51] и отвечает (8д). Поэтому умножение (8г) слева на вектор строку λ^{P^T} с учетом (8в) дает

$$T^C d^2\Delta\delta^C/dt^2 = 0, \quad (8ж)$$

где $T^C = \sum_{\forall k} T_k \lambda_k^P$. Таким образом, при приложении «уравновешенных» малых внешних возмущений (8д) центр инерции позиционной системы (8в) будет находиться или в состоянии покоя, или равномерного движения, точно так же, как в механической системе. В случае, когда внешние возмущения будут отвечать условию $\sum_k \Delta P_k = 0$, они уже не будут «уравновешенными», в позиционной системе возникнет общий небаланс мощности, и центр инерции будет двигаться с постоянным ускорением. Поэтому закон сохранения энергии в позиционной системе не нарушается, показывая несостоятельность утверждений [106], [107] и [126].

Представленный анализ выполнен для классической позиционной системы, в которой нагрузки ЭС задаются эквивалентными синхронными двигателями или (и) замещаются полными сопротивлениями. Такая модель нашла широкое применение при анализе динамической устойчивости ЭС [4], [29], [95] и т.д. В реальных энергосистемах, кроме синхронных машин, имеются и другие виды нагрузок, включая асинхронные двигатели. Следует отметить, что полной информации о составе работающего

электрооборудования, как правило, нет и всё ограничивается данными о величинах нагрузок, иногда могут быть известны статические характеристики нагрузок. Поэтому обычно при анализе статической устойчивости нагрузка задается постоянными мощностями, иногда статическими характеристиками, и для исследования статической устойчивости используется так называемая система дифференциально-алгебраических уравнений, включающая дифференциальные уравнения движения и алгебраические уравнения баланса мощности нагрузочных узлов. Для позиционной модели ЭС такую систему можно представить в виде:

$$[T_g] \frac{d^2 \delta_g}{dt^2} = \Delta P_g(P_g, \delta_g, \delta_b, \delta_L, V_L); \quad (9a)$$

$$[T_b] \frac{d^2 \delta_b}{dt^2} = \Delta P_b(P_b, \delta_b, \delta_g, \delta_L, V_L); \quad (9б)$$

$$0 = \Delta P_L(P_L, \delta_g, \delta_b, \delta_L, V_L); \quad (9в)$$

$$0 = \Delta Q_L(Q_L, \delta_g, \delta_b, \delta_L, V_L). \quad (9г)$$

Здесь индексом g обозначены СМ, кроме узла с индексом b , относительно которого будут отсчитываться углы других узлов, а индексом L – другие неинерционные узлы. Следует отметить, что в неинерционных узлах углы и модули напряжения не связаны напрямую с вращениями роторов СМ и токами обмоток возбуждения, и могут изменяться мгновенно, удовлетворяя (9в)-(9г). Поэтому П.С. Жданов такие комплексы напряжений назвал фиктивными ЭДС, чтобы их отличить от ЭДС СМ.

Умножение (9а) и (9б) на соответствующие обратные матрицы постоянных инерции, а затем последующее вычитание полученного таким образом уравнения (9б) из каждого полученного соответствующего уравнения системы (9а), дает:

$$\frac{d^2 \delta_{gb}}{dt^2} = [T_g]^{-1} \Delta P_g(P_g, \delta_{gb}, \delta_{Lb}, V_L) - e [T_b]^{-1} \Delta P_b(P_b, \delta_{gb}, \delta_{Lb}, V_L); \quad (9д)$$

$$0 = \Delta P_L(P_L, \delta_{gb}, \delta_{Lb}, V_L); \quad (9е)$$

$$0 = \Delta Q_L(Q_L, \delta_{gb}, \delta_{Lb}, V_L), \quad (9ж)$$

где $\delta_{gb} = \delta_g - e\delta_b$, $\delta_{Lb} = \delta_L - e\delta_b$ – углы узлов относительно базисного узла b .
 Переход к относительным углам корректен, так как уравнения УР в правой части системы (9а)-(9г) включают только разность углов, поэтому $\delta_k - \delta_m = \delta_k - \delta_b + \delta_b - \delta_m = \delta_{kb} - \delta_{mb}$.

Для анализа устойчивости линеаризуем систему (9д)-(9ж) в окрестности исследуемого режима:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \delta_{gb}}{dt^2} = & [T_g]^{-1} \left(\left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_{gb}} \right] \Delta \delta_{gb} + \left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_{Lb}} \right] \Delta \delta_{Lb} + \left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial V_L} \right] \Delta V_L \right) - \\ & e [T_b]^{-1} \left(\left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{gb}} \right] \Delta \delta_{gb} + \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{Lb}} \right] \Delta \delta_{Lb} + \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_L} \right] \Delta V_L \right); \end{aligned} \quad (9з)$$

$$0 = \left[\frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{gb}} \right] \Delta \delta_{gb} + \left[\frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{Lb}} \right] \Delta \delta_{Lb} + \left[\frac{\partial \Delta P_L}{\partial V_L} \right] \Delta V_L; \quad (9и)$$

$$0 = \left[\frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{gb}} \right] \Delta \delta_{gb} + \left[\frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{Lb}} \right] \Delta \delta_{Lb} + \left[\frac{\partial \Delta Q_L}{\partial V_L} \right] \Delta V_{LN}. \quad (9к)$$

Выразим вектор неинерционных переменных из (9и) и (9к) (предполагается, что используемая матрица имеет обратную, случай ее вырожденности будет рассмотрен позднее)

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_{Lb} \\ \Delta V_L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta P_L}{\partial V_L} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial V_L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{gb}} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{gb}} \end{bmatrix} \Delta \delta_{gb}. \quad (9л)$$

Подстановка (9л) в (9з) дает

$$\frac{d^2 \Delta \delta_{gb}}{dt^2} = \begin{pmatrix} [T_g]^{-1} \left(\left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_{gb}} \right] - \left[\frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_{Lb}} \quad \frac{\partial \Delta P_g}{\partial V_L} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta P_L}{\partial V_L} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial V_L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{gb}} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{gb}} \end{bmatrix} \right) - \\ - e [T_b]^{-1} \left(\left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{gb}} \right] - \left[\frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_{Lb}} \quad \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_L} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta P_L}{\partial V_L} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{Lb}} & \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial V_L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_{gb}} \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_{gb}} \end{bmatrix} \right) \end{pmatrix} \Delta \delta_{gb}. \quad (9м)$$

Предельным по статической апериодической устойчивости режимом позиционной модели является режим с вырожденной матрицей линеаризованных уравнений (9м). Но в этом случае вырожденной будет также исходная матрица (9з)-(9к). Это можно показать следующим образом.

Переход от системы (9з)-(9к) к (9м) есть ни что иное как прямой ход Гауссова исключения неизвестных $\Delta\delta_{Lb}$, ΔV_L и соответствует эквивалентированию системы до инерционных переменных. Прямой ход Гаусса отвечает представлению исходной матрицы в виде произведения двух треугольных матриц:

$$[B] = [W][U] = \begin{bmatrix} W_{LL} & 0 \\ W_{gL} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{LL} & U_{Lg} \\ 0 & U_{gg} \end{bmatrix}, \quad (10a)$$

где U_{gg} есть матрица системы (9м). Если матрица U_{gg} вырождена, тогда ей будет соответствовать соотношение

$$U_{gg}R_g = 0, \quad (10б)$$

где R_g – собственный вектор матрицы U_{gg} , отвечающий нулевому собственному значению. Поскольку $R_g \neq 0$, то решая систему

$$U_{LL}R_L = -U_{Lg}R_g,$$

можно найти вектор R_L . Поэтому

$$[U] \begin{bmatrix} R_L \\ R_g \end{bmatrix} = 0, \quad (10в)$$

и, следовательно,

$$[B] \begin{bmatrix} R_L \\ R_g \end{bmatrix} = [W][U] \begin{bmatrix} R_L \\ R_g \end{bmatrix} = 0, \quad (10г)$$

т.е. исходная матрица (9з)-(9к) тоже будет вырожденной, ее правым собственным вектором, отвечающий нулевому собственному значению также будет вектор $\begin{bmatrix} R_L^T & R_g^T \end{bmatrix}^T$.

Аналогичным образом получается для компонент левого собственного вектора. Так как в предельном режиме матрица (9з)-(9к) является вырожденной, то, воспользовавшись (10а), можно записать

$$\begin{bmatrix} L_L^T & L_g^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} L_L^T & L_g^T \end{bmatrix} W U = \begin{bmatrix} L_L^T & L_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{LL} & 0 \\ W_{gL} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{LL} & U_{Lg} \\ 0 & U_{gg} \end{bmatrix} = 0, \quad (10д)$$

или

$$\begin{bmatrix} L_L^T W_{LL} + L_g^T W_{gL}, & L_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{LL} & U_{Lg} \\ 0 & U_{gg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10е)$$

Т.е.

$$\begin{bmatrix} L_L^T W_{LL} + L_g^T W_{gL} \end{bmatrix} U_{LL} = 0, \quad (10ж)$$

и

$$\begin{bmatrix} L_L^T W_{LL} + L_g^T W_{gL} \end{bmatrix} U_{Lg} + L_g^T U_{gg} = 0. \quad (10з)$$

Так как, согласно сделанному предположению, матрица U_{LL} не вырождена, то из (10ж) следует

$$L_L^T W_{LL} + L_g^T W_{gL} = 0, \quad (10и)$$

а из (10з) -

$$L_g^T U_{gg} = 0. \quad (10к)$$

Другими словами, в предельном режиме, компоненты, как правого, так и левого собственного вектора эквивалентной сети остаются теми же самыми, что и для первоначальной сети.

Теперь рассмотрим случай, когда не удастся привести систему к (9м), т.е. когда матрица линеаризованных уравнений неинерционных переменных является вырожденной. Это может произойти, когда ведущий элемент будет нулевым. В [35] показано, что для вычислительно эффективной реализации решения линеаризованных уравнений баланса мощностей, переменные и уравнения, относящиеся к одному узлу, лучше всего обрабатывать совместно, т.е. работать не со скалярами, а с микроматрицами. Для PQ узла диагональная микроматрица будет иметь вид

$$[A]_{kk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} & \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} & \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \end{bmatrix}. \quad (11a)$$

Процесс Гауссова исключения неизвестных соответствует эквивалентированию сети [23], при этом получающаяся матрица эквивалентной сети сохраняет свойства матрицы Якоби исходной сети – вырожденность полной матрицы. Если для численной реализации используются микроматрицы, то вырожденность (11a) не позволит произвести процесс исключения. За рубежом такая ситуация называется «индуцированная вырожденностью бифуркация» (singularity induced bifurcation (SIB)) и считается статически неустойчивой. Но когда такое возможно? Исключение переменных на прямом ходе Гаусса соответствует эквивалентированию сети, в том числе, когда используются микроматрицы. Так как в процессе эквивалентирования изменяются элементы оставшейся сети, для анализа лучше всего воспользоваться выражениями элементов микроматриц через диагональные элементы матрицы узловых проводимостей и эквивалентированных мощностей узлов [35]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} &= B_{kk} V_k^2 + Q_k; & \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} &= -G_{kk} V_k - \frac{P_k}{V_k}; \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} &= G_{kk} V_k^2 - P_k; & \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} &= B_{kk} V_k - \frac{Q_k}{V_k}. \end{aligned} \quad (11б)$$

Тогда выражение для определителя микроматрицы (11a) можно представить в виде

$$\det([A]_{k,k}) = \frac{1}{V_k} ((B_{k,k}^2 + G_{k,k}^2) V_k^4 - (P_k^2 + Q_k^2)). \quad (11в)$$

Полученное выражение уже анализировалось в предыдущем параграфе для 2-узловой схемы. Т.е. вырожденность микроматрицы (11a) может быть только в случае получения предельной мощности соответствующим узлом.

Ранее также отмечалось, что для позиционной модели в статически аperiodически устойчивом режиме ЭС все собственные значения матрицы (9м) должны быть вещественны и отрицательны. В то же время собственные значения исходной матрицы (9з)-(9к) могут быть комплексными как с

отрицательными, так и положительными вещественными частями. Как пример, рассмотрим выражение характеристического уравнения микроматрицы (11а) с (11б), когда изменение модулей напряжения на итерации представляются в о.е.,

$$\det([A]_{k,k} - \gamma) = (B_{kk}V_k^2 + Q_k - \gamma)(B_{kk}V_k^2 - Q_k - \gamma) + (G_{kk}V_k^2 + P_k)(G_{kk}V_k^2 - P_k) = 0, \quad (11\Gamma)$$

т.е.

$$\gamma^2 - 2B_{kk}V_k^2\gamma + (B_{k,k}^2 + G_{k,k}^2)V_k^4 - (P_k^2 + Q_k^2) = 0, \quad (11\Delta)$$

и

$$\gamma_{1,2} = B_{kk}V_k^2 \pm \sqrt{P_k^2 + Q_k^2 - G_{k,k}^2V_k^4}. \quad (11\epsilon)$$

Анализ (11е) показывает, что собственные значения микроматрицы (11а) будут комплексными, если $P_k^2 + Q_k^2 < G_{k,k}^2V_k^4$. Причем, для большинства микроматриц в сети вещественные части будут отрицательны, т.к. большинство ветвей имеют индуктивные сопротивления. Исключение составляют средние обмотки трехобмоточных трансформаторов и автотрансформаторов. Схемы замещения эти ветвей имеют, как правило, малые емкостные сопротивления. Поэтому вещественные части собственных значений микроматриц, включающих такую среднюю обмотку, будут иметь положительные значения. Но это не значит, что режим будет статически неустойчив. Для статически устойчивого режима необходимы отрицательные вещественные собственные значения матрицы (9м), а не исходной матрицы (9з)-(9к). К тому же, появление емкостных сопротивлений в средней обмотке является только математическим следствием используемой звездообразной модели трехобмоточных трансформаторов. Эквивалентирование общей точки исключает емкостное сопротивление и делает вещественные части собственных значений микроматрицы отрицательными.

Подкоренное выражение (11е) увеличивается с ростом $P_k^2 + Q_k^2$. Когда $P_k^2 + Q_k^2$ станет равно или больше $G_{k,k}^2V_k^4$, собственные значения микроматрицы станут вещественными соответствующих знаков. Когда

$P_k^2 + Q_k^2$ станет равным $(B_{k,k}^2 + G_{k,k}^2)V_k^4$, одно из собственных значение примет нулевое значение, и микроматрица станет вырожденной.

Модель с шинами бесконечной мощности является частным случаем позиционной модели. Поэтому в статически апериодически устойчивом режиме все ведущие элементы треугольного разложения матрицы Якоби для инерционных переменных должны быть отрицательными, как для позиционной модели, так и для модели с шинами неограниченной мощности. Так как определитель матрицы равен произведению ведущих элементов треугольного разложения, знак Якобиана может быть как положительным, так и отрицательным в статически апериодически устойчивом режиме, в зависимости от четного или нечетного количества уравнений. Однако, если при формировании матрицы узловых проводимостей и УУР положительной считать нагрузку, тогда ведущие элементы треугольного разложения будут положительными для статически апериодического устойчивого режима. Между тем следует вспомнить, что, если имеются трехобмоточные трансформаторы или автотрансформаторы с малыми емкостными сопротивлениями, то возможно появление отрицательных ведущих элементов. В то же время, согласно (11в), определитель диагональной микроматрицы будет положительным. Поэтому статическую апериодическую устойчивость УР лучше всего оценивать с помощью знаков определителей ведущих микроматриц. Если определители всех ведущих микроматриц положительны, тогда установившийся режим статически апериодически устойчив, в противном случае требуется более тщательная проверка. Расчетная практика автора показала, что для всех тестовых схем реальных ЭС определители всех ведущих микроматриц положительные. Отрицательные определители ведущих элементов возникают только из-за индуцированной пределом бифуркации, а иногда в ПР из-за ошибок округления. Если при обычном расчете УР на итерации появляются отрицательные определители ведущих микроматриц, то расчет режима расходится, и не сходится даже при переходе к методу Ньютона по

параметру. Более того, если при расчете потокораспределения реальных ЭС в точке начального приближения определители ведущих микроматриц треугольного разложения не все положительные, то метод Ньютона расходится, а метод Ньютона по параметру не сходится, несмотря на то, что решение существует для заданных исходных данных. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Теперь рассмотрим вопрос записи критерия предельного по аperiodической устойчивости позиционной модели (9а)-(9г) режима. Воспользуемся следующими рассуждениями. В предельном по статической аperiodической устойчивости режиме ЭС матрица линеаризованных дифференциальных уравнений (9м) вырождена. Вырожденность матрицы эквивалентной системы (9м) соответствует вырожденности матрицы исходной линеаризованной системы (9з)-(9к). Левый собственный вектор вырожденной матрицы (9м) будет соответствовать компонентам левого собственного вектора матрицы линеаризованных дифференциально-алгебраических уравнений (9з)-(9к). Учитывая сказанное и применяя подход, аналогично реализованного при выводе (7е)-(7ж), можно получить критерий предельного по аperiodической устойчивости режима такой позиционной модели ЭС:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_g} & \frac{\partial \Delta P_g}{\partial \delta_L} & \frac{\partial \Delta P_g}{\partial V_L} & \mathcal{G}_g \\ \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_g} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta_L} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V_L} & \mathcal{G}_b \\ \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_g} & \frac{\partial \Delta P_L}{\partial \delta_L} & \frac{\partial \Delta P_L}{\partial V_L} & 0 \\ \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_g} & \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_L} & \frac{\partial \Delta Q_L}{\partial \delta_L} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_g^P \\ \lambda_b^P \\ \lambda_L^P \\ \lambda_L^Q \end{bmatrix} = 0, \quad (12a)$$

где

$$\mathcal{G}_m = T_m / \sum_k T_k, \quad m \in g, b. \quad (12б)$$

Таким образом, в предельном по статической аperiodической устойчивости режиме, компоненты собственного вектора, отвечающие

нулевому собственному значению (9з)-(9к) и (9м), является компонентами собственного вектора полной матрицы Якоби УУР (9а) - (9г), отвечающие его нулевому собственному значению. Сравнение (12) с (1.2.4г) показывает, что критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели (9а)-(9г), так же, как в случае классической позиционной модели (2б), соответствует критерию предельного по существованию решения УУР с РБУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке режима прямо пропорциональны их постоянным инерции (12б).

Возникает важный вопрос: какую модель следует использовать для оценки коэффициентов запаса статической устойчивости ЭС? Для модели с шинами неограниченной мощности область статически апериодически устойчивых режимов ЭС зависит от месторасположения БУ [50]. Для позиционной модели область статически апериодически устойчивых режимов зависит от постоянных инерции СМ, которые фактически действуют как коэффициенты участия СМ в балансировке активной мощности и, в скрытой форме, вводят РБУ в позиционную модель. Ответ на этот вопрос дает анализ критериев предельных по статической апериодической устойчивости режимов модели с шинами неограниченной мощности (1.4.6) и позиционной модели (12), (1.4.8)-(1.4.9)

Сравнение (1.4.6) и (12), (1.4.8)-(1.4.9) с (1.4.2) показывает, что левым собственным вектором, соответствующим нулевым собственным значениям этих матриц Якоби в ПР, является вектор нормали ГМ, причем для модели с шинами неограниченной мощности

$$\lambda_b^p = 0 \quad (13a)$$

для БУ b , а для позиционной модели

$$\sum_{m \neq b} \vartheta_m \lambda_m^p + \vartheta_b \lambda_b^p = 0, \quad (13б)$$

где ϑ_m определяются (12б). В свою очередь, согласно (1.4.4), компоненты вектора нормали ГМ λ связаны между собой соотношением

$$\lambda_m^P = (1 - \partial\pi^k / \partial P_m) \lambda_k^P, \quad (13в)$$

где $\partial\pi^k / \partial P_m$ - относительный прирост потерь при БУ k

Коэффициенты участия СМ \mathcal{G}_m в РБУ позиционной модели (12б) всегда положительны. Поэтому согласно (13б) в ПР позиционной модели по крайней мере одна из компонент вектора нормали, скажем j , должна быть отрицательной. Но тогда согласно (13в) это означает, что относительный прирост потерь для СМ j в ПР больше единицы. Поэтому этот ПР и его ближайшая окрестность будут статически аperiodически неустойчивыми, если в качестве БУ будет назначена СМ j . Если в этом ПР уменьшить генерацию СМ j , то можно дополнительно увеличить мощность нагрузки. Другими словами ПР позиционной модели находится дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей [54]. В теории и практике коэффициент запаса статической устойчивости ЭС обычно определяется в терминах мощностей [157]-[162]. В этом случае позиционная модель будет давать заниженную оценку коэффициента запаса статической устойчивости. Поэтому наиболее подходящей для определения расчетного предельного режима является модель ЭС с шинами неограниченной мощности, в предельном режиме которой относительные приросты потерь всех узлов не превышают единицу [55]. Этот предельный режим будет статически устойчивым как для позиционной модели, так и модели с шинами неограниченной мощности с любым другим месторасположением БУ. Для реализации такой расчетной модели следует блоки утяжеления дополнить проверкой относительных приростов потерь мощности $\partial\pi/\partial P_j < 1$ или $\lambda_j^P > 0$ для всех узлов. Если на очередном шаге утяжеления окажется, что $\partial\pi/\partial P_j > 1$ или $\lambda_j^P < 0$ для какого-то узла, этот узел следует переназначить балансирующим и продолжить утяжеление. Найденный таким образом предельный режим будет статически устойчивым и определит наибольшую величину нагрузки ЭС для заданной траектории утяжеления [78]. При этом информация о параметрах СМ не требуется.

В качестве примера на рис. 1.25 представлена ОСР классической 3-х узловой ЭС с *PV*-узлами, в которой зеленым цветом выделен регион с $\partial\pi/\partial P_j < 1$, а красным, когда $\partial\pi/\partial P_j > 1$ хотя бы для одного из узлов. На рис. 1.26 для ОСР 4-х узловой ЭС, представленной ранее в параграфе 1.3. на рис. 1.14, желтым цветом отмечена область с $\partial\pi/\partial P_j < 1$.

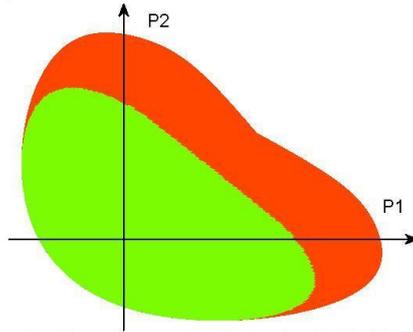


Рисунок 1.25 - ОСР 3-х узловой ЭС и ее сегменты с $\partial\pi/\partial P_j < 1$ (зеленый) и $\partial\pi/\partial P_j > 1$ (красный)

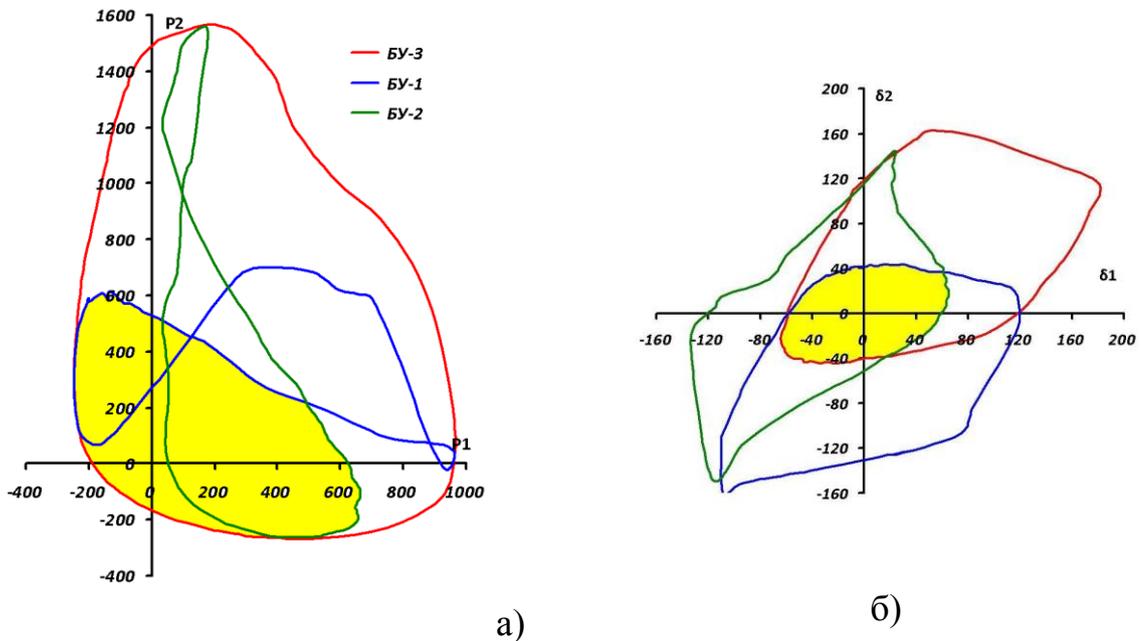


Рисунок 1.26 - ОСР 4-х узловой кольцевой ЭС и ее сегмент с $\partial\pi/\partial P_j < 1$

Как видно из представленных рисунков, область УР с относительными приростами потерь активной мощности меньше единицы во всех узлах

является выпуклой в отличие от ОСР. Эта область не зависит от месторасположения БУ в расчетной модели потокораспределения, а ее граница соответствует УР с наибольшей величиной нагрузки ЭС.

Выводы по главе 1

1. Анализ математической модели потокораспределения показал, что месторасположение БУ оказывает существенное влияние как на расчетную область существования решения уравнений установившихся режимов ЭС, так и на пределы по существованию и статической аperiodической устойчивости.

2. Вся совокупность УР ЭС для заданных параметров системы геометрически представляет собой гиперповерхность в пространстве активных мощностей всех узлов и реактивных мощностей PQ - узлов, названной автором гиперповерхностью мощностей ЭС. Рассмотрение всех совокупностей УР ЭС как ГМ дает возможность воспользоваться инструментарием теории бифуркации, особенностей и катастроф, интерпретируя ГМ как поверхность равновесий («катастроф») в терминах этих теорий, что позволяет лучше понять специфику и структуру ОСР, а также влияние БУ.

3. Область существования УР ЭС в пространстве мощностей, широко распространенная в теории и анализе УР, является ничем иным, как проекцией ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство задаваемых мощностей, а граница этой проекции – гиперповерхностью ПР в пространстве мощностей. Так как в общем случае ГМ не является плоской, ее проекция, т.е. ОСР, и ее границы, т.е. ГПР, будут зависеть от выбора оси, вдоль которой осуществляется ее проецирование, т.е. от выбора БУ. Для консервативной модели ЭС, ГМ является «плоской», поэтому ее ОСР и ГПР не зависят от выбора БУ.

4. ГМ позволяет наглядно объяснить механизм появления «дырок» в ОСП, т.е. неоднозначности множества режимов ЭС в пространстве мощностей, а также исчезновение этих дырок при переназначении БУ.

5. Рассмотрение всей совокупности УР ЭС как ГМ позволяет воспользоваться инструментариями дифференциальной геометрии для исследования особенностей УР. Анализ компонент вектора нормали ГМ показал, что в ПР относительный прирост потерь активной мощности БУ равен единице, поэтому любые попытки БУ поддержать УР полностью блокируются возникающими при этом потерями активной мощности. Неспособность БУ поддержать УР даже в некоторых узлах определяет ПР ЭС. В ПР БУ как бы теряет электрическую связь с частью или со всех ЭС, что фактически соответствует отсутствию БУ в вычислительной модели потокораспределения. В реальных ЭС изменение месторасположения БУ делает этот УР непределным. Только в любой консервативной ЭС ПР останется предельным безотносительно выбора БУ. Также в ПР, при наличии в схеме замещения PQ-узлов, результирующий относительный прирост потерь реактивной мощности всех узлов, участвующих в балансировке реактивной мощности ЭС, тоже равен единице. Поэтому в ПР эти узлы не могут поддержать режим реактивной мощности в ряде или всех других узлах ЭС. Любые манипуляции узлов, участвующих в балансировке реактивной мощности в ЭС, будут нивелироваться потерями реактивной мощности, вызванные этими манипуляциями.

6. Исследование позиционной модели ЭС показало, что она неявно использует и реализует идеологию РБУ, и ее предельные по статической аperiodической устойчивости режимы в точности соответствуют ПР модели потокораспределения с РБУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности ЭС назначены прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин.

7. Получен критерий предельных по статической апериодической устойчивости режимов позиционной модели, обобщающий критерий Вагнера-Эванса на сложные многомашинные системы. Установлено, что в предельном режиме позиционной модели вектор постоянных инерции ортогонален вектору нормали гиперповерхности мощностей. Поскольку постоянные инерции всегда положительны, а компоненты вектора нормали гиперповерхности мощностей взаимосвязаны через относительные приросты потерь мощности, предельный режим позиционной модели в заданном направлении утяжеления будет находиться дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей нагрузки, чем предельный режим модели с шинами неограниченной мощности.

8. В теории и практике режимов ЭС коэффициент запаса статической устойчивости обычно определяется в терминах мощностей. В этом случае позиционная модель будет давать заниженную оценку коэффициента запаса статической устойчивости ЭС. Теоретические исследования автора показали, что предпочтительной для определения расчетных ПР является модель ЭС с шинами неограниченной мощности, в ПР которой относительные приросты потерь всех узлов не превышают единицу. Этот ПР будет статически апериодически устойчивым как для позиционной модели, так и модели с шинами неограниченной мощности с любым другим месторасположением БУ. Для реализации такой расчетной модели блоки утяжеления следует дополнить проверкой относительных приростов потерь мощности. Если на очередном шаге утяжеления окажется, что для какого-то узла относительный прирост потерь активной мощности превысил единицу, то этот узел следует переназначить балансирующим и продолжить утяжеление. Найденный таким образом ПР будет статически устойчивым, и даст наибольшую величину нагрузки ЭС для заданной траектории утяжеления.

Глава 2 МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1 Введение

Расчеты установившихся режимов непосредственно или опосредовано используются практически во всех областях современной теории режимов электроэнергетических систем, будь то статическая или динамическая устойчивость, переходные процессы, оценка состояния, оптимизация режимов или рынок электроэнергии, т.е. везде, где требуется учет и анализ режимных параметров ЭС. Необходимость использования и развития методов расчета потокораспределения возникла сразу же с появлением первых электрических сетей и их распространением [140]. К настоящему времени по методам расчетам УР ЭС опубликованы сотни научных статей. Достаточно подробный обзор и анализ существующих методов расчета потокораспределения представлен в [15], [30], [35], [76], [77], [96], [99], [119], [341]. Однако, несмотря на то, что предложены десятки, если не сотни модификаций методов расчета УР, накоплен значительный научный и практический опыт, современная наука пока не дала исчерпывающей теории численных методов решения систем нелинейных уравнений, используемых при расчете УР. Так, не в полном объеме решены вопросы существования и единственности решения уравнений УР, не получены необходимые и достаточные условия сходимости методов расчета УР, полезные для практического использования, отсутствует идеальный метод расчета УР, удовлетворяющий всем возможным требованиям практики. Поэтому, не удивительно, что интерес к этой области не угасает и даже возрастает при появлении новых вычислительных технологий или расширении области применения расчетов УР в ЭС [16], [66], [69], [71], [81], [165], [166], [268], [350].

Расчеты УР ЭС требуются практически во всех областях анализа и управления режимами ЭС. Например, чтобы выполнить оптимизацию

режима, найти ПР или выбрать уставки противоаварийной автоматики и т.д., необходимо знать параметры исходного УР, т.е. рассчитать этот режим. Аналогичным образом, для численной реализации моделей ПР необходим вычислительно эффективный и робастный метод расчета потокораспределения, который обеспечивает получение исходного статически устойчивого УР, если такой существует при заданных исходных данных, а в случае его отсутствия - дает рекомендации для его достижения.

Хотя в настоящее время в научной литературе продолжают появляться публикации с предлагаемыми «новыми» методами расчета УР или их модификациями, они почему-то, как правило, не привлекают внимание разработчиков программ расчета УР. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что зарубежные авторы используют в основном IEEE тестовые схемы, режимы которых являются довольно «легкими», поэтому не позволяют выявить преимущества и недостатки предлагаемых методов. В тоже время самостоятельная программная реализация сторонних методов достаточно затратная, поэтому бывает трудно оценить эффективность предлагаемых подходов и методов. Довольно часто в отечественной литературе используемые тестовые схемы известны только авторам, и хотя утверждается, что подход показал большое преимущество, однако почему-то отсутствуют последующие публикации по развитию и применению предлагаемых методов. Как правильно замечено в [363], в научной литературе авторы, как правило, не публикуют отрицательные результаты исследований и вычислительных экспериментов. Поэтому декларирование превосходства предлагаемых методов с «численным подтверждением» может не всегда соответствовать действительности. Следует отметить, что в обзорах технической литературы по методам расчета УР представлено, как правило, теоретическое сравнение существующих подходов, но отсутствует численное на тестовых схемах больших реальных ЭС. Поэтому проблема вычислительно эффективного метода расчета потокораспределения остается открытой.

Анализ существующей литературы показывает, что основой всех существующих вычислительно эффективных методов расчета УР, в том числе реализованных в промышленных (коммерческих) программах, является метод Ньютона. К настоящему времени предложено довольно много методов расчета потокораспределения ЭС, однако практическое применение нашли немногие из них.

Далее структура главы организована следующим образом. В параграфе 2.2 исследовано влияние формы уравнений УР и системы координат переменных на вычислительные характеристики метода Ньютона. Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости и позволяет рассчитывать режимы, близкие к пределу по существованию решения УУР. Однако он имеет существенный недостаток – требуется «хорошее» начальное приближение переменных. Одним из плодотворных подходов оказалось использование свойств УР ЭС – в системообразующих сетях ЭС потокораспределение активных мощностей определяется в основном фазовыми углами и мало зависит от модулей напряжения. Для потокораспределения реактивных мощностей наблюдается обратная картина [339]-[342]. В параграфе 2.3 представлено исследование разделенных методов Ньютона и области их применения. Метод Ньютона относится к методам первого порядка, т.к. использует только первые производные. Поэтому для повышения эффективности метода Ньютона в вычислительной итерационной процедуре было предложено учитывать также члены производных второго и даже более высоких порядков. Параграф 2.4 посвящен исследованию так называемых методов второго и высокого порядка, а также реализации их особенности в методах Ньютона. Другим плодотворным подходом увеличения надежности метода Ньютона оказалось использование свойства продолжаемости и реализации непрерывной деформации (гомотопии) в итерационной вычислительной процедуре расчета УР ЭС. В параграфе 2.5 исследованы методы Ньютона по параметру и их модификации, использующие инструментарии теории нелинейного

программирования, их преимущества и недостатки. В реальных ЭС всегда имеются *PV*-узлы, учет ограничений которых очень сильно влияет как на параметры рассчитываемого УР, так и на вычислительные характеристики метода расчета УР. Довольно часто возникает ситуация, когда та или иная стратегия учета ограничений реактивной мощности не позволяет получить или дает внеэксплуатационное (фальшивое) решение, хотя искомое решение существует и может быть получено при использовании другой процедуры [218], [280]. В параграфе 2.6 представлена стратегия учета ограничений реактивной мощности *PV*-узлов, которая позволяет повысить надежность расчета УР и исключить получение «фальшивых» решений. Наконец, в параграфе 2.7 представлены выводы и заключение, выявлен наиболее вычислительно эффективный метод расчета УР ЭС.

2.2 Вычислительные модели потокораспределения метода Ньютона

Основой современных вычислительных моделей расчета потокораспределения являются уравнения узловых напряжений [35]:

$$\Delta I_k = S_k^* / U_k^* - \sum_{m=1}^{n+1} Y_{km} U_m = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1a)$$

где $S_k = P_k + jQ_k$ и U_k - соответственно комплексы мощности и линейного напряжения в узле k , Y_{km} - элемент k - m матрицы узловых проводимостей, $n+1$ - количество узлов в системе и номер балансирующего (базисного) узла.

В расчетах УР узлы моделируются *PQ*-типом (задаются активная и реактивная мощность) или *PV*-типом (задаются активная мощность, фиксируемый модуль напряжения, а также диапазон возможного изменения реактивной мощности). Для *PV* узлов система уравнений (1a) дополняется уравнениями баланса квадрата модулей напряжения:

$$\Delta E_k(V_k, U_k) = V_k^2 - U_k^* U_k = 0, \quad k \in PV, \quad (16)$$

а реактивная мощность определяется в результате расчета УР.

Реактивные мощности генераторов являются «избыточными» переменными, поскольку могут быть вычислены через известные комплексы

напряжения. Поэтому систему уравнений (1) обычно представляют в форме баланса мощностей, что позволяет исключить эти переменные и уменьшить размерность задачи.

Уравнения установившихся режимов в форме баланса мощностей в прямоугольных координатах $U_k = U'_k + jU''_k$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta P_k(P_k, U', U'') &= P_k - G_{kk}(U_k'^2 + U_k''^2) - \sum_{m \in k} G_{km}(U'_k U'_m + U''_k U''_m) + \\ &+ \sum_{m \in k} B_{km}(U'_k U''_m - U''_k U'_m) = 0; \quad k \in PQ + PV; \\ \Delta Q_k(Q_k, U', U'') &= Q_k + B_{kk}(U_k'^2 + U_k''^2) + \sum_{m \in k} B_{km}(U'_k U'_m + U''_k U''_m) + \\ &+ \sum_{m \in k} G_{km}(U'_k U''_m - U''_k U'_m) = 0; \quad k \in PQ; \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\Delta E_k(V_k, U', U'') = V_k^2 - (U_k'^2 + U_k''^2) = 0; \quad k \in PV, \quad (2b)$$

где ΔP_k и ΔQ_k – небалансы активной и реактивной мощностей в узле k , ΔE_k – небаланс квадрата модуля напряжения.

Использование полярных координат $U_k = V_k e^{j\delta_k} = V_k(\cos \delta_k + j \sin \delta_k)$ позволяет дополнительно уменьшить размерность задачи:

$$\Delta P_k(P_k, V, \delta) = P_k - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = 0, \quad k \in PV + PQ; \quad (3a)$$

$$\Delta Q_k(Q_k, V, \delta) = Q_k + V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}) = 0, \quad k \in PQ, \quad (3b)$$

где $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$.

Разделив каждое уравнение системы (3) на V_k , можно получить УУР в форме баланса токов мощности (м-токов) в полярной системе координат:

$$\Delta I_{Pk}(P_k, V, \delta) = \frac{P_k}{V_k} - V_k G_{kk} - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = 0, \quad k \in PV + PQ; \quad (4)$$

$$\Delta I_{Qk}(Q_k, V, \delta) = \frac{Q_k}{V_k} + V_k B_{kk} + \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}) = 0, \quad k \in PQ.$$

Системы уравнений (1)-(4) являются нелинейными, их решение возможно только итерационными методами. Применение метода Ньютона позволяет получить квадратичную скорость сходимости.

Известно, что производной комплекса сопряженной величины U^* по прямому комплексу U , или наоборот, не существует, поэтому для линеаризации системы комплексных нелинейных уравнений (1) обычно переходят к вещественной форме записи, например, используя прямоугольную систему координат,

$$\begin{aligned} \Delta I'_k(P_k, Q_k, U', U'') &= \frac{P_k U'_k + Q_k U''_k}{U_k'^2 + U_k''^2} - \sum_{\forall m} (G_{km} U'_m - B_{km} U''_m) = 0; k \in PQ + PV; \\ \Delta I''_k(P_k, Q_k, U', U'') &= \frac{P_k U''_k - Q_k U'_k}{U_k'^2 + U_k''^2} - \sum_{\forall m \in k} (G_{km} U''_m + B_{km} U'_m) = 0; k \in PV + PQ; \\ \Delta E_k(V_k, U'_k, U''_k) &= V_k^2 - (U_k'^2 + U_k''^2) = 0; k \in PV. \end{aligned} \quad (5a)$$

Для системы (5a) линеаризованные уравнения будут иметь вид (предполагается, что сначала пронумерованы PQ узлы, а затем PV узлы):

$\frac{\partial \Delta I'}{\partial U''}$		$\frac{\partial \Delta I'}{\partial U'}$		0	n_{PQ}	ΔU_{PQ}^{i+1}	= -	$\Delta I'^i$	$n_{PQ} + n_{PV}$
				$\frac{\partial \Delta I'_{PV}}{\partial Q_{PV}}$	n_{PV}	ΔU_{PV}^{i+1}		$\Delta I''^i$	$n_{PQ} + n_{PV}$
$\frac{\partial \Delta I''}{\partial U''}$		$\frac{\partial \Delta I''}{\partial U'}$		0	n_{PQ}	ΔU_{PQ}^{i+1}	= -	$\Delta I'^i$	$n_{PQ} + n_{PV}$
				$\frac{\partial \Delta I''_{PV}}{\partial Q_{PV}}$	n_{PV}	ΔU_{PV}^{i+1}		$\Delta I''^i$	$n_{PQ} + n_{PV}$
0	$\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial U''_{PV}}$	0	$\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial U'_{PV}}$	0	n_{PV}	ΔQ_{PV}^{i+1}	ΔE_{PV}^i	n_{PV}	
n_{PQ}	n_{PV}	n_{PQ}	n_{PV}	n_{PV}					

где $\Delta I'^i$, $\Delta I''^i$, ΔE^i – векторы-функции небалансов токов и квадратов модулей напряжения в точке i -го приближения, элементы которых вычисляются в соответствии с (5a); ΔU^{i+1} , ΔU^{i+1} , ΔQ_{PV}^{i+1} – векторы приращений неизвестных

на итерации; $\left[\frac{\partial \Delta I'}{\partial U'} \right]$, $\left[\frac{\partial \Delta I'}{\partial U''} \right]$, \dots , $\left[\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial U''_{PV}} \right]$ – подматрицы матрицы Якоби

системы (5б), соответствующие частным производным векторов уравнений небалансов по искомым переменным, элементы которых вычисляются в

точке i -го приближения по выражениям (в дальнейшем, там, где это не вызовет затруднение для понимания, итерационный индекс будет опускаться):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta I'}{\partial U'} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial U'_m} = \begin{cases} -G_{km}, k \neq m; \\ -G_{kk} - \operatorname{Re} \left(S_k^* / U_k^2 \right), k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta I'}{\partial U''} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial U''_m} = \begin{cases} B_{km}, k \neq m; \\ B_{kk} - \operatorname{Im} \left(S_k^* / U_k^2 \right), k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta I'_{PV}}{\partial Q_{PV}} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial Q_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ \frac{U_k''}{U_k'^2 + U_k''^2}, k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta I''}{\partial U'} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial U'_m} = \begin{cases} -B_{km}, k \neq m; \\ -B_{kk} - \operatorname{Im} \left(S_k^* / U_k^2 \right), k = m; \end{cases} \quad (5B) \\ \left(\frac{\partial \Delta I''}{\partial U''} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial U''_m} = \begin{cases} -G_{km}, k \neq m; \\ -G_{kk} + \operatorname{Re} \left(S_k^* / U_k^2 \right), k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta I''_{PV}}{\partial Q_{PV}} \right)_{km} &= \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial Q_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ -\frac{U_k'}{U_k'^2 + U_k''^2}, k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial U'} \right)_{km} &= \frac{\partial E_k}{\partial U'_m} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ -2U'_k, k = m; \end{cases} \\ \left(\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial U''} \right)_{km} &= \frac{\partial E_k}{\partial U''_m} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ -2U''_k, k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Анализ выражений (5) показывает, что большая часть матрицы состоит из постоянных элементов, а изменяющиеся подматрицы являются диагональными. Пренебрежение изменяющимися частями диагональных элементов дает вычислительную модель метода Z -матрицы с постоянной матрицей коэффициентов (при отсутствии PV узлов).

Если для комплексов напряжений воспользоваться полярной системой координат, УУР в форме баланса токов (1) можно также представить в виде

$$\Delta I'_k = \frac{P_k \cos \delta_k + Q_k \sin \delta_k}{V_k} - \sum_{\forall m} V_m (G_{km} \cos \delta_m - B_{km} \sin \delta_m) = 0; \quad (5\Gamma)$$

$$\Delta I''_k = \frac{P_k \sin \delta_k - Q_k \cos \delta_k}{V_k} - \sum_{\forall m} V_m (G_{km} \sin \delta_m + B_{km} \cos \delta_m) = 0.$$

Для системы (5Г) линеаризованные уравнения будут иметь вид:

$\frac{\partial \Delta I'}{\partial \delta}$	$\frac{\partial \Delta I'}{\partial \mathcal{V}}$	0	n_{PQ}	$\Delta \delta_{PQ}$	$\Delta I'$	$n_{PQ} + n_{PV}$
		$\frac{\partial \Delta I'_{PV}}{\partial Q_{PV}}$	n_{PV}	$\Delta \delta_{PV}$		
$\frac{\partial \Delta I''}{\partial \delta}$	$\frac{\partial \Delta I''}{\partial \mathcal{V}}$	0	n_{PQ}	ΔV_{PQ}	$\Delta I''$	$n_{PQ} + n_{PV}$
		$\frac{\partial \Delta I''_{PV}}{\partial Q_{PV}}$	n_{PV}	ΔQ_{PV}		
n_{PQ}	n_{PV}	n_{PQ}	n_{PV}	n_{PV}	$= -$	(5Δ)

где элементы подматриц вычисляются по выражениям:

$$\left(\frac{\partial \Delta I'}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial \delta_m} = \begin{cases} V_m (G_{km} \sin \delta_m + B_{km} \cos \delta_m), k \neq m; \\ -\frac{P_k \sin \delta_k + Q_k \cos \delta_k}{V_k} + V_k (G_{kk} \sin \delta_k + B_{kk} \cos \delta_k), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I'}{\partial \mathcal{V}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial V_m} = \begin{cases} -(G_{km} \cos \delta_m - B_{km} \sin \delta_m), k \neq m; \\ -\frac{P_k \cos \delta_k + Q_k \sin \delta_k}{V_k^2} - (G_{kk} \cos \delta_k - B_{kk} \sin \delta_k), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I''}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial \delta_m} = \begin{cases} -V_m (G_{km} \cos \delta_m - B_{km} \sin \delta_m), k \neq m; \\ \frac{P_k \cos \delta_k + Q_k \sin \delta_k}{V_k} - V_k (G_{kk} \cos \delta_k - B_{kk} \sin \delta_k), k = m; \end{cases} \quad (5e)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I''}{\partial \mathcal{V}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial V_m} = \begin{cases} -(G_{km} \sin \delta_m + B_{km} \cos \delta_m), k \neq m; \\ -\frac{P_k \sin \delta_k - Q_k \cos \delta_k}{V_k^2} - (G_{kk} \sin \delta_k + B_{kk} \cos \delta_k), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I'_{PV}}{\partial Q_{PV}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I'_k}{\partial Q_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ \frac{\sin \delta_k}{V_k^2}, k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I''_{PV}}{\partial Q_{PV}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I''_k}{\partial Q_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, & k \neq m; \\ -\frac{\cos \delta_k}{V_k^2}, & k = m. \end{cases}$$

Размерность и число переменных системы (5г)-(5е) меньше на число PV -узлов по сравнению с (5а)-(5в).

Линеаризация УУР в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат (2) дает другую вычислительную модель метода Ньютона:

$\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{U}''}$		$\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{U}'}$		n_{PV+PQ}	$\Delta U''$	n_{PV+PQ}	ΔP	n_{PV+PQ}	(6а)
$\frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \mathcal{U}''}$		$\frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \mathcal{U}'}$		n_{PQ}	= -	ΔQ_{PQ}	n_{PQ}		
0	$\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial \mathcal{U}''_{PV}}$	0	$\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial \mathcal{U}'_{PV}}$	n_{PV}	$\Delta U'$	n_{PV+PQ}	ΔE_{PV}	n_{PV}	
n_{PQ}	n_{PV}	n_{PQ}	n_{PV}						

где ΔP , ΔQ_{PQ} , ΔE_{PV} - соответственно вектор-функции небалансов мощностей и квадратов модулей напряжения с компонентами (2), а элементы матрицы Якоби находятся из выражений:

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{U}''} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \mathcal{U}''_m} = \begin{cases} B_{km} U'_k - G_{km} U''_k, & k \neq m; \\ -2G_{kk} U''_k - \sum_{m \in k} (G_{km} U''_m + B_{km} U'_m), & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{U}'} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \mathcal{U}'_m} = \begin{cases} -G_{km} U'_k - B_{km} U''_k, & k \neq m; \\ -2G_{kk} U'_k - \sum_{m \in k} (G_{km} U'_m - B_{km} U''_m), & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \mathcal{U}''} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \mathcal{U}''_m} \Big|_{k \in PQ} = \begin{cases} B_{km} U''_k + G_{km} U'_k, & k \neq m; \\ 2B_{kk} U''_k + \sum_{m \in k} (B_{km} U''_m - G_{km} U'_m), & k = m; \end{cases} \quad (6б)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \mathcal{U}'} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \mathcal{U}'_m} \Big|_{k \in PQ} = \begin{cases} B_{km} U'_k - G_{km} U''_k, & k \neq m; \\ 2B_{kk} U'_k + \sum_{m \in k} (B_{km} U'_m + G_{km} U''_m), & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial \mathcal{U}''_{PV}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta E_k}{\partial \mathcal{U}''_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ -2U''_k, k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta E_{PV}}{\partial \mathcal{U}'_{PV}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta E_k}{\partial \mathcal{U}'_m} \Big|_{k,m \in PV} = \begin{cases} 0, k \neq m; \\ -2U'_k, k = m. \end{cases}$$

Для УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат (3) линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{array}{c} n_{PQ+PV} \quad n_{PQ} \\ n_{PV+PQ} \left| \begin{array}{c|c} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \\ \hline \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q_{PQ}}{\partial \mathcal{V}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \Delta \delta \\ \Delta V \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} \Delta P \\ \Delta Q_{PQ} \end{array} \right|, \end{array} \quad (7a)$$

где ΔP , ΔQ_{PQ} - вектор-функции небалансов мощностей с компонентами (3), а элементы подматриц находятся из выражений:

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} = \begin{cases} V_k V_m (-G_{km} \sin \delta_{km} + B_{km} \cos \delta_{km}), k \neq m; \\ V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \mathcal{V}_m} \Big|_{m \in PQ} = \begin{cases} -V_k (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), k \neq m; \\ -2V_k G_{kk} - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \Big|_{k \in PQ} = \begin{cases} V_k V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), k \neq m; \\ -V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), k = m; \end{cases} \quad (7b)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \mathcal{V}_m} \Big|_{k,m \in PQ} = \begin{cases} V_k (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}), k \neq m; \\ 2V_k B_{kk} + \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}), k = m. \end{cases}$$

Для уравнений в форме баланса м-токов в полярной системе координат (4) линеаризованные уравнения будут иметь вид

$$\begin{array}{c} n_{PQ+PV} \quad n_{PQ} \\ n_{PV+PQ} \left| \begin{array}{c|c} \frac{\partial \Delta I_P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta I_P}{\partial \mathcal{V}} \\ \hline \frac{\partial \Delta I_{Q_{PQ}}}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta I_{Q_{PQ}}}{\partial \mathcal{V}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \Delta \delta \\ \Delta V \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} \Delta P/V \\ \Delta Q/V \end{array} \right|, \end{array} \quad (8a)$$

где элементы подматриц матрицы Якоби находятся из выражений:

$$\left(\frac{\partial \Delta I_P}{\partial \delta} \right)_{km} = \frac{\partial \Delta I_{Pk}}{\partial \delta_m} = \begin{cases} V_m (-G_{km} \sin \delta_{km} + B_{km} \cos \delta_{km}), k \neq m; \\ \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}), k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I_P}{\partial \mathcal{N}}\right)_{km} = \frac{\partial \Delta I_{Pk}}{\partial \mathcal{N}_m} \Big|_{m \in PQ} = \begin{cases} -(G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), & k \neq m; \\ -\frac{P_k}{V_k^2} - G_{kk}, & k = m; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I_Q}{\partial \delta}\right)_{km} = \frac{\partial \Delta I_{Qk}}{\partial \delta_m} \Big|_{k \in PQ} = \begin{cases} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), & k \neq m; \\ -\sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}), & k = m; \end{cases} \quad (8б)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta I_Q}{\partial \mathcal{N}}\right)_{km} = \frac{\partial \Delta I_{Qk}}{\partial \mathcal{N}_m} \Big|_{k, m \in PQ} = \begin{cases} (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}), & k \neq m; \\ -\frac{Q_k}{V_k^2} + B_{kk}, & k = m. \end{cases}$$

Для оценки абсолютной и сравнительной эффективности реализуемых на ЭВМ вычислительных моделей используют различные показатели, основными из которых являются быстродействие, объем требуемой памяти и надежность получения решения [149]. Размерность линеаризованных уравнений (5)-(6) можно сократить до размерности систем (7)-(8). Переменная ΔQ_{PV_k} в (5) содержится только в двух линеаризованных уравнениях баланса токов k -го генераторного узла, поэтому может быть выражена из одного и подставлена в другое [35]. Линеаризованные уравнения баланса модулей напряжения генераторных узлов в (5)-(6) включают только две переменные:

$$-2U'_k \Delta U'_k - 2U''_k \Delta U''_k = -\Delta E_k, \quad (9)$$

одна из которых может быть выражена через другую и подставлена в остальные уравнения. Учет этого позволяет обеспечить одинаковую размерность и структуру подматриц линеаризованных уравнений (5)-(8). В программах расчета УР в полярных координатах вычисление элементов матрицы Якоби и небалансов производится, как правило, через операции с комплексными числами, как, например, представлено в Приложении Б. Вычисление тригонометрических функций требуется только для расчета комплексов напряжений. Поэтому всем рассмотренным вычислительным моделям необходимы практически одинаковые объемы памяти и вычислений на итерации.

Для того чтобы выявить определяющие особенности вычислительных

моделей, приведем их к одной форме записи. В качестве основы для сравнения используем линеаризованные УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат (7). Учитывая (3), можно показать, что диагональные элементы подматриц (7) определяются выражениями:

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta}\right)_{kk}^i = \frac{\partial \Delta P_k^i}{\partial \delta_k} = B_{kk} V_k^{i2} + Q_k^i; \quad (10a)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}}\right)_{kk}^i = \frac{\partial \Delta P_k^i}{\partial \mathcal{V}_k} \Big|_{k \in PQ} = -G_{kk} V_k^i - \frac{P_k^i}{V_k^i}; \quad (10б)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta}\right)_{kk}^i = \frac{\partial \Delta Q_k^i}{\partial \delta_k} \Big|_{k \in PQ} = G_{kk} V_k^{i2} - P_k^i; \quad (10в)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}}\right)_{kk}^i = \frac{\partial \Delta Q_k^i}{\partial \mathcal{V}_k} \Big|_{k \in PQ} = B_{kk} V_k^i - \frac{Q_k^i}{V_k^i}, \quad (10г)$$

где P_k^i и Q_k^i - расчетные мощности узла k , вычисленные на i -ой итерации суммированием потоков мощности, протекающих по линиям, отходящим от узла k ,

$$P_k^i = \operatorname{Re} \left[U_k^i \left(\sum_{\forall m} Y_{km} U_k^i \right)^* \right] = V_k^i \sum_{\forall m} V_m^i (G_{km} \cos \delta_{km}^i + B_{km} \sin \delta_{km}^i); \quad (10д)$$

$$Q_k^i = \operatorname{Im} \left[U_k^i \left(\sum_{\forall m} Y_{km} U_k^i \right)^* \right] = -V_k^i \sum_{\forall m} V_m^i (B_{km} \cos \delta_{km}^i - G_{km} \sin \delta_{km}^i). \quad (10е)$$

Очевидно, в точке решения они должны быть равны активной и реактивной мощностям в узле k .

Рассмотрим систему линеаризованных уравнений (8) в форме баланса потоков в полярной системе координат. Если каждое k -е уравнение системы (8) умножить на V_k , то коэффициенты линеаризованной системы будут в точности соответствовать (7), за исключением соответствующих диагональных элементов подматриц $\left[\frac{\partial \Delta P}{\partial \mathcal{V}} \right]$, $\left[\frac{\partial \Delta Q}{\partial \mathcal{V}} \right]$, для которых в (10б) и (10г) вместо расчетных мощностей будут использоваться заданные мощности PQ узлов.

Как уже отмечалось, производная комплексной величины от сопряженной не существует, поэтому при выполнении линеаризации исходные комплексные уравнения были приведены к вещественному виду. Однако можно поступить по-другому - считать комплексную и сопряженную к ней величины независимыми переменными и использовать обычные преобразования. УУР в форме баланса мощностей в прямоугольных координатах (2) в комплексном виде будут иметь вид

$$\Delta S^* = S^* - \left[\text{diag} \left(U^* \right) \right] [Y] U, \quad (11a)$$

где $\left[\text{diag} \left(U^* \right) \right]$ – диагональная матрица с диагональными элементами U_k^* , а в

линеаризованном –

$$-\left[\text{diag} \left(\Delta U^* \right) \right] [Y] U - \left[\text{diag} \left(U^* \right) \right] [Y] \Delta U = -\Delta S^*. \quad (11б)$$

В полярных координатах комплекс напряжения равен $U_k = V_k e^{j\delta_k}$. Тогда, выполнив линеаризацию этого выражения, можно получить

$$\Delta U_k = e^{j\delta_k} \Delta V_k + jV_k e^{j\delta_k} \Delta \delta_k = V_k e^{j\delta_k} \left(\frac{\Delta V_k}{V_k} + j\Delta \delta_k \right) = U_k \left(\frac{\Delta V_k}{V_k} + j\Delta \delta_k \right). \quad (11в)$$

Предположим, что изменение комплекса напряжений определяется по (11в), и подставим его в (11б). Можно показать, что полученная система представляет собой линеаризованные УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат. Другими словами, если в прямоугольных координатах после нахождения изменения комплекса напряжения приращение модулей напряжения и фазовых углов искать в соответствии с (11в):

$$\frac{\Delta V_k}{V_k} + j\Delta \delta_k = \frac{\Delta U_k}{U_k} = \frac{\Delta U_k' U_k' + \Delta U_k'' U_k''}{V_k^2} + j \frac{\Delta U_k'' U_k' - \Delta U_k' U_k''}{V_k^2} \quad (11г)$$

и новые значения напряжения получать в полярных координатах, то результат будет в точности совпадать с решением (7). Для генераторных узлов модуль напряжения в полярных координатах не меняется, поэтому в

прямоугольных координатах должно быть выполнено соотношение

$$\Delta V_k = \frac{\Delta U'_k U'_k + \Delta U''_k U''_k}{V_k} = 0. \quad (11e)$$

Для УУР в форме баланса токов (1) линеаризованные уравнения будут иметь вид

$$-\left[\text{diag} \left(\frac{S^*}{U^{*2}} \right) \right] \Delta U^* - [Y] \Delta U = -\Delta I, \quad (11ж)$$

где $\left[\text{diag} \left(\frac{S^*}{U^{*2}} \right) \right]$ – диагональная матрица с диагональными элементами

$\frac{S_k^*}{U_k^{*2}}$. Умножив (11ж) слева на диагональную матрицу $\left[\text{diag} \left(U^* \right) \right]$, можно

получить

$$-\left[\text{diag} \left(\frac{S^*}{U^*} \right) \right] \Delta U^* - \left[\text{diag} \left(U^* \right) \right] [Y] \Delta U = -\left[\text{diag} \left(U^* \right) \right] \Delta I = -\Delta S^*. \quad (11з)$$

Если для (11з) использовать (11в), можно показать, что матрица линейных уравнений будет соответствовать линеаризованным уравнениям в форме баланса мощностей в полярной системе координат (7), за исключением диагональных элементов подматриц. Для них в (10) вместо расчетных мощностей узлов будут использоваться узловые мощности. Для генераторов реактивная мощность не известна, поэтому можно применить расчетные мощности или оценку из линеаризованных уравнений.

Метод Z-матрицы реализует (11з) без первого слагаемого. Поэтому получаемые подматрицы будут соответствовать подматрицам линеаризованных уравнений потокораспределения в форме баланса мощностей в полярной системе координат за исключением диагональных подматриц (10), в которых расчетные мощности будут равны нулю.

Таким образом, различие вычислительных моделей метода Ньютона определяется тем, как при формировании диагональных элементов (10) вычисляются расчетные узловые мощности [12]: 1) на основе значений комплексов напряжений на итерации (УУР в форме баланса мощностей); 2)

по заданным узловым мощностям (УУР в форме баланса токов); 3) с использованием смешанной стратегии (форма баланса м-токов в полярных координатах); 4) или без их учёта (метод Z-матрицы) – как представлено в таблице 2.1. Возможно одновременное использование разных систем координат: одной – для формирования матрицы Якоби, другой – для определения вектора неизвестных [236]. Результаты расчетов будут зависеть только от выбора второй системы координат. При наличии генераторных узлов смешанная система координат возможна только при первичной прямоугольной системе координат, поскольку трудно обеспечить выполнение условия (11e) для вторичной прямоугольной системы.

Таблица 2.1 – Элементы диагональных подматриц матрицы Якоби линеаризованных уравнений вычислительных моделей потокораспределения, редуцированных к форме баланса мощностей в полярной системе координат

Модель	$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta}\right)_{kk}^i$	$\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial V}\right)_{kk}^i$	$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta}\right)_{kk}^i$	$\left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial V}\right)_{kk}^i$
$IU - (5a)-(5b)$	$B_{kk}V_k^{i^2} + Q_k$	$-G_{kk}V_k^i - P_k/V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2} - P_k$	$B_{kk}V_k^i - Q_k/V_k^i$
$I\delta - (5\gamma)-(5e)$	$B_{kk}V_k^{i^2} + Q_k$	$-G_{kk}V_k^i - P_k/V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2} - P_k$	$B_{kk}V_k^i - Q_k/V_k^i$
$PU - (6a)-(6\bar{b})$	$B_{kk}V_k^{i^2} + Q_k^i$	$-G_{kk}V_k^i - P_k^i/V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2} - P_k^i$	$B_{kk}V_k^i - Q_k^i/V_k^i$
$P\delta - (7a)-(7\bar{b})$	$B_{kk}V_k^{i^2} + Q_k^i$	$-G_{kk}V_k^i - P_k^i/V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2} - P_k^i$	$B_{kk}V_k^i - Q_k^i/V_k^i$
$I_M\delta - (8a)-(8\bar{b})$	$B_{kk}V_k^{i^2} + Q_k^i$	$-G_{kk}V_k^i - P_k/V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2} - P_k^i$	$B_{kk}V_k^i - Q_k/V_k^i$
Z-матрицы	$B_{kk}V_k^{i^2}$	$-G_{kk}V_k^i$	$G_{kk}V_k^{i^2}$	$B_{kk}V_k^i$

Примечание. Расчетные мощности P_k^i и Q_k^i вычисляются согласно (10д) и (10е)

Для оценки вычислительных характеристик представленных моделей и полученных соотношений были выполнены расчеты УР ряда реальных ЭС. Вначале, для чистоты эксперимента, были использованы две тестовые схемы, в которых генераторы моделировались PQ типом (заданными активными и реактивными мощностями) – ОЭС Монголии (202 узла, 276 ветвей, из них

142 трансформатора (тр-ра)) и ЭС Магаданэнерго (115 узлов, 127 ветвей, из них 52 тр-ра).

Тестировались следующие вычислительные модели метода Ньютона:

IU - форма баланса токов в прямоугольной системе координат (5а)-(5в).

$I\delta$ - форма баланса токов в полярной системе координат (5г)-(5е).

Z - метод Z -матрицы.

$Z\delta$ - метод Z -матрицы с вторичной полярной системой координат (11г).

PU - форма баланса мощности в прямоугольной системе координат (6).

$PU\delta$ - модель PU со второй полярной системой координат.

$P\delta$ - форма баланса мощности в полярной системе координат (7).

$I_M\delta$ - форма баланса м-токов в полярной системе координат (8).

В таблице 2.2 приведено количество итераций, требующихся вычислительным моделям для расчета режима с точностью 0,1 МВт (МВар) при задании в качестве начального приближения так называемого «гладкого» или «плоского» старта, т.е. нулевых фазовых углов всех комплексов напряжений и номинальных значений модулей напряжений.

Таблица 2.2 -Число итераций метода Ньютона

№ п/п	Вычислительная модель	ОЭС Монголии	ЭС Магаданэнерго
1	IU	3	6
2	$I\delta$	3	P
3	Z	7	35
4	$Z\delta$	7	P
5	PU	P	7
6	$PU\delta$	P	P
7	$P\delta$	P	P
8	$I_M\delta$	3	5

Примечание. Буква «**P**» обозначает расходящийся итерационный процесс

Из таблицы 2.2 видно, что вычислительные модели IU и $I_M\delta$ имеют лучшие итерационные характеристики, обеспечивают более надежную и

быструю сходимость по сравнению с обычными вычислительными моделями в форме баланса мощностей.

Представленные тестируемые схемы не имеют PV узлов, что характерно для распределительных и питающих сетей. Для оценки эффективности представленных моделей при наличии PV узлов были использованы тестовые схемы объединенных энергосистем России: Северо-Запада, Сибири, Урала, Волги, Востока, Юга, Единой энергосистемы России, а также 195-узловая схема, поставляемая с программным комплексом *RastrWin* [147]. В таблице 2.3 представлены общие характеристики тестовых схем.

Таблица 2.3 - Общие характеристики тестовых схем

№ п/п	Тестовая схема	Количество узлов			Количество ветвей			
		Всего	PQ	PV	Всего	ЛЭП	Тр-ры	Вык-ли
1	195	195	158	36	264	239	25	-
2	Северо-Запад	1834	1679	152	2480	1700	773	7
3	Сибирь	594	478	114	1052	788	246	18
4	Урал	878	737	140	1403	1126	271	6
5	Волга	347	285	61	669	489	180	-
6	Восток	338	296	39	487	388	74	25
7	Юг	904	775	125	1409	1164	216	29
8	ЕЭС	6223	5556	664	9490	7307	2101	82

В начале для чистоты вычислительного эксперимента был использован гладкий старт и для PV узлов не учитывались ограничения на выработку реактивной мощности. Результаты представлены в таблице 2.4.

Во время проведения расчетов было выявлено весьма интересное поведение IU -модели, обусловленное ее свойствами и особенностью реализации решения (2б) методом Ньютона. Согласно теореме невязок [271], значение небаланса уравнения (2б) после решения (9) будет равно значению не учитываемых в линеаризованных уравнениях (9) компонентов разложения в ряд Тейлора уравнения (2б).

Таблица 2.4 – Число итераций с гладкого старта, ограничения по Q не учитываются

№	Модель	195	Сев.Зап.	Сибирь	Урал	Волга	Восток	Юг	ЕЭС
1	IU	7	5	П*	П*	7	5	19	Р
2	$I\delta$	7	5	П*	П*	7	4	20	Р
3	IPU	24**	6	Р	Р	6	4	Р	Р
4	$IPU\delta$	7	6	Р	Р	7	4	Р	Р
5	Z	Р	Р	Р	Р	6	26	Р	Р
6	$Z\delta$	Р	Р	Р	Р	9	27	Р	Р
7	PU	5	Р	6	5	6	Р	Р	Р
8	$PU\delta$	4	Р	4	4	6	Р	Р	Р
9	$P\delta$	4	Р	4	4	6	Р	Р	Р
10	$I_M\delta$	3	3	3	4	3	3	4	4

Примечание. Буква «П» обозначает превышение допустимого числа итераций (> 40)

Поэтому

$$U_k' i^2 + U_k'' i^2 = V_k^2 + \Delta U_k' i^2 + \Delta U_k'' i^2 > V_k^2. \quad (12)$$

Другими словами, при использовании прямоугольных координат модуль напряжения генераторов на итерации всегда будет превышать заданный. Для режимов с большими абсолютными фазовыми углами напряжения гладкий старт и (12) гарантируют большие приращения модулей напряжения. Для моделей в форме баланса мощности это не так критично, как видно из таблицы 2.4. Однако для токовых моделей в прямоугольных координатах значение реактивной мощности генераторов заранее неизвестно, приходится использовать оценочные значения. Увеличение модулей напряжения приводит как бы к искусственной выработке реактивной мощности, что снова вызывает увеличение модулей напряжения, поскольку (9) не гарантирует фиксацию напряжений на итерации. Происходит лавинообразный процесс с неограниченным возрастанием уровней напряжения. Чтобы этого избежать, в IU -модели используемое значение

реактивной мощности генераторов было ограничено трехкратным значением возможной выработки. Линейная оценка реактивной мощности генераторов давала плохой результат, поэтому значение реактивной мощности на итерации определялось по узловому балансу. Аналогичные модификации были внесены в $I\delta$ -модель. В связи с обнаруженным явлением в таблице 2.4 представлены две дополнительные вычислительные модели. Модель IPU является гибридной. В ней PQ узлы моделируются как в IU -модели, а PV – как в PU -модели. Модель $IPU\delta$ является IPU -моделью со смешанной системой координат. Интересно, что в IPU -модели возможно значительное увеличение модулей напряжения (в десятки и сотни раз) на итерациях из-за действия (12). В таблице 2.4 двумя звездочками отмечен такой случай, хотя режим в конце итерационного процесса получается нормальным и совпадает с режимом, рассчитанным другими методами.

В рассматриваемых моделях выключатели моделировались ветвями с малыми индуктивными сопротивлениями ($10^{-4} \Omega$). Для большинства моделей, кроме IU и $I\delta$, это не вызывало проблем. В таблице 2.4 звездочкой отмечены случаи, когда при достижении предельного числа итераций во всех узлах (кроме двух) невязки находились в допустимых пределах погрешности. Указанные два узла были генераторами, соединенными выключателем. Эти модели не могли распределить невязки генераторов между собой из-за приближенной оценки реактивной мощности и малого значения сопротивления ветви выключателя.

Наихудшие характеристики показал метод Z -матрицы, хотя, казалось бы, изменяющиеся диагональные элементы подматриц (5), не учитываемые в ходе итерационного процесса, малы по сравнению с остальными. Представленные результаты не подтверждают возможность пренебрегать ими, а следовательно, использование элементов только с собственными проводимостями в диагональных элементах подматриц (10) без расчетных мощностей существенно снижает вычислительные характеристики.

Общепризнано, что метод Ньютона весьма чувствителен к начальному приближению и плоский старт не всегда дает хорошее приближение [185]. Поэтому в программных комплексах расчета режима в качестве оценки начального приближения обычно используют несколько итераций метода Зейделя. Метод Зейделя плохо работает с режимами, близкими к предельным, а также со схемами, в которых присутствуют ветви с емкостным сопротивлением (средние обмотки трансформаторов, устройства продольной компенсации и т.д.). В таких случаях метод Зейделя либо отключают, либо существенно ограничивают число итераций. В таблице 2.5 представлены результаты вычислительных экспериментов после реализации двух итераций метода Зейделя.

Таблица 2.5 - Число итераций после 2-х итераций метода Зейделя, ограничения по Q не учитываются

№	Модель	195	Сев.Зап.	Сибирь	Урал	Волга	Восток	Юг	ЕЭС
1	IU	8	Р	П*	П*	6	6	18	Р
2	$I\delta$	Р	Р	П*	П*	6	5	13	Р
3	IPU	18**	Р	5	8	4	5	18	Р
4	$IPU\delta$	Р	Р	5	4	4	5	5	Р
5	Z	Р	Р	Р	Р	7	26	Р	Р
6	$Z\delta$	Р	Р	Р	Р	7	27	Р	Р
7	PU	4	4	Р	5	3	3	5	5
8	$PU\delta$	3	4	Р	4	3	3	4	4
9	$P\delta$	3	4	Р	4	3	3	4	4
10	$I_M\delta$	3	3	Р	4	3	3	3	4

Из таблицы 2.5 видно, что метод Зейделя как улучшил, так и ухудшил показатели моделей в форме баланса токов в прямоугольных и смешанных координатах и улучшил надежность и сходимости вычислительных моделей, реализующих форму баланса мощностей и м-токов. Однако для последних моделей ухудшил показатели для ОЭС Сибири. Объяснение причины такого

негативного воздействия метода Зейделя будет представлено позже в параграфе 2.6. По количеству итераций лучшие характеристики имеют модели в полярной системе координат.

Таблица 2.6 – Число итераций при учете ограничений по Q

№	Модель	195	Сев.Зап.	Сибирь	Урал	Волга	Восток	Юг	ЕЭС
Гладкий старт									
1	IU	14	8	П*	П*	12	9	25	П
2	$I\delta$	15	9	П*	П*	15	19	25	Р
3	IPU	33**	9	Р	Р	11	9	Р	Р
4	$IPU\delta$	15	9	Р	Р	15	10	Р	Р
5	Z	Р	Р	Р	Р	15	20	Р	Р
6	$Z\delta$	Р	Р	Р	Р	17	28	Р	Р
7	PU	16	Р	20	23	16	Р	Р	Р
8	$PU\delta$	14	Р	15	18	16	Р	Р	Р
9	$P\delta$	14	Р	14	18	16	Р	Р	Р
10	$I_M\delta$	12	7	12	15	10	7	16	16
После 2-х итераций метода Зейделя									
1	IU	15	Р	П*	П*	10	11	25	Р
2	$I\delta$	Р	Р	П*	П*	12	10	25	Р
3	IPU	Р	Р	18	29	10	10	30	Р
4	$IPU\delta$	Р	Р	16	17	11	9	18	Р
5	Z	Р	Р	Р	Р	15	20	Р	Р
6	$Z\delta$	Р	Р	Р	Р	15	28	Р	Р
7	PU	16	9	Р	22	13	9	21	22
8	$PU\delta$	14	8	Р	18	12	8	17	22
9	$P\delta$	14	8	Р	18	12	8	17	22
10	$I_M\delta$	12	7	Р	15	9	7	16	16

Большое влияние на надежность и сходимость метода расчета потокораспределения оказывает используемая стратегия учета ограничений

выработки реактивной мощности PV узлов. Неправильная технология обработки или отсутствие таковой не всегда позволяет рассчитать существующий режим. Известно, что наличие узлов с фиксируемыми модулями напряжения благоприятно сказывается на сходимости методов (правда не всех, как следует из выше представленных результатов). Ограничение выработки реактивной мощности снижает уровни напряжения и, как следствие, «ухудшает» режим. В итерационном процессе выработка реактивной мощности генераторов постоянно меняется и, если учет ограничений вести на каждой итерации, для несбалансированного режима это может привести к его несуществованию. Надежной стратегией является учет ограничений после балансировки режима, причем, если при проверке выяснится, что одновременно нарушены максимальные и минимальные ограничения, удовлетворяются только первые [35]. Такая технология может не обеспечивать минимального количества итераций, но повышает надежность расчета. В таблице 2.6 представлены результаты вычислительных экспериментов при учете ограничений на выработку и потребление реактивной мощности генераторов как при использовании гладкого старта, так и после двух итераций метода Зейделя.

Таким образом, представленные результаты вычислительных экспериментов показывают, что

1. Вычислительные характеристики моделей метода Ньютона определяются главным образом особенностями представления расчетных мощностей в диагональных элементах подматриц (10) согласно таблице 2.1.
2. Вычислительные модели в форме баланса токов в прямоугольной системе координат эффективны при отсутствии PV узлов, обеспечивая надежность решения и наименьшее количество итераций. Наличие PV узлов делает их менее работоспособными по сравнению с моделями в форме баланса мощностей. Использование гибридной модели, когда PV

узлы моделируются в форме баланса мощностей, не улучшает их характеристик.

3. Метод Z -матрицы работоспособен только в сетях с малыми нагрузками при отсутствии PV узлов, в низковольтных распределительных сетях.

4. Специфика вычислительного процесса учета генераторных узлов в прямоугольной системе координат обуславливает повышенный уровень напряжения на итерациях, что в ряде случаев благоприятно сказывается на надежности методов.

5. Оценка начального приближения с помощью итераций метода Зейделя повышает надежность и сходимость PU , $P\delta$, $I_M\delta$ - моделей, но не во всех случаях. Для других моделей в зависимости от схемы это может, как улучшить, так и ухудшить вычислительные характеристики.

6. Время выполнения расчета режима ЕЭС России при использовании $I_M\delta$ -модели (16 итераций) составило 0,426 секунды на Intel i5, CPU 2,9 ГГц с 2 Гб ОП. Быстродействие и объем требуемой памяти перестают быть критичными факторами, поскольку нивелируются современными возможностями компьютерной техники. Определяющим показателем выступает надежность метода. Наиболее надежной и к тому же быстродействующей оказалась м-токовая $I_M\delta$ -модель в полярной системе координат. Только она смогла рассчитать все тестируемые схемы с гладкого старта, потребовав наименьшее количество итераций.

2.3 Разделенные методы Ньютона

Метод Ньютона, обладая квадратичной скоростью сходимости, обеспечивает получение решения обычно за 3-6 итераций. Однако его недостатком является требование хорошего начального приближения. Гладкий старт не всегда дает возможность получить решение. Поэтому для оценки начального приближения довольно часто используют так называемые «стартовые алгоритмы», например, [166], [269], [339]. В качестве такового в

промышленных программах расчета потокораспределения нередко используются несколько (1-7) итераций метода Зейделя. Однако метод Зейделя не для всех схем может дать хорошее начальное приближение. Наличие в схеме замещения ветвей с отрицательными или малыми сопротивлениями (средние обмотки трансформаторов или автотрансформаторов, линии с продольной компенсацией), длинных линий с большой емкостной генерацией, большого преобладания активного над реактивным сопротивлением и т.д. довольно часто приводит к расходящимся итерациям метода Зейделя [35]. Поэтому вызывают определенный интерес методы, обладающие большей надежностью, чем метод Ньютона. Согласно [341] одним из таких методов является быстрый разделенный метод, который «В отличие от метода Ньютона, не терпит неудачу на любой решаемой задаче» [342].

Напомним, что разделенный метод Ньютона был предложен [340] в 1972 году и реализует простейший способ «разделения» системы линейных уравнений (2.2.7). Он состоит в том, что все элементы подматриц $[\partial \Delta P / \partial V]$ и $[\partial \Delta Q / \partial \delta]$ принимаются равные нулю, и вместо большой системы (2.2.7) решаются две малые:

$$[\partial \Delta P / \partial \delta] \Delta \delta = -\Delta P; \quad (1a)$$

$$[\partial \Delta Q / \partial V] \Delta V / V = -\Delta Q. \quad (16)$$

Такое допущение не является слишком грубым, поскольку вытекает из физических свойств ЭС. Действительно, в реальных сетях высокого напряжения активное сопротивление меньше реактивного, а углы по линиям обычно не превышают 20–25°. Поэтому потокораспределение активных мощностей в основном определяется фазовыми углами и мало зависит от модулей напряжения. Для потокораспределения реактивных мощностей наблюдается обратная картина. Поэтому для ЭС с хорошо обусловленной матрицей Якоби надежность и количество итераций примерно такие же, как при решении без разделения [340]. Благодаря уменьшению размерности

системы (1), итерация разделенного метода выполняется быстрее, чем итерация стандартного метода Ньютона, и требования к памяти ЭВМ сокращены в примерно в два раза.

Результаты применения разделенного метода подтвердили характеристики сходимости метода Ньютона. Даже значительные изменения в формировании матрицы линеаризованных уравнений (удаление двух внедиагональных подматриц) при условии учета физики процесса, не привели к заметному ухудшению сходимости метода. Поэтому, учитывая, что для реальных ЭС почти всегда выполняются соотношения:

$$\cos \delta_{km} \approx 1; \quad |G_{km} \sin \delta_{km}| \ll |B_{km}|; \quad |Q_k| \ll |B_{kk} V_k^2|,$$

в 1974 г. была предложена более надежная и быстрая модификация метода [342]:

$$[B'] [\text{diag}(V_s)] \Delta \delta = -\Delta P/V; \quad (2a)$$

$$[B''] \Delta V = -\Delta Q/V, \quad (2б)$$

где $[\text{diag}(V_s)]$ – диагональная матрица, k -й элемент которой равен напряжению балансирующего узла, приведенного к ступени трансформации k -го узла.; $\Delta P/V$, $\Delta Q/V$ – векторы правых частей, k -е элементы которых равны $\Delta P_k/V_k$ и $\Delta Q_k/V_k$ соответственно; $[B']$ и $[B'']$ – симметричные матрицы, структура которых совпадает со структурой матриц $[\partial \Delta P / \partial \delta]$ и $[\partial \Delta Q / \partial V]$, причем элементы матрицы $[B']$ формируются без учета активных сопротивлений, а именно, $B'_{km} = -X_{km}^{-1}$, $B'_{kk} = -\sum_m B'_{km}$, где X_{km} – индуктивное сопротивление линии $k-m$, а $[B'']$ – мнимая часть матрицы узловых проводимостей, не включающая строки и столбцы, соответствующие PV узлам. В матрицу $[B']$ не включаются компоненты, связанные с распределением реактивных мощностей – шунтовые реакторы и конденсаторы, неуравновешенные коэффициенты трансформации, а в матрице $[B'']$ исключаются компоненты, связанные с фазовым

регулированием. В современной терминологии такой вариант метода обычно обозначается как *XV* модификация.

Матрицы $[B']$ и $[B'']$ не содержат тригонометрических функций, а самое главное, не зависят от фазовых углов и модулей напряжения и являются симметричными. Поэтому здесь не требуется формировать и выполнять факторизацию матриц на каждой итерации, что существенно сокращает время расчетов. Учет симметричности матриц $[B']$ и $[B'']$ позволяет уменьшить объем вычислений и сократить размер требуемой памяти в 1,5–2 раза по сравнению с разделенным и в 2–3 раза по сравнению с чистым методом Ньютона. Следует подчеркнуть, что при решении разделенных систем, как (1), так и (2), используется идеология метода Зейделя. Вначале решается одна из подсистем, а затем, с новым вектором невязок, полученным с учетом изменения найденного первым параметра, решается другая. Возможно выполнение подряд нескольких подитераций одного вида, однако это не приводит к уменьшению количества итераций. Согласно [342], быстрый разделенный метод показал себя надежнее метода Ньютона.

За рубежом быстрый разделенный метод считался (это было 45 лет назад) наилучшим, обеспечивающим высокое быстродействие и надежность при экономном использовании памяти [341]. Обычно его использовали как эталон для сравнения с другими методами. Но и он имеет недостатки, основным из которых является замедление, а в некоторых случаях и нарушение сходимости в сетях с большими отношениями активного к реактивному сопротивлению. Были проведены исследования влияния активных сопротивлений сети на сходимость быстрого разделенного метода [319], когда обе матрицы $[B']$ и $[B'']$ формируются из мнимой части матрицы узловых проводимостей (*VB*-модификация быстрого разделенного метода). Оказалось, что удобной оценкой сходимости такой модификации разделенного метода является эмпирический критерий: $\max_k \{G_{kk}/B_{kk}\} < 1$. Если этот критерий выполняется, то метод сходится, в противном случае –

расходится. Позднее исследование [354] показало, что в таких случаях XV и VX – модификации быстрого разделенного метода, обладают большей надежностью и могут рассчитывать режимы сетей, для которых этот критерий не выполняется, т.е. когда $\max_k \{G_{kk}/B_{kk}\} > 1$. При этом VX – модификация, в которой матрица $[B']$ формируется из мнимой части матрицы узловых проводимостей, а $[B'']$ – из обратных величин индуктивных сопротивлений, показывает также большую скорость сходимости, чем XV . Удивительно также то, что несмотря на «отбрасывание» подматриц $[\partial \Delta P / \partial V]$ и $[\partial \Delta Q / \partial \delta]$ для реализации (2), а также неизменность элементов матриц $[B']$ и $[B'']$, при расчете утяжеленных режимов, т.е. с малым коэффициентом запаса статической устойчивости, число итераций, требуемые этими модификациями, обычно редко увеличивается более чем в три раза по сравнению с обычными режимами. Используя выражения «точного» разделенного метода [223], авторы [302] предложили следующее обоснование этих довольно интересных фактов.

Для краткости записи, линеаризованные уравнения метода Ньютона в форме баланса мощностей в полярной системе координат могут быть представлены следующим образом

$$\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Умножим линеаризованные уравнения активной мощности на $[M][H]^{-1}$ и вычтем их из уравнений реактивной мощности. Модифицированная система

$$\begin{bmatrix} H & N \\ 0 & L - MH^{-1}N \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Delta P \\ \Delta Q - MH^{-1}\Delta P \end{vmatrix} \quad (4a)$$

является эквивалентной (3) в том смысле, что искомые векторы решения СЛУ (3) и (4a) совпадают [225]. Аналогичным способом можно получить систему

$$\begin{bmatrix} H - NL^{-1}M & 0 \\ M & L \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Delta P - NL^{-1}\Delta Q \\ \Delta Q \end{vmatrix}, \quad (4b)$$

которая дает то же решение, что и системы (3) и (4а). Комбинируя эти два подхода, можно получить третью эквивалентную систему.

Введем обозначения:

$$[H_e] = [H] - [N][L]^{-1}[M]; \quad (5)$$

$$[L_e] = [L] - [M][H]^{-1}[N]. \quad (6)$$

Две системы (4а)–(4б) эквивалентны системе (3), они используют точное разделение решения уравнений (3) без отбрасывания каких-либо элементов. Используя разложения в ряд Тейлора $\Delta Q(V, \delta + \Delta\delta)$ и $\Delta P(V + \Delta V, \delta)$ с учетом членов не выше первого порядка, в [302] было показано, что решение системы (4а) примерно соответствует решению:

$$\begin{aligned} [H] \Delta\delta &= -\Delta P/V; \\ [L_e] \Delta V &= -\Delta Q(\delta + \Delta\delta)/V, \end{aligned} \quad (7)$$

а системы (4б) -

$$\begin{aligned} [L] \Delta V &= -\Delta Q/V; \\ [H_e] \Delta\delta &= -\Delta P(V + \Delta V)/V. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что точное разделение уравнений (4)–(8) является просто записью возможных реализаций метода Ньютона. Матрицы (5)–(6) представляют собой результат прямого хода Гаусса при исключении приращения углов или модулей напряжения из ниже лежавших уравнений. Поэтому эти схемы не имеют преимуществ перед обычной реализацией метода Ньютона. Однако именно эти схемы де-факто реализуются в *BX* и *XV* модификациях быстрого разделенного метода. Существенный выигрыш в этих модификациях получается за счет формирования матриц (5) и (6) напрямую, без использования Гауссова исключения.

Как пример, рассмотрим систему (3) без удаления строк и столбцов, соответствующих *PV*-узлам. Тогда при гладком старте и использовании о.е. она может быть представлена как

$$\begin{bmatrix} B & -G \\ G^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P/V \\ \Delta Q/V \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $[G]$ и $[B]$ являются действительной и мнимой частями матрицы узловых проводимостей. Если воспользоваться матрицей инцидентности $[C]$, матрицу узловых проводимостей можно представить в виде

$$\begin{aligned} [Y] &= [G] + j[B] = [C][\text{diag}(G_L + jB_L)][C]^T = \\ &= [C][\text{diag}(G_L)][C]^T + j[C][\text{diag}(B_L)][C]^T, \end{aligned} \quad (10)$$

где $[\text{diag}(G_L + jB_L)]$ - диагональная матрица проводимостей линий, что для (6) дает

$$\begin{aligned} [L_e] &= [L] - [M][H]^{-1}[N] = [C][\text{diag}(B_L)][C]^T + \\ &+ [C][\text{diag}(G_L)][C]^T \left[[C][\text{diag}(B_L)][C]^T \right]^{-1} [C][\text{diag}(G_L)][C]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Для радиальных систем матрица $[C]$ квадратная и невырожденная, поэтому

$$\begin{aligned} [L_e] &= [C][\text{diag}(B_L)][C]^T + \\ &+ [C][\text{diag}(G_L)][C]^T \left([C]^T \right)^{-1} [\text{diag}(B_L)]^{-1} [C]^{-1} [C][\text{diag}(G_L)][C]^T = \\ &= [C] \left([\text{diag}(B_L)] + [\text{diag}(G_L^2/B_L)] \right) [C]^T = [C][\text{diag}(-X_L^{-1})][C]^T. \end{aligned} \quad (12)$$

В последнем выражении учтено, что диагональные матрицы коммутируют между собой, и использовано соотношение $-X_\ell^{-1} = B_\ell + G_\ell^2/B_\ell$.

Следовательно, для радиальной схемы матрица $[L_e]$ имеет ту же структуру и формируется при гладком старте аналогично матрице узловых проводимостей, только используя индуктивные сопротивления линий. В дальнейшем, для краткости записи, мнимую часть матрицы узловых проводимостей, сформированную обычным способом, будем обозначать через $[B]$, а сформированную с учетом только индуктивных сопротивлений – через $[X]$.

В системе (4б) матрица $[H_e]$ имеет аналогичное выражение, однако следует иметь в виду, что линеаризованные уравнения баланса реактивных мощностей в методе Ньютона (3) записываются только для PQ -узлов. Поэтому подобное преобразование не может быть выполнено для PV -узлов. Видимо поэтому, согласно [223] и [302], BX модификация показала лучшие результаты, чем XB .

Таким образом, BX и XB модификации реализуют итерационные схемы «точного» разделенного метода (7) и (8), т.е. в этих модификациях в начале итерационного процесса не происходит никакого отбрасывания элементов, т.е., «загрубления» базисной системы линейаризованных уравнений (3).

Для замкнутых сетей матрица инцидентности является прямоугольной, поэтому для них соотношение (12) получить нельзя. В [302] сделано предположение, что в таких случаях матрица $[X]$, сформированная из индуктивных сопротивлений, намного ближе к $[L_e]$, чем матрица $[B]$ мнимой части матрицы узловых проводимостей, и в качестве иллюстрации приводят пример 4-х узловой кольцевой системы. Однако это не только так. Как пример, рассмотрим 4-х узловую тестовую систему из [141], представленную на рис. 2.1.

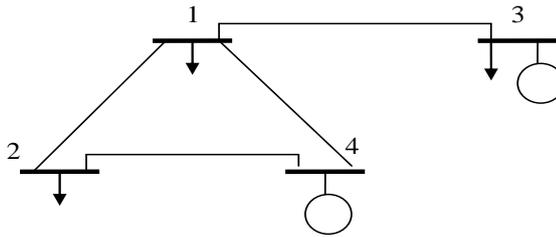


Рисунок 2.1 - 4-х узловая система

с исходными данными: сопротивления в Ω : $Z_{12}=10+j2$, $Z_{14}=8+j15$, $Z_{13}=10+j20$, $Z_{24}=20+j40$; нагрузка в МВА: $S_1=10+j15$, $S_2=180+j40$, $S_3=10+j0$ (PV -узел); 4-й узел балансирующий; $V_3=V_4=110$ кВ. Отметим, что активное сопротивление линии 1-2 в 5 раз больше индуктивного.

Для этой схемы матрица узловых проводимостей имеет вид

$$[Y] = \begin{bmatrix} -0.1438 + j0.1111 & 0.0962 - j0.0192 & 0.0200 - j0.0400 & 0.0277 - j0.0519 \\ 0.0962 - j0.0192 & -0.1062 + j0.0392 & 0 & 0.0100 - j0.0200 \\ 0.0200 - j0.0400 & 0 & -0.0200 + j0.0400 & 0 \\ 0.0277 - j0.0519 & 0.0100 - j0.0200 & 0 & -0.0377 + j0.0719 \end{bmatrix}$$

Поэтому матрица $[L_e]$ (6) (при гладком старте и использовании о.е.) и $[X]$ будут равны соответственно:

$$[L_e] = \begin{bmatrix} 0.4521 & -0.3342 \\ -0.3342 & 0.3580 \end{bmatrix}; \quad [X] = \begin{bmatrix} 0.6167 & -0.5000 \\ -0.5000 & 0.5250 \end{bmatrix}.$$

Сравнение этих матриц показывает, что, действительно, матрица $[X]$, намного ближе к $[L_e]$, чем соответствующая матрица $[B]$. Однако элементы матрицы $[X]$ примерно в 1,5 раза больше соответствующих элементов матрицы $[L_e]$. Несмотря на это, элементы обратной матрицы $[X]$ весьма близки к соответствующим элементам обратной матрицы $[L_e]$:

$$[L_e]^{-1} = \begin{bmatrix} 7.1388 & 6.6649 \\ 6.6649 & 9.0157 \end{bmatrix}; \quad [X]^{-1} = \begin{bmatrix} 7.1186 & 6.7797 \\ 6.7797 & 8.3616 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения, элементы обратной матрицы $[B]$ равны

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} 9.8322 & 4.8197 \\ 4.8197 & 27.8528 \end{bmatrix}.$$

Интересно также отметить, что XV модификация потребовала 10 итераций для расчета режима этой схемы при максимальном допустимом небалансе мощности в узлах 0,1 МВт/МВАр, в то время как BX модификация – 12,5. Хотя, казалось бы, согласно [302], должно быть наоборот.

В работе [141] была предложена другая - YU -модификация быстрого разделенного метода, в которой матрицы $[B']$ и $[B'']$ формируются аналогично матрице $[X]$, только вместо индуктивных используются полные сопротивления ветвей. Такая модификация интересна тем, что по утверждению ее автора он представил математическое доказательство того, что, если решение существует и лежит в выпуклой области расчетной устойчивости, где действительные части собственных значений матрицы Якоби положительны, данная модификация разделенного метода Ньютона всегда позволяет рассчитать режим. Действительно, для предложенной в этой работе тестовой схемы 4-х узловой ЭС, которая соответствует рис. 2.1, YU -модификация рассчитывает режим за 21 итерацию. Но если немного изменить сопротивление ветви 1-2, чтобы оно стало равным $Z_{12}=10-j2$, итерационный процесс такой модификации расходится и не позволяет получить решение. В то же самое время обычный метод Ньютона дает

решение за три итерации. При этом действительные части собственных значений матрицы Якоби положительны, как при гладком старте и промежуточных итерациях, так и в точке решения. Т.е. критерий сходимости УУ-модификации [141] вроде выполнен, но она не позволяет получить решение. Поэтому представленное доказательство в [141] вызывает некоторое сомнение. Наличие отрицательных индуктивных сопротивлений ветвей весьма возможны в реальных ЭС, например, продольная компенсация линий, средние обмотки трансформаторов и автотрансформаторов и т.д. ВХ и ХВ модификации быстрого разделенного метода тоже не позволяют рассчитать режим такой схемы, хотя обратные матрицы $[L_e]$ и $[X]$ также близки друг к другу для этой модифицированной системы:

$$[L_e] = \begin{bmatrix} -2.1566 & 2.2625 \\ 2.2625 & -2.2269 \end{bmatrix}; [X] = \begin{bmatrix} -0.3833 & 0.5000 \\ 0.5000 & -0.4750 \end{bmatrix};$$

$$[L_e]^{-1} = \begin{bmatrix} 7.0337 & 7.1462 \\ 7.1462 & 6.8115 \end{bmatrix}; [X]^{-1} = \begin{bmatrix} 6.9939 & 7.3620 \\ 7.3620 & 5.6442 \end{bmatrix}.$$

В то же самое время УУ-модификация с корректировкой правых частей на основе β -коэффициентов [71] требует всего 7,5 итерации для расчета режима этой модифицированной схемы. Для исходной схемы данная модификация требует 9 итераций. Предложен также ряд других модификаций быстрого разделенного метода [35], поэтому интересно сравнить и определить их область возможного применения.

Разные модификации быстрого разделенного метода можно получить, если воспользоваться выражениями симметричного метода Ньютона [69]. Рассмотрим УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат (2.2.3). В реальных ЭС значения отношения активного сопротивления к реактивному для каждой из линий, подходящих к одному узлу, обычно мало отличаются друг от друга. Поэтому введем в рассмотрение расчетный коэффициент $\beta_k = \sum_{m \neq k} G_{km} / \sum_{m \neq k} B_{km}$ и сделаем следующие преобразования:

1. Прибавим к каждому уравнению системы (2.2.3а) соответствующее уравнение из системы (2.2.3б), умноженное на β_k .

2. Умножим каждое уравнение системы (2.2.3б) на соответствующий коэффициент β_k и полученное выражение вычтем из соответствующих уравнений системы (2.2.3а).

Тогда, в условиях заявленной однородности линий, примыкающих к одному узлу, и с учетом соотношения $-X_{km}^{-1} = B_{km} + G_{km}^2/B_{km}$, уравнения потокораспределения можно записать следующим образом:

$$\Delta P_k + \beta_k \Delta Q_k = P_k + \beta_k Q_k - V_k^2 G_{kk}^{sh} - V_k \sum_{m \in k} V_m \left(-\frac{1}{X_{km}} \right) \sin \delta_{km} = 0; \quad (13a)$$

$$\Delta Q_k - \beta_k \Delta P_k = Q_k - \beta_k P_k + V_k^2 \left(\sum_{m \in k} \frac{1}{X_{km}} + B_{kk}^{sh} \right) + V_k \sum_{m \in k} V_m \left(-\frac{1}{X_{km}} \right) \cos \delta_{km} = 0, \quad (13b)$$

где $G_{kk}^{sh} = -G_k^{sh} + \beta_k B_k^{sh}$; $B_{kk}^{sh} = -B_k^{sh} + \beta_k G_k^{sh}$.

Если уравнения (13) разделить на $(1 + \beta_k^2)$ и учесть, что $B_{km} = -\left(X_{km} \left(1 + (G_{km}/B_{km})^2 \right) \right)^{-1}$, можно получить вторую форму записи, где вместо $-X_{km}^{-1}$ используется B_{km} . Третью форму можно получить, если уравнения (13) разделить на $\sqrt{1 + \beta_k^2}$. Поскольку $|Y_{km}| = \left(X_{km} \sqrt{1 + (G_{km}/B_{km})^2} \right)^{-1}$, то вместо X_{km}^{-1} будет использоваться $|Y_{km}|$.

Выполненное преобразование УУР, названное β -преобразованием, позволяет исключить члены с активными проводимостями, т.е. получить сеть без потерь активной мощности и привести матрицу коэффициентов к симметричному виду. Метод, реализующий систему (13) или его альтернативные формы, назван симметричным методом Ньютона. В случае полной однородности сети уравнения (13) являются точными. При нулевых углах, что соответствует гладкому старту, принимаемому в качестве базиса в быстром разделенном методе Ньютона, матрицы Якоби систем (13) в точности совпадают с матрицами (5)–(6) точного разделенного метода. Следует заметить, что уравнения (13а) можно получить только для PQ -узлов,

поскольку для PV -узлов значение реактивной мощности заранее неизвестно. Однако, учитывая, что генераторные узлы обычно подключаются к системе линиями с большим сечением, для которых коэффициент β достаточно мал, эти уравнения можно использовать соответствующим образом.

В таблице 2.7 представлены результаты расчетов УР IEEE тестовых систем [233] рассмотренными модификациями быстрого разделенного метода Ньютона (БРН) без учета ограничений реактивной мощности PV -узлов. Точность расчета была принята 0,1 МВт/МВАр. Нижний индекс β в модификации метода указывает, что на соответствующей половине итерации правая часть решаемой подсистемы корректируется с помощью β - коэффициентов согласно представленным выше формулам. Для каждой ЭС в нижней части таблицы 2.7 указаны $\max / \beta_k \left| = \max \left| \frac{\sum_m G_{km}}{\sum_m B_{km}} \right|$, коэффициент запаса статической устойчивости расчетного (базисного) режима ($K_{зан}$), минимальное значение напряжения среди узлов сети, а также максимальное значение среди углов по линиям. Для определения коэффициента запаса статической устойчивости компоненты вектора утяжеления принимались равными значениям мощностей нагрузок и генерации базисного режима. В конце таблицы 2.7 для сравнения представлены количество итераций, требуемых модификациями метода Ньютона. В таблице 2.7 знаком подчеркивания отмечены наименьшее число итераций, требуемых для расчета УР каждой тестовой системы соответствующими модификациями быстрого разделенного метода. Анализ представленных результатов показывает, что большинство тестируемых модификаций быстрого разделенного метода требуют примерно одинаковое количество итераций, в среднем в 1,2-2 раза больше, чем метод Ньютона. Только семь модификаций быстрого разделенного метода, исключая «классические», обеспечили расчет IEEE 300-узловой тестовой схемы. Видимо причина отсутствия этой тестовой схемы в зарубежных публикациях, предлагающих те или иные разделенные методы, объясняется именно таким её неудобством для авторов.

Таблица 2.7 - Число итераций *БРН* без учета ограничений реактивной мощности

<i>БРН</i>	<i>IEEE-14</i>	<i>IEEE-30</i>	<i>IEEE-57</i>	<i>IEEE-118</i>	<i>IEEE-300</i>
<i>BB</i>	8,5	8	P	4,5	P
<i>BX</i>	3	3,5	3,5	3,5	18,5
<i>XX</i>	4,5	4	10	4	P
<i>XB</i>	3,5	3,5	3,5	3,5	P
<i>YY</i>	3	3	5	3,5	P
<i>XY</i>	4	3,5	7	3,5	P
<i>BY</i>	4	4	8,5	4	P
<i>YB</i>	3,5	3,5	9	3,5	P
<i>YX</i>	4	4	8	3,5	P
<i>B_βB</i>	4	4	5,5	4,5	12,5
<i>B_βX</i>	5,5	4	10	4,5	14,5
<i>X_βX</i>	6	4	10	5	P
<i>X_βB</i>	3,5	3,5	4,5	4,5	P
<i>Y_βY</i>	4,5	3,5	6	4,5	P
<i>X_βY</i>	4,5	4	6	4,5	P
<i>B_βY</i>	4,5	3,5	6	4,5	P
<i>Y_βB</i>	4	3,5	4,5	4,5	P
<i>Y_βX</i>	5,5	4	10	5	P
<i>BB_β</i>	3,5	3,5	6	3,5	19,5
<i>BX_β</i>	2,5	3	3,5	3,5	19,5
<i>XX_β</i>	3,5	3,5	7,5	3,5	P
<i>XB_β</i>	4,5	3,5	7,5	3,5	P
<i>YY_β</i>	3,5	2,5	5,5	3,5	P
<i>XY_β</i>	3,5	3,5	7,5	3,5	P
<i>BY_β</i>	3	3	3,5	3,5	P
<i>YB_β</i>	4,5	3	5,5	3,5	P
<i>YX_β</i>	3	3,5	5,5	3,5	P
<i>B_βB_β</i>	3,5	3	6	4,5	21,5
<i>B_βX_β</i>	3,5	3	4,5	4,5	21,5
<i>X_βX_β</i>	5	4	15	5	P
<i>X_βB_β</i>	3,5	3	4,5	4,5	P
<i>Y_βY_β</i>	4	3	4	4,5	P
<i>X_βY_β</i>	5	4	6,5	5	P
<i>B_βY_β</i>	3,5	3	4,5	4,5	P
<i>Y_βB_β</i>	4	3,5	4,5	4,5	P
<i>Y_βX_β</i>	4	3	5	4,5	P
<i>Max β_k </i>	0,740	0,741	1,089	0,472	1,268
<i>Kзан</i>	306%	196%	89%	219%	43%
<i>V_{min} (o.e.)</i>	1,01	0,992	0,936	0,943	0,929
<i>max δ_{km} </i>	9 ⁰	9 ⁰	9 ⁰	13 ⁰	24 ⁰
<i>I_Mδ</i>	2	2	2	3	5
<i>Pδ</i>	2	2	3	3	5
<i>Z</i>	4	4	4	15	P

Таблица 2.8 - Число итераций *БРН* для утяжеленных режимов без учета ограничений реактивной мощности

<i>БРН</i>	<i>IEEE-14</i>	<i>IEEE-30</i>	<i>IEEE-57</i>	<i>IEEE-118</i>	<i>IEEE-300</i>
<i>BB</i>	19,5	9	P	21,5	P
<i>BX</i>	20,5	8,5	6,5	21,5	P
<i>XX</i>	21,5	9,5	9,5	22,5	P
<i>XB</i>	20,5	8,5	5,5	22,5	P
<i>YY</i>	20,5	8,5	6,5	22,5	P
<i>XY</i>	21,5	9,5	6,5	22,5	P
<i>BY</i>	19,5	7,5	6,5	21,5	P
<i>YB</i>	20,5	8,5	5,5	22	P
<i>YX</i>	20,5	8,5	7,5	22,5	P
<i>B_βB</i>	15,5	7,5	9,5	19,5	P
<i>B_βX</i>	16,5	9,5	11	20,5	P
<i>X_βX</i>	21,5	10,5	10	23,5	P
<i>X_βB</i>	20,5	9,5	5,5	22,5	P
<i>Y_βY</i>	18,5	8,5	7,5	21,5	P
<i>X_βY</i>	21,5	9,5	6,5	22,5	P
<i>B_βY</i>	15,5	8,5	9,5	20,5	P
<i>Y_βB</i>	18,5	8,5	6,5	21,5	P
<i>Y_βX</i>	19,5	9,5	10	21,5	P
<i>BB_β</i>	21,5	10,5	9,5	22,5	P
<i>BX_β</i>	21,5	9,5	7,5	22,5	P
<i>XX_β</i>	23,5	9,5	8,5	23,5	P
<i>XB_β</i>	23,5	10,5	9,5	23,5	P
<i>YY_β</i>	22,5	9,5	8,5	22,5	P
<i>XY_β</i>	23,5	10,5	9,5	23,5	P
<i>BY_β</i>	21,5	9,5	8,5	22,5	P
<i>YB_β</i>	22,5	10,5	9,5	22,5	P
<i>YX_β</i>	22,5	9,5	7,5	22,5	P
<i>B_βB_β</i>	22,5	11,5	7,5	22,5	P
<i>B_βX_β</i>	22,5	10,5	7,5	22,5	P
<i>X_βX_β</i>	25,5	10,5	P	25,5	P
<i>X_βB_β</i>	25,5	11,5	20	25,5	P
<i>Y_βY_β</i>	23,5	11,5	7,5	24,5	P
<i>X_βY_β</i>	25,5	11,5	45	25,5	P
<i>B_βY_β</i>	22,5	10,5	7,5	22,5	P
<i>Y_βB_β</i>	23,5	11,5	8,5	23,5	P
<i>Y_βX_β</i>	23,5	10,5	9,5	24,5	P
<i>Кзан %</i>	≈3%	≈3%	≈3%	≈3%	≈3%
<i>V_{min} (o.e.)</i>	0,752	0,633	0,596	0,767	0,723
<i>max δ_{km} </i>	52 ⁰	30 ⁰	18 ⁰	62 ⁰	41 ⁰
<i>I_{Mδ}</i>	4	4	3	5	5
<i>Pδ</i>	5	4	4	5	5
<i>Z</i>	32	24	15	>50	P

В таблице 2.8 представлены результаты расчетов утяжеленных режимов этих систем с нагрузкой и генерацией, увеличенных пропорционально их значениям в базисном режиме, так чтобы коэффициент запаса статической устойчивости соответствовал примерно 3%. Утяжеленный режим IEEE 300-узловой системы не рассчитала ни одна модификация быстрого разделенного метода. Для остальных систем количество требуемых итераций возросло в 1,57-8 раз. Хотя представленные режимы имеют примерно одинаковый коэффициент запаса статической устойчивости, наибольший рост числа итераций получился для систем, которые имеют большие углы по линиям. При дальнейшем снижении коэффициентов запаса статической устойчивости число итераций существенно возрастает и, при расчете режимов с коэффициентом запаса меньше 1%, требуется значительно больше 50 итераций. В противоположность этому, метод Ньютона потребовал только на 1-2 итерации больше по сравнению с расчетом базисного режима.

Для полноты эксперимента в таблице 2.9 и 2.10 представлены результаты для этих тестовых систем, когда учитываются ограничения по реактивной мощности. Для базисных режимов количество итераций получились примерно такое же, как без учета ограничений. Для утяжеленных режимов число требуемых итераций возросло заметно меньше. Семь модификаций *БРН* обеспечили расчет утяжеленного режима IEEE 300-узловой схемы. Это объясняется видимо тем, что при учете ограничений реактивной мощности максимальные углы по линиям остаются примерно такими же, как в базисном режиме, или возрастают не более чем в два раза. В методе Ньютона количество итераций увеличилось на 0-3 итерации.

Результаты тестирования модификаций быстрого разделенного метода для российских тестовых схем, рассмотренных в предыдущем параграфе, не представлены, т.к. для всех схем, кроме 195-узловой и ОЭС Волги, не удалось получить расчет потокораспределения.

Таблица 2.9 - Число итераций *БРН* с учетом ограничений реактивной мощности

<i>БРН</i>	IEEE-14	IEEE-30	IEEE-57	IEEE-118	IEEE-300
<i>BB</i>	8,5	8	P	6,5	P
<i>BX</i>	3	3,5	3,5	4,5	18,5
<i>XX</i>	4,5	4,5	10	5,5	P
<i>XB</i>	3,5	3	3,5	5	P
<i>YY</i>	3	4	5	5	P
<i>XU</i>	4	4	7	5,5	P
<i>BU</i>	4	4	8,5	5,5	P
<i>YB</i>	3,5	3,5	9	6,5	P
<i>YX</i>	4	4,5	8	5,5	P
<i>B_βB</i>	4	4	5,5	7	12,5
<i>B_βX</i>	5,5	5	10	6,5	14,5
<i>X_βX</i>	6	5	10	6,5	P
<i>X_βB</i>	3,5	3,5	4,5	5	P
<i>Y_βY</i>	4,5	4	6	5	P
<i>X_βY</i>	4,5	4	6	6,5	P
<i>B_βY</i>	4,5	4	6	6,5	P
<i>Y_βB</i>	4	4	4,5	7	P
<i>Y_βX</i>	5,5	5	10	6,5	P
<i>BB_β</i>	3,5	3,5	6	5	19,5
<i>BX_β</i>	2,5	3,5	3,5	5	19,5
<i>XX_β</i>	3,5	3,5	7,5	5,5	P
<i>XB_β</i>	4,5	3,5	7,5	5,5	P
<i>YY_β</i>	3,5	3	5,5	5,5	P
<i>XY_β</i>	3,5	3,5	7,5	5,5	P
<i>BY_β</i>	3	3	3,5	5	P
<i>YB_β</i>	4,5	3	5,5	5,5	P
<i>YX_β</i>	3	3,5	5,5	5,5	P
<i>B_βB_β</i>	3,5	3	6	7	20,5
<i>B_βX_β</i>	3,5	4	4,5	7	21,5
<i>X_βX_β</i>	5	4	15	7	P
<i>X_βB_β</i>	3,5	4	4,5	7	P
<i>Y_βY_β</i>	4	3,5	4	7	P
<i>X_βY_β</i>	5	4	6,5	7	P
<i>B_βY_β</i>	3,5	4	4,5	7	P
<i>Y_βB_β</i>	4	3,5	4,5	7	P
<i>Y_βX_β</i>	4	3,5	5	7	P
<i>Kзан %</i>	78%	55%	62%	108%	6%
<i>V_{min} (o.e.)</i>	1,01	0,992	0,936	0,943	0,929
<i>max δ_{km} </i>	9 ⁰	9 ⁰	9 ⁰	13 ⁰	24 ⁰
<i>I_{Mδ}</i>	2	3	2	4	5
<i>Pδ</i>	2	3	3	4	5
<i>Z</i>	4	4	4	13	P

Таблица 2.10 - Число итераций *БРН* для утяжеленных режимов с учетом ограничений реактивной мощности

<i>БРН</i>	<i>IEEE-14</i>	<i>IEEE-30</i>	<i>IEEE-57</i>	<i>IEEE-118</i>	<i>IEEE-300</i>
<i>BB</i>	11,5	10,5	P	10,5	P
<i>BX</i>	10,5	9,5	6,5	10,5	19,5
<i>XX</i>	10,5	10,5	10	12,5	P
<i>XB</i>	10,5	9,5	6,5	11,5	P
<i>YY</i>	10,5	9,5	6,5	11,5	P
<i>XY</i>	10,5	9,5	7,5	11,5	P
<i>BY</i>	9,5	9,5	6,5	10,5	P
<i>YB</i>	9,5	9,5	6,5	11,5	P
<i>YX</i>	10,5	10,5	7,5	11,5	P
<i>B_βB</i>	11,5	10,5	9,5	12,5	15,5
<i>B_βX</i>	12,5	13,5	11,5	13,5	15,5
<i>X_βX</i>	11,5	12,5	10,5	13,5	P
<i>X_βB</i>	9,5	9,5	6,5	11,5	P
<i>Y_βY</i>	11,5	10,5	8,5	13,5	P
<i>X_βY</i>	10,5	10,5	8,5	13,5	P
<i>B_βY</i>	12,5	11,5	9,5	12,5	P
<i>Y_βB</i>	11,5	10,5	6,5	13,5	P
<i>Y_βX</i>	12,5	12,5	10,5	10,5	P
<i>BB_β</i>	11,5	10,5	8	10,5	17,5
<i>BX_β</i>	10,5	10,5	6,5	10,5	19,5
<i>XX_β</i>	10,5	10,5	7,5	12,5	P
<i>XB_β</i>	11,5	10,5	8,5	12,5	P
<i>YY_β</i>	9,5	10,5	6,5	11,5	P
<i>XY_β</i>	11,5	10,5	7,5	12,5	P
<i>BY_β</i>	10,5	10,5	7,5	10,5	P
<i>YB_β</i>	10,5	10,5	8	11,5	P
<i>YX_β</i>	10,5	10,5	6,5	11,5	P
<i>B_βB_β</i>	11,5	11,5	7,5	11,5	26,5
<i>B_βX_β</i>	11,5	10,5	7,5	11,5	25,5
<i>X_βX_β</i>	12,5	10,5	33	13,5	P
<i>X_βB_β</i>	12,5	11,5	10,5	13,5	P
<i>Y_βY_β</i>	12,5	10,5	8,5	13,5	P
<i>X_βY_β</i>	12,5	11,5	10,5	13,5	P
<i>B_βY_β</i>	11,5	10,5	7,5	11,5	P
<i>Y_βB_β</i>	11,5	11,5	7,5	13,5	P
<i>Y_βX_β</i>	12,5	10,5	8,5	13,5	P
<i>Кзан %</i>	≈3%	≈3%	≈3%	≈3%	≈3%
<i>V_{min} (o.e.)</i>	0,749	0,721	0,688	0,791	0,916
<i>max δ_{km} </i>	18 ⁰	17 ⁰	15 ⁰	32 ⁰	25 ⁰
<i>I_{Mδ}</i>	5	5	4	7	5
<i>Pδ</i>	5	5	4	7	5
<i>Z</i>	18	18	14	28	P

Таким образом, представленные результаты показывают, что разделенные методы имеют ограниченную область применения. Это прежде всего ЭС, в схемах замещения которых активные сопротивления ветвей не превосходят индуктивные, а также радиальные сети, для которых всегда выполняется (12). Для других ЭС, разделенные методы могут, как работать, так и не работать, что позволяет их рассматривать как «узкоспециализированные». Разделенные методы также не могут быть использованы как «стартовые» алгоритмы для получения начального приближения переменных, т.к. эти методы не являются надежными, и довольно часто начинают расходиться с первой же итерации. По крайней мере, это замечено для Российских тестовых систем.

2.4 Методы второго и высокого порядка

Решение любой задачи почти всегда связано с загрузением математической модели. Это обуславливается или сложностью модели, или используемыми численными методами, или другими причинами. В случае систем нелинейных уравнений, в частности, уравнений УР, которые обычно представляются в виде

$$\Delta F(X) = 0, \quad (1)$$

решение основывается на аппроксимации системы (1) моделью, которую можно достаточно просто решить. Поскольку исходная и аппроксимирующая модели обычно полностью не совпадают, то решение системы (1) получается решением ряда аппроксимирующих моделей, т.е. итерационно.

В численных методах решения систем нелинейных уравнений система (1) на каждой итерации обычно аппроксимируется моделью, включающей ограниченное число членов разложения вектора-функции (1) в ряд Тейлора в окрестности точки приближения X^i :

$$\Delta F(X^{i+1}) = \Delta F(X^i) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial \Delta F^i}{\partial X} \right] \Delta X^{i+1} + \frac{1}{2!} (\Delta X^{i+1})^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F^i}{\partial X^2} \right] \Delta X^{i+1} + \dots = 0, \quad (2)$$

где $\left[\frac{\partial^2 \Delta F^i}{\partial X^2} \right]$ – кубическая матрица вторых производных (матрица Гессе).

Как уже отмечалось ранее, порядок старшей производной, используемой в рекуррентном выражении итерационного процесса, определяет порядок численного метода. Например, метод Зейделя не использует производные, поэтому относится к методам нулевого порядка. Метод Ньютона можно отнести к методам первого порядка, поскольку в нем используется матрица Якоби, являющаяся матрицей коэффициентов, решаемой на каждой итерации СЛУ,

$$\left[\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right] \Delta X = -\Delta F. \quad (3)$$

Очевидно, чем больше членов ряда разложения вектора-функции учитывается методом, то есть чем больше его порядок, тем точнее аппроксимируется исходная система, а значит, на итерациях будет получено более точное решение и потребуются меньшее их число. Именно такие соображения явились причиной того, что в середине семидесятых годов прошлого столетия появились первые разработки методов высокого порядка для решения уравнений УР. Этому способствовал тот факт, что на тот момент метод Ньютона, казалось, настолько хорошо разработан и исследован, что себя исчерпал, и дальнейшее развитие методов расчета УР связано с методами высокого порядка.

Чем выше порядок метода, тем больше приходится выполнять вычислений на каждой итерации и, как правило, тем больше требования по памяти. Поэтому в основном получили распространение методы второго порядка, которые при аппроксимации, следуя логике названия, должны основываться на сохранении нелинейности в виде квадратичной модели:

$$\Delta F(X^{i+1}) \approx \Delta F(X^i) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial \Delta F^i}{\partial X} \right] \Delta X^{i+1} + \frac{1}{2!} (\Delta X^{i+1})^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F^i}{\partial X^2} \right] \Delta X^{i+1} = 0. \quad (4)$$

УУР в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат являются квадратичными и их разложение в ряд Тейлора (2) не содержит

члены выше второго порядка и в точности соответствует (4). Поэтому в методах второго порядка чаще всего используют именно эти УУР.

Хотя довольно легко сформулировать цели методов второго порядка, не так просто их реализовать. Дело в том, что прямые (безытерационные) методы решения известны только для линейных систем уравнений, а система квадратичных уравнений (4) может быть решена только итерационными методами. Поэтому учет членов второго порядка производится косвенно, обычно следующим образом.

Почти все методы второго порядка в качестве математической модели используют УУР в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат в следующем виде:

$$P_k = (U_k'^2 + U_k''^2)G_{kk} + \sum_{m \neq k} [U_k'(U_m'G_{km} - U_m''B_{km}) + U_k''(U_m''G_{km} + U_m'B_{km})], \quad (5a)$$

$$k \in PV + PQ;$$

$$Q_k = -(U_k'^2 + U_k''^2)B_{kk} + \sum_m [U_k''(U_m'G_{km} - U_m''B_{km}) - U_k'(U_m''G_{km} + U_m'B_{km})], \quad (5b)$$

$$k \in PQ;$$

$$V_k^2 = U_k'^2 + U_k''^2, \quad k \in PV. \quad (5b)$$

В этих уравнениях заданные активные (P_k) и реактивные (Q_k) мощности в узлах и квадрат модуля напряжения генераторов записываются слева, а в правую часть переносятся все остальные слагаемые, т.е. потоки активной и реактивной мощности по линиям, отходящим от узла, квадраты компонент напряжения генераторных узлов. Очевидно, в точке решения значения правых и левых частей должны быть равны между собой. Левая часть есть константа, правая часть зависит от значений напряжений.

Если задаться начальным приближением $\overset{\circ}{U}'$, $\overset{\circ}{U}''$, то подстановка $U' = \overset{\circ}{U}' + \Delta U'$ и $U'' = \overset{\circ}{U}'' + \Delta U''$ в (5) дает:

$$\begin{aligned}
P_k &= \overset{\circ}{P}_k + \sum_{m \neq k} \left(\overset{\circ}{U}'_k G_{km} + \overset{\circ}{U}''_k B_{km} \right) \Delta U'_m + (\overset{\circ}{U}'_k G_{kk} + \overset{\circ}{I}'_k) \Delta U'_k + \\
&+ \sum_{m \neq k} \left(\overset{\circ}{U}''_k G_{km} - \overset{\circ}{U}'_k B_{km} \right) \Delta U''_m + (\overset{\circ}{U}'_k G_{kk} + \overset{\circ}{I}'_k) \Delta U''_k + (\Delta U'^2_k + \Delta U''^2_k) G_{kk} + \quad (6a) \\
&+ \sum_{m \neq k} [\Delta U'_k (\Delta U'_m G_{km} - \Delta U''_m B_{km}) + \Delta U''_k (\Delta U''_m G_{km} + \Delta U'_m B_{km})];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_k &= \overset{\circ}{Q}_k + \sum_{m \neq k} \left(\overset{\circ}{U}''_k G_{km} - \overset{\circ}{U}'_k B_{km} \right) \Delta U'_m - (\overset{\circ}{U}'_k B_{kk} + \overset{\circ}{I}'_k) \Delta U'_k + \\
&+ \sum_{m \neq k} \left(\overset{\circ}{U}'_k G_{km} - \overset{\circ}{U}''_k B_{km} \right) \Delta U''_m + (-\overset{\circ}{U}''_k B_{kk} + \overset{\circ}{I}'_k) \Delta U''_k - (\Delta U'^2_k + \Delta U''^2_k) B_{kk} + \quad (6б) \\
&+ \sum_m [\Delta U''_k (\Delta U'_m G_{km} - \Delta U''_m B_{km}) - \Delta U'_k (\Delta U''_m G_{km} + \Delta U'_m B_{km})];
\end{aligned}$$

$$V_k^2 = \overset{\circ}{V}_k^2 + 2U'_k \Delta U'_k + 2U''_k \Delta U''_k + \Delta U'^2_k + \Delta U''^2_k. \quad (6в)$$

Здесь $\overset{\circ}{P}_k$, $\overset{\circ}{Q}_k$, $\overset{\circ}{V}_k^2$ – значения правых частей уравнений (5), вычисленных в точке начального приближения $\overset{\circ}{U}'$, $\overset{\circ}{U}''$; $\overset{\circ}{I}'_k$, $\overset{\circ}{I}''_k$ – значения токов, также вычисленные в точке начального приближения $\overset{\circ}{I}'_k = \sum_m Y_{km} \overset{\circ}{U}_m$.

Система уравнений (6) является разложением уравнений УР (5) в ряд Тейлора. Так как для квадратичных уравнений члены разложения выше второго порядка тождественно равны нулю, система уравнений (6) является эквивалентной системе (5) в том смысле, что если $[\Delta U', \Delta U'']^T$ найдено и соответствует системе (6), то решением исходной системы нелинейных уравнений (5) будет

$$U' = \overset{\circ}{U}' + \Delta U'; \quad U'' = \overset{\circ}{U}'' + \Delta U''. \quad (7)$$

Систему (6) можно представить в матричном виде:

$$\begin{vmatrix} P \\ Q \\ V^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P^0 \\ Q^0 \\ V^{0^2} \end{vmatrix} = [J] \begin{vmatrix} \Delta U' \\ \Delta U'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} SOTP \\ SOTQ \\ SOTV \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где $[J]$ – матрица Якоби УУР (5), вычисленная в точке начального приближения; $SOTP$, $SOTQ$, $SOTV$ – члены второго порядка уравнений (6).

В большинстве методов второго порядка итерационная процедура решения системы (8) реализуется в следующем виде

$$[J] \begin{vmatrix} \Delta U^{i+1} \\ \Delta U^{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P \\ Q \\ V^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P^0 \\ Q^0 \\ V^{0^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} SOTP^i \\ SOTQ^i \\ SOTV^i \end{vmatrix}. \quad (9)$$

На первой итерации $SOTP$, $SOTQ$, $SOTV$ предполагаются нулевыми, и, используя (9), вычисляются ΔU^1 и $\Delta U''^1$. Затем по выражениям для членов второго порядка находятся $SOTP^1$, $SOTQ^1$, $SOTV^1$, и подстановкой в (9) вычисляются новые значения $\Delta U'$, $\Delta U''$ и т.д. После выполнения такого итерационного процесса, искомое решение получается согласно (7).

Поскольку в методах второго порядка на всех итерациях используется одна и та же матрица Якоби $[J]$ первой итерации и корректируются только правая часть СЛУ (9), то, по своей сути, эти методы являются разновидностью модифицированного метода Ньютона с постоянной матрицей. Рассмотрим этот вопрос более подробно

Если систему (8) переписать в компактном виде,

$$R = [J]\Delta U + \Delta U^T [H]\Delta U, \quad (10)$$

то решение итерационной процедуры (9) можно представить [326] в виде следующего ряда:

$$\Delta U^i = \sum_{j=1}^i \delta U^j, \quad (11a)$$

где

$$\delta U^1 = [J]^{-1} R; \quad (11b)$$

$$\delta U^i = -[J]^{-1} \delta U^{i-1T} [H] \left(\delta U^{i-1} + 2 \sum_{j=1}^{i-2} \delta U^j \right), \quad i \geq 2. \quad (11c)$$

Для исследования (11) удобно воспользоваться теоремой невязок

Теорема невязок [271]. Пусть $\Delta F(X) = 0$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $X = X^0$, который затем представляется в виде

$$\Delta F(X) = \Delta F(X^0) + A(X^0, \Delta X) + B(X^0, \Delta X). \quad (12a)$$

Здесь члены ряда Тейлора сгруппированы в полиномы A и B . Пусть ΔX^i есть решение усеченного ряда

$$\Delta F(X) \approx \Delta F(X^0) + A(X^0, \Delta X^i), \quad (12б)$$

тогда новый вектор невязок будет равен $B(X^0, \Delta X^i)$, т.е.

$$\Delta F(X^0 + \Delta X^i) = B(X^0, \Delta X^i). \quad (12в)$$

Доказательство теоремы следует из соотношения

$$\Delta F(X^0 + \Delta X^i) = \Delta F(X^0) + A(X^0, \Delta X^i) + B(X^0, \Delta X^i). \quad (12г)$$

В терминах теоремы невязок компоненты (9) можно представить в следующем виде:

$$\Delta F^0 = \begin{vmatrix} P \\ Q \\ V^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P^0 \\ Q^0 \\ V^{0(2)} \end{vmatrix} = -R; \quad (13а)$$

$$A(X, \Delta X^i) = [J] \begin{vmatrix} \Delta U^{i+1} \\ \Delta U^{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} SOTP^i \\ SOTQ^i \\ SOTV^i \end{vmatrix} = [J]\Delta U^{i+1} + \Delta U^{iT} [H]\Delta U^i; \quad (13б)$$

$$\begin{aligned} \Delta F^{i+1} = \Delta F(X^0 + \Delta X^i) &= B(X^0, \Delta X^i) = \begin{vmatrix} SOTP^i \\ SOTQ^i \\ SOTV^i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} SOTP^{i-1} \\ SOTQ^{i-1} \\ SOTV^{i-1} \end{vmatrix} = \\ &= \Delta U^{iT} [H]\Delta U^i - \Delta U^{i-1T} [H]\Delta U^{i-1}. \end{aligned} \quad (13в)$$

Выражение (13в) показывает, что невязки в конце итерации в методах второго порядка равны изменению в членах ряда Тейлора, не учитываемых на итерациях.

Выражение (11а) можно представить, как

$$\Delta U^i = \Delta U^{i-1} + \delta U^i, \quad (13г)$$

тогда (13в) и (11б) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta F^i = \Delta F(X^0 + \Delta X^i) &= (\Delta U^{i-1} + \delta U^i)^T [H] (\Delta U^{i-1} + \delta U^i) - \Delta U^{i-1T} [H]\Delta U^{i-1} = \\ &= \delta U^{iT} [H] (\delta U^i + 2\Delta U^{i-1}); \end{aligned} \quad (13д)$$

$$\delta U^i = -[J]^{-1} \delta U^{i-1T} [H] (\delta U^{i-1} + 2\Delta U^{i-1}) = -[J]^{-1} \Delta F^i. \quad (13е)$$

Использование (13а) и (13е) для (11) дает, что итерационная процедура

метода второго порядка (8) эквивалентна следующей процедуре решения

$$[J]\Delta U^i = -\sum_{j=0}^{i-1} \Delta F^j. \quad (13ж)$$

Но (13ж) есть не что иное, как выражение модифицированного метода Ньютона с постоянной матрицей Якоби первой итерации. Только вместо корректировки неизвестных на каждой итерации, неизвестные модифицируются в конце последней итерации (7).

Таким образом, методы второго порядка с постоянной матрицей являются просто модифицированным методом Ньютона с матрицей Якоби первой итерации, хотя обычно в зарубежных публикациях методология использования в итерационном процессе членов второго порядка сопровождается эпитетами типа «второго порядка» [325], «высокого порядка», «точный» [318], [324], «с существенной нелинейностью» [277] и т.д., что может ввести в заблуждение. Фактически, из-за отсутствия итерационных методов решения систем квадратичных уравнений данные методы являются модификациями метода Ньютона, а большинство из них – разновидностями модифицированного метода Ньютона. Но поскольку название «методы второго порядка» довольно широко распространилось, оно здесь оставлено условно. Предложены многие модификации методов второго порядка, и все они, как правило, применяют схему (8) с некоторыми вариациями в представлении матрицы коэффициентов, в использовании постоянных матриц на нескольких итерациях и т.д. Теорема невязок ставит эти методы на надлежащее место.

Рядом авторов предложены также так называемые методы «высокого» порядка, большинство из которых основаны на методе Чебышева [18].

В 1838 году П.Л. Чебышев предложил для отыскания однократного действительного корня уравнения

$$f(x) = 0 \quad (14а)$$

использовать представление функции

$$x = F(z), \quad (14б)$$

обратной к функции

$$z = f(x), \quad (14\text{в})$$

в виде ряда Тейлора в окрестности начального приближения $\hat{z} = f(\hat{x})$

$$F(z) = F(\hat{z}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F^{(j)}(\hat{z})}{j!} (z - \hat{z})^j, \quad (15\text{а})$$

где $F^{(j)}(z) = d^j F(z) / dz^j$. Решению уравнения (14а) соответствует $z=0$ в (14б), подстановка которого в (15а) с учетом (14б) дает

$$x = F(0) = F(\hat{z}) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{F^{(j)}(\hat{z})}{j!} \hat{z}^j. \quad (15\text{б})$$

Ограничившись r членами ряда в (15б) и положив

$$\tilde{x} = F(\hat{z}) + \sum_{j=1}^r (-1)^j \frac{F^{(j)}(\hat{z})}{j!} \hat{z}^j = H_r(\hat{x}), \quad (15\text{в})$$

можно получить итерационный метод r -го порядка:

$$x_{i+1} = H_r(x_i). \quad (15\text{г})$$

Функцию $H_r(x)$ можно найти в явном виде через $f(x)$ и ее производные, т.к. из тождества $x = F(z) = F(f(x))$ следует:

$$F'(z)f'(x) = 1; \quad (16\text{а})$$

$$F''(z)f'^2(x) + F'(z)f''(x) = 0; \quad (16\text{б})$$

$$F'''(z)f'^3(x) + 3F''(z)f'(x)f''(x) + F'(z)f'''(x) = 0; \quad (16\text{в})$$

.....

Непосредственная реализация метода Чебышева для решения системы нелинейных уравнений вызывает определенные трудности, обусловленные многомерностью матриц производных высших порядков и сложностью получаемых выражений. Поэтому в 1978 году А.М. Конторович [93] предложил не находить производные в явном виде, а каждое из последующих членов разложения (15) находить через поправки, полученные в результате учета предыдущих членов. В этом случае, обозначив $\Delta x^{(j)} = F^{(j)}(-\hat{z})^j$ и умножая выражения (16) соответственно на $-\hat{z}$, $(-\hat{z})^2$ и $(-\hat{z})^3$ и т.д., можно получить:

$$\Delta x^{(1)} = -f'(\hat{x})^{-1} f(\hat{x}); \quad (17a)$$

$$\Delta x^{(2)} = -f'(\hat{x})^{-1} f''(\hat{x}) \Delta x^{(1)2}; \quad (17б)$$

$$\Delta x^{(3)} = -f'(\hat{x})^{-1} \left(f'''(\hat{x}) \Delta x^{(1)3} + 3f''(\hat{x}) \Delta x^{(1)} \Delta x^{(2)} \right); \quad (17в)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta x^{(j)} = -f'(\hat{x})^{-1} \psi(\hat{x}, \Delta x^{(1)}, \Delta x^{(2)}, \dots, \Delta x^{(j-1)}); \quad (17г)$$

.....,

и представить решение (15б) в следующем виде

$$x = \hat{x} + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} \Delta x^{(j)}. \quad (17д)$$

В случае системы нелинейных уравнений:

$$Z \equiv \Delta F(X) = 0, \quad (18a)$$

выражения для соответствующих поправок к вектору решения находятся аналогично, дифференцированием выражения (18a) по всем составляющим вектора X . В результате такого подхода могут быть получены следующие выражения:

$$\Delta X^{(1)} = -[J]^{-1} \Delta F(\hat{X}); \quad (18б)$$

$$\Delta X^{(2)} = -[J]^{-1} \Delta X^{(1)T} \left[\partial^2 \Delta F / \partial X^2 \right] \Delta X^{(1)}; \quad (18в)$$

.....

$$\Delta X^{(j)} = -[J]^{-1} \Psi(\hat{X}, \Delta X^{(1)}, \Delta X^{(2)}, \dots, \Delta X^{(j-1)}), \quad (18г)$$

где $[J] = [\partial \Delta F / \partial X]$. Из представленных выражений (18) видно, что структура вектора поправок остается такой же, как в случае одного уравнения [93]. При этом $f'(\hat{x})$ переходит в матрицу Якоби $[J]$, а произведения поправок заменяются аналогичными по смыслу векторными выражениями.

На первый взгляд метод Чебышева, реализующий (17)-(18), выглядит очень привлекательным, т.к. для получения каждой очередной поправки требуется решение только одной системы линейных уравнений:

$$[J]^{-1} \Delta X^{(j)} = -\Psi(\hat{X}, \Delta X^{(1)}, \Delta X^{(2)}, \dots, \Delta X^{(j-1)}) \quad (18д)$$

с одной и той же матрицей Якоби $[J]$, при этом для вычисления правой части (18д) требуются только операции сложения сочетания умножений предыдущих поправок на соответствующие элементы производных, и при учете необходимого числа поправок r можно получить решение с заданной точностью всего за одну итерацию (15г) метода Чебышева. Привлекательность метода Чебышева состоит также в том, что если известно решение системы нелинейных уравнений УР в форме баланса мощностей $\Delta F(X^0, Y^0) = 0$, то решение системы нелинейных уравнений $\Delta F(X, Y^0 + t\Delta Y) = 0$ методом Чебышева представляется в виде степенного ряда:

$$X = X^0 + \sum_{j=1}^r \frac{1}{j!} t^j \Delta X^{(j)}, \quad (18e)$$

где $\Delta X^{(j)}$ - поправки, определяемые согласно (18) для $t=1$, и кривая (18e) является образом отрезка прямой $Y^0 + t\Delta Y$ в пространстве зависимых переменных X .

Согласно [93], «При практической реализации {метода Чебышева} целесообразно от безытерационной схемы перейти к итерационной, ограничившись на каждой итерации определенным числом $r=m$ поправок. Кроме того, можно не учитывать производные функции невязок выше некоторого l -го порядка».

Анализ представленных выражений (17)-(18) показывает, что первая поправка (18б) метода Чебышева совпадает с поправкой, полученной по методу Ньютона. Поэтому итерационная процедура метода Чебышева (15г) с $r=1$ соответствует стандартному методу Ньютона с квадратичной сходимостью. Для $r=2$ вместо касательной прямой строится касательная парабола, имеющая в точке касания первую и вторую производную, совпадающую с соответствующими производными функции $f(x)$ ($\Delta F(X)$), что обеспечивает достижения кубической скорости сходимости [137]. В [93] представлены только общие результаты реализации метода Чебышева, в разложении решения которого ограничились учетом шести поправок ($r=6$) и производными функциями не старше второй ($l=2$), с выбором

корректирующих коэффициентов t для обеспечения сходимости ряда (18e), согласно которым такая модификация метода Чебышева превосходила метод Ньютона по количеству итераций, позволяла получать решение при таких исходных приближениях, в которых метод Ньютона расходится. Несмотря на такое выявленное превосходство метода Чебышева над методом Ньютона, последующие публикации этих авторов по применению метода Чебышева для расчета УР не удалось обнаружить, кроме предложений использования формулы (18e) в тех или иных приложениях, но без представления соответствующих результатов вычислительных экспериментов. Поэтому для оценки вычислительной эффективности метода Чебышева необходимы дальнейшие исследования.

Согласно представленных выше выражений метод Чебышева с $r=1$ соответствует методу Ньютона, т.е. методу касательных, с $r=2$ – методу касательных параболоидов и т.д. Поэтому, чтобы оценить вычислительную эффективность различных модификаций, и в целом, метода Чебышева, начнем с рассмотрения вычислительной эффективности ее безытерационной версии, т.е. выясним, сколько компонент ряда r потребуется, чтобы получить расчет режима с заданной точностью.

Согласно (18), рекуррентные выражения метода Чебышева довольно сложны, так что в компактном аналитическом виде можно представить только поправки не выше второго порядка. Поэтому рассмотрим в качестве примера расчет УР методом Чебышева УР 2-х узловой консервативной ЭС с PV -узлами, когда узел 2 назначен балансирующим. В случае полярных координат расчет режима этой системы соответствует решению уравнения

$$\Delta \bar{P}_1 = \bar{P}_1 - \sin \delta = 0, \quad (19)$$

где $\bar{P}_1 = P_1 / \frac{V_1 V_2}{X}$. Т.к. решение этого уравнения определяется выражением $\delta = \arcsin(\bar{P}_1)$, то члены разложения этой функции в ряд Тейлора определяют соответствующие поправки метода Чебышева. В таблице 2.11 в столбцах, озаглавленных «БЧ», представлено необходимое количество поправок

безытерационной версии метода Чебышева для получения решения (19) при допустимом небалансе мощности 0,001 для ряда задаваемых значений \bar{P}_1 и варьировании начального приближения угла δ_0 .

Таблица 2.11 - Количество компонент/итераций, требуемых безытерационным методом Чебышева/модифицированным и обычным методом Ньютона в полярных координатах

\bar{P}_1	$\delta_0=0^0$			$\delta_0=10^0$			$\delta_0=20^0$			$\delta_0=30^0$		
	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>
0,6	7	4	2	5	3	2	4	3	2	2	2	2
0,7	9	4	3	7	4	3	5	4	2	3	3	2
0,8	13	6	3	10	6	3	8	5	3	6	4	3
0,9	23	9	3	18	9	3	14	8	3	11	7	3

БЧ использует одну и ту же матрицу для получения каждой поправки. Поэтому для выявления его эффективности в таблице 2.11 в столбцах с заглавием “*МН*” представлено количество итераций, требуемых модифицированным методом Ньютона с постоянной матрицей Якоби первой итерации. Для сравнения, в столбцах с заглавием “*NR*” представлено количество итераций, требуемых стандартным методом Ньютона.

Анализ результатов таблицы 2.11 показывает, что модифицированный метод Ньютона существенно превосходит *БЧ*. Возможной причиной этого является то, что согласно (17) и (18) очередная j -я поправка не учитывает производные функции невязок выше $(j-1)$ -порядка, в то время как в модифицированном методе Ньютона при вычислении очередного небаланса мощности в той или иной степени учитываются производные всех порядков. Поэтому кажется вполне вероятным, что *БЧ* покажет лучшие результаты при решении квадратичных УУР в форме баланса мощностей в прямоугольных координатах, для которых производные выше второго порядка тождественно равны нулю.

В этом случае выражения для вычисления поправок в методе Чебышева можно получить в компактной аналитической форме, если записать систему квадратичных уравнений (10) как

$$tR = [J]\Delta U + \Delta U^T [H]\Delta U, \quad (20a)$$

где t - скалярная переменная (параметр), и представить решение (20a) в виде степенного ряда:

$$\Delta U = \sum_{i=1} \delta U^{(i)} t^i. \quad (20б)$$

Подставляя (20б) в (20a),

$$tR = [J] \left(\sum_{i=1} \delta U^{(i)} t^i \right) + \left(\sum_{i=1} \delta U^{(i)} t^i \right)^T [H] \left(\sum_{j=1} \delta U^{(j)} t^j \right), \quad (20в)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра t , можно получить следующие рекуррентные выражения систем линейных уравнений для вычисления компонент ряда (20б):

$$[J]\delta U^{(1)} = R; \quad (21a)$$

.....

$$[J]\delta U^{(i)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\delta U^{(j)T} [H] \delta U^{(i-j)} \right), \quad i \geq 2. \quad (21б)$$

При $t=1$ степенной ряд (20б) соответствует $БЧ$, поэтому решение систем линейных уравнений (21) с одной и той же матрицей $[J]$ определяют соответствующие поправки $БЧ$.

Результаты, представленные в таблице 2.12, показывают, что и такая модификация $БЧ$ значительно уступает модифицированному методу Ньютона в прямоугольных координатах, а значит ранее рассмотренным методам второго порядка.

Интересно отметить, что $БЧ$ не только значительно уступает модифицированному методу Ньютона в скорости сходимости, но также каждая поправка, начиная с третьей, требует больший объем вычислений, чем очередная итерация модифицированного метода Ньютона. Это довольно легко обнаруживается, если проанализировать выражение (21б).

Таблица 2.12 - Количество компонент/итераций, требуемых безитерационным методом Чебышева/модифицированным и обычным методом Ньютона в прямоугольных координатах

\bar{P}_1	$\delta_0=0^0$			$\delta_0=10^0$			$\delta_0=20^0$			$\delta_0=30^0$		
	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>	<i>БЧ</i>	<i>МН</i>	<i>NR</i>
0,6	8	5	3	6	4	3	4	4	3	2	2	2
0,7	10	6	4	8	5	3	6	5	3	4	4	3
0,8	14	7	4	12	7	4	9	6	3	7	5	3
0,9	26	11	4	22	10	4	17	9	4	13	8	3

Для квадратичных уравнений УР объем вычислений каждого слагаемого $\delta U^{(j)T} [H] \delta U^{(i-j)}$ в (21б) соответствует объему вычислений, необходимых для расчета вектора небаланса мощности. Поэтому каждая j -я поправка в методе Чебышева, кроме решения СЛУ, требует вычисления $j-1$ слагаемых в правой части (21б), объем вычислений которых соответствует объему вычислений $j-1$ векторов небалансов. Поэтому каждая очередная поправка требует больший объем вычислений по сравнению с соответствующей итерацией модифицированного метода Ньютона на величину, равной объему вычислений $j-2$ векторов небалансов, а значит, с каждой последующей поправкой дополнительный объем вычислений постоянно возрастает и очень скоро может превысить объем, требуемый итерацией обычного метода Ньютона. Т.к. для расчета очередной поправки требуется все предыдущие поправки, это требует их хранения, а значит, увеличивает объем требуемой памяти.

Таким образом, безытерационный метод Чебышева по числу итераций и объему вычислений значительно уступает модифицированному методу Ньютона. Поэтому методы Чебышева r -го порядка будут вычислительно неэффективными по сравнению с модификацией метода Ньютона, использующей матрицу Якоби предыдущей итерации на $r-1$ последующих.

Представленные методы второго и высокого порядка на каждом шаге решают СЛУ (9), (18) или (21) с неизменной матрицей Якоби $[J]$, т.е.

изменяются только правые части в этих СЛУ. Другим подходом реализации методов второго порядка является корректировка не только правых частей уравнений, но также матрицы СЛУ членами второго порядка, например, следующим образом:

$$\left(\left[\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right] + 0,5(1-\alpha)\Delta X_1^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \right) \Delta X = -\Delta F - 0,5\alpha\Delta X_1^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \Delta X_1, \quad (22)$$

где ΔX_1 – решение СЛУ (3). Такая модификация, реализующая (3) на первой половине итерации и (22) на второй, была предложена в [250] и названа α -модифицированным методом Ньютона квази-второго порядка. Авторами этого метода были проведены исследования его сходимости (т.е. итерационной схемы (22) с (3)) при варьировании α от -2 до $+2$. При этом на второй половине итерации в матрице коэффициентов (22) членами второго порядка корректировались только диагональные элементы. Результаты исследований [250] показывают, что, наименьшее число итераций на тестируемых схемах (в среднем чуть больше половины числа итераций, требуемых обычным методом Ньютона) получалось при $\alpha=0$. Следует отметить, что в этом случае, т.е. когда $\alpha=0$, на второй половине итерации (22) не требуется корректировать правую часть уравнения, поэтому объем вычислений одной итерации только чуть меньше объема вычислений, требуемых двумя итерациями обычного метода Ньютона, т.к. вычисление вектора небаланса составляет только малую часть итерации метода Ньютона. Поэтому такая модификация метода второго порядка не имеет преимуществ перед обычным методом Ньютона. В [16] были также проведены исследования такой модификации с $\alpha=0, 1$ и -1 , но с корректировкой всех элементов матрицы коэффициентов (22) на второй половине итерации. В результате обнаружилось, что наименьшее число итераций достигается при $\alpha=-1$. Но в этом случае для системы квадратичных уравнений итерационная схема (22) с (3) и $\alpha=-1$ в точности соответствует двум итерациям метода Ньютона. Это можно показать, если представить ΔX как $\Delta X_1 + \delta X$ и подставить в (22). В результате при $\alpha=-1$ можно получить

$$\left(\left[\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right] + \Delta X_1^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \right) \delta X = -0,5 \alpha \Delta X_1^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \Delta X_1. \quad (23)$$

В (23) матрица коэффициентов есть в точности матрица Якоби метода Ньютона, полученная после решения (3) и последующей корректировки вектора неизвестных. Согласно теореме невязок правая часть уравнений (23) представляет собой вектор небалансов в начале следующей итерации метода Ньютона. Поэтому система (23) представляет собой очередную итерацию метода Ньютона, а итерационная схема (3) с (22) и $\alpha=-1$ соответствует двум последовательным итерациям обычного метода Ньютона. Поэтому и такая модификация метода второго порядка не имеет никаких преимуществ над обычным методом Ньютона, т.к. объем вычислений на ее итерации превышает вдвое объем итерации метода Ньютона из-за необходимости дважды вычислять вектор небалансов, дважды формировать и триангулировать матрицу коэффициентов и также дважды решать систему линейных уравнений.

Возникает вопрос. Если учет членов второго порядка позволяет уменьшить число итераций, но увеличивает объем вычислений на итерации за счет решения дополнительной СЛУ, как можно непосредственно учесть члены второго порядка без использования этой дополнительной СЛУ. Учет свойств УУР позволяет в некоторой степени решить этот вопрос.

В качестве отправной точки рассмотрим квадратичные УУР в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат. Запишем разложение в ряд Тейлора в точке начального приближения:

$$\Delta F(X^0 + \Delta X) = \Delta F(X^0) + [J]^0 \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T [H] \Delta X \quad (24a)$$

и в точке решения $X^* = X^0 + \Delta X$:

$$\Delta F(X^* - \Delta X) = \Delta F(X^*) - [J]^* \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T [H] \Delta X. \quad (24b)$$

Вычитая (24б) из (24а) и выполнив преобразования, можно получить

$$\frac{[J]^0 + [J]^*}{2} \Delta X = -\Delta F(X^0). \quad (24в)$$

Здесь учтено, что $\Delta F(X^* - \Delta X) = \Delta F(X^0)$, $\Delta F(X^0 + \Delta X) = \Delta F(X^*) = 0$.

Выражение (24в) показывает, что, если известны элементы матрицы Якоби в точке решения, потребуется всего одна итерация для расчета режима. Конечно, заранее все элементы матрицы Якоби в точке решения неизвестны, однако для диагональных элементов выполняются соотношения:

$$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U'_k} = -U_k'^i G_{kk} - I_k^i - U_k^m B_{kk}; \quad \frac{\partial \Delta P_k}{\partial U''_k} = -U_k^m G_{kk} - I_k^m + U_k'^i B_{kk}, \quad (25)$$

где I_k^i , I_k^m – действительная и мнимая части тока в узле, вычисленные на i -ой итерации суммированием токов, протекающих по линиям, отходящих от узла k . Очевидно, в точке решения эти значения должны соответствовать узловым токам.

Предположим, что каким-то образом были получены оценки узловых токов, например, с использованием выражений

$$I_k' = \frac{P_k U_k'^i + Q_k U_k^m}{V_k^{i^2}}; \quad I_k'' = \frac{P_k U_k^m - Q_k U_k'^i}{V_k^{i^2}}, \quad (26)$$

и вместо $I_k'^i$ и $I_k''^i$ в (25) используются выражения

$$I_k'^m = (1 - \gamma) I_k'^i + \mathcal{I}'_k \quad \text{и} \quad I_k''^m = (1 - \gamma) I_k''^i + \mathcal{I}''_k, \quad (27)$$

где $\gamma = [0; 1]$. Введение множителя γ вызвано тем, что оценки известны только приближенно. Для $\gamma = 0$ получается обычный метод Ньютона, $\gamma = 0,5$ – выражение (24в) для диагональных элементов. Чтобы выяснить, какой множитель надо использовать в (27), выполним разложение $I_k = \sum_m Y_{km} U_m$ в ряд Тейлора и подставим в (25). Тогда, умножая скорректированные таким образом соотношения (25) на соответствующие приращения $\Delta U'_k$ и $\Delta U''_k$, можно получить

$$-I_k^i \Delta U'_k - I_k^m \Delta U''_k - (\Delta U_k'^2 + \Delta U_k''^2) G_{kk} - \sum_{m \neq k} [\Delta U'_k (\Delta U'_m G_{km} - \Delta U''_m B_{km}) + \Delta U''_k (\Delta U''_m G_{km} + \Delta U'_m B_{km})],$$

где квадратичные слагаемые в точности соответствует выражениям членов второго порядка в (6). Поэтому в [270] предложено использовать $\gamma = 1$ в (27),

т.е. значения токов в (25) вычислять согласно (26). Для генераторных узлов значение реактивных мощностей неизвестно, поэтому для них берется расчетное значение мощности, что соответствует значению диагональных элементов классического метода Ньютона. Аналогичные результаты получаются для баланса реактивных мощностей. Для диагональных элементов строк, соответствующих уравнениям баланса напряжений PV узлов, можно использовать $V_k + U'_k$ взамен $\partial \mathcal{N}_k^2 / \partial U'_k = 2U'_k$, что также позволяет включить члены второго порядка в линейную модель.

Такой метод формирования диагональных элементов матрицы Якоби был предложен в [270] сначала для модифицированного метода Ньютона, использующего матрицу Якоби гладкого старта, а затем для обычного метода Ньютона. При этом отмечалось, что такие модификации позволили уменьшить число итераций в среднем на 20-35% по сравнению с модифицированным и обычным методом Ньютона, обеспечить более высокую надежность получения решения. Следует отметить что, согласно представленного во втором параграфе главы анализа вычислительных моделей потокораспределения метода Ньютона, результаты такой итерационной процедуры в точности соответствуют результатам вычислительной модели метода Ньютона в форме баланса токов в прямоугольной системе координат (2.2.5).

Подобный подход был также предложен в [269] для уравнений баланса мощности в полярной системе координат, в которых диагональные элементы матрицы Якоби можно представить в виде (2.2.10). Значения мощностей в (2.2.10) можно сформировать аналогично (27):

$$Q_k^m = (1 - \gamma)Q_k^i + \gamma Q_k; \quad P_k^m = (1 - \gamma)P_k^i + \gamma P_k, \quad (28)$$

где $\gamma = [0; 1]$. Чтобы выяснить, какой множитель надо использовать в (28), запишем в полярной системе координат члены второго порядка разложения уравнений баланса активных мощностей в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta \delta_k^2 - \\
& - V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta \delta_k \Delta \delta_m + \\
& + \frac{1}{2} V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta \delta_m^2 + \\
& + \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_k \Delta V_k + \\
& + \sum_{m \in k} V_k (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_k \Delta V_m - \\
& - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_m \Delta V_k - \\
& - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_m \Delta V_m - \\
& - G_{kk} \Delta V_k^2 - \sum_{m \in k} (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta V_k \Delta V_m.
\end{aligned} \tag{29a}$$

Воспользовавшись (2.2.3), выполним разложение P_k и Q_k в ряд Тейлора и учтем в формировании элементов матриц (2.2.10a)-(2.2.10б) только члены первого порядка. После их умножения на приращения $\Delta \delta_k$ и ΔV_k можно получить

$$\begin{aligned}
& P_k^i \Delta \delta_k + \frac{P_k^i}{V_k^i} \Delta V_k + V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta \delta_k^2 - \\
& - V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta \delta_k \Delta \delta_m + \\
& + 2(-B_{kk} V_k + \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km})) \Delta \delta_k \Delta V_k + \\
& + \sum_{m \in k} V_k (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_k \Delta V_m - \\
& - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) \Delta \delta_m \Delta V_k - \\
& - (2G_{kk} + \sum_{m \in k} \frac{V_m}{V_k} (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km})) \Delta V_k^2 - \\
& - \sum_{m \in k} (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \Delta V_k \Delta V_m.
\end{aligned} \tag{29б}$$

Таким образом, использование значений узловых мощностей позволяет напрямую учитывать члены второго и высших порядков в матрице Якоби. Аналогичные результаты получаются для уравнений баланса реактивных мощностей. Следует заметить, что в (29) ряд членов совпадает, а некоторые отличаются множителем 2. Кроме того, в (29б) содержатся элементы,

которые не входят в (29а). Выбор коэффициента γ неоднозначен. Согласно представленного во втором параграфе главы анализа вычислительных моделей потокораспределения метода Ньютона, использование выражений (2.2.10) с (29) и $\gamma=1$ соответствует вычислительной модели метода Ньютона в форме баланса токов в полярной системе координат (2.2.5), а вычислительная модель метода Ньютона в форме баланса м-токов в полярной системе координат (2.2.7) реализует $\gamma=1$ для активных (реактивных) и $\gamma=0$ для реактивных (активных) мощностей в линеаризованных уравнения баланса активных (реактивных) мощностей. В тоже же время, автором [271] было предложено использовать $\gamma=0.5$, утверждая, что при этом увеличивается надежность метода, а число итераций и время расчетов снижаются на 20–30% по сравнению с классическим методом Ньютона.

Для выяснения вычислительной эффективности представленных моделей, «непосредственно» учитывающих члены второго порядка, были проведены вычислительные эксперименты, результаты которых представлены в таблицах 2.13-2.14. Тестировались следующие γ -модификации метода Ньютона квази-второго порядка:

$PU\gamma 1$ - форма баланса мощностей в прямоугольной системе координат (2.2.6) с формированием диагональных элементов по (25)-(27) с $\gamma=1$.

$PU\gamma 1\delta$ - модель $PU\gamma 1$ со второй полярной системой координат.

$PU\gamma 0,5$ - модель $PU\gamma$ с $\gamma=0.5$.

$PU\gamma 0,5\delta$ - модель $PU\gamma\delta$ с $\gamma=0.5$.

$P\delta\gamma 1$ - форма баланса мощностей в полярной системе координат (2.2.7) с формированием диагональных элементов по (2.2.10) с (28) и $\gamma=1$.

$P\delta\gamma 0.5$ - модель $P\delta\gamma$ с $\gamma=0.5$.

Для сравнительного анализа в нижней части таблиц представлены результаты стандартных вычислительных моделей методов Ньютона, рассмотренных во втором параграфе главы.

Таблица 2.13 - Число итераций γ -метода Ньютона квази-второго порядка без учета ограничений реактивной мощности

№ п/п	Модель\ЭС	Мон.	Маг.	195	Сев.Зап	Сибирь	Урал	Волга	Восток	Юг	ЕЭС
Плоский старт											
1	$PU\gamma_1$	3	6	24 ^{**}	6	Р	Р	6	4	Р	Р
2	$PU\gamma_1\delta$	3	Р	7	6	Р	Р	7	4	Р	Р
3	$PU\gamma_{0,5}$	3	5	Р	Р	Р	5	5	Р	Р	Р
4	$PU\gamma_{0,5}\delta$	4	5	5	Р	5	4	4	Р	Р	Р
5	$P\delta\gamma_1$	3	Р	7	6	Р	Р	7	4	Р	Р
6	$P\delta\gamma_{0,5}$	4	5	5	Р	5	4	4	Р	Р	Р
7	PU	Р	7	5	Р	6	5	6	Р	Р	Р
8	IU	3	6	7	5	П*	П*	7	5	19	Р
9	$P\delta$	Р	Р	4	Р	4	4	6	Р	Р	Р
10	$I_M\delta$	3	5	3	3	3	4	3	3	4	4
После 2-х итераций метода Зейделя											
1	$PU\gamma_1$	2	6	18 ^{**}	Р	5	8	4	5	18	Р
2	$PU\gamma_1\delta$	3	Р	Р	Р	5	4	4	5	5	Р
3	$PU\gamma_{0,5}$	3	4	Р	Р	Р	Р	5	Р	7	Р
4	$PU\gamma_{0,5}\delta$	3	4	4	4	Р	10	4	3	4	6
5	$P\delta\gamma_1$	3	Р	Р	Р	5	4	4	5	5	Р
6	$P\delta\gamma_{0,5}$	3	4	4	4	Р	10	4	3	4	6
7	PU	3	7	4	4	Р	5	3	3	5	5
8	IU	2	6	8	Р	П*	П*	6	6	18	Р
9	$P\delta$	3	Р	3	4	Р	4	3	3	4	4
10	$I_M\delta$	3	5	3	3	Р	4	3	3	3	4

Анализ представленных результатов показывает, что вычислительные модели γ -модификаций метода Ньютона квази-второго порядка имеют преимущество над стандартными моделями в форме баланса мощностей только тогда, когда в расчетных схемах замещения отсутствуют PV -узлы - ОЭС Монголии и Магаданэнерго. Но и в таких случаях они не имеют преимуществ над стандартными вычислительными моделями в форме

баланса токов. В случае наличия PV -узлов в ЭС, для которых заранее неизвестна вырабатываемая реактивная мощность, γ -модификации метода Ньютона квази-второго порядка могут, в зависимости от ЭС, как увеличить скорость сходимости и надежность получения решения, так и привести к обратному эффекту.

Таблица 2.14 - Число итераций γ -метода Ньютона квази-второго порядка при учете ограничений реактивной мощности

№ п/п	Модель\ЭС	195	Сев.Зап	Сибирь	Урал	Волга	Восток	Юг	ЕЭС
Гладкий старт									
1	$PU\gamma 1$	33**	9	Р	Р	11	9	Р	Р
2	$PU\gamma 1\delta$	15	9	Р	Р	15	9	Р	Р
3	$PU\gamma 0,5$	Р	Р	Р	27	14	Р	Р	Р
4	$PU\gamma 0,5\delta$	14	Р	16	20	13	Р	Р	Р
5	$P\delta\gamma 1$	15	9	Р	Р	15	9	Р	Р
6	$P\delta\gamma 0,5$	14	Р	16	20	13	Р	Р	Р
7	PU	16	Р	20	23	16	Р	Р	Р
8	IU	14	8	П*	П*	12	9	25	Р
9	$P\delta$	14	Р	14	18	16	Р	Р	Р
10	$I_M\delta$	12	7	12	15	10	7	16	16
После 2-х итераций метода Зейделя									
1	$PU\gamma 1$	Р	Р	18	29	10	10	30	Р
2	$PU\gamma 1\delta$	Р	Р	16	17	11	9	18	Р
3	$PU\gamma 0,5$	Р	Р	Р	Р	14	Р	22	Р
4	$PU\gamma 0,5\delta$	14	9	Р	26	13	Р	18	Р
5	$P\delta\gamma 1$	Р	Р	16	17	11	9	18	Р
6	$P\delta\gamma 0,5$	14	9	Р	26	13	Р	18	Р
7	PU	16	9	Р	22	13	9	21	22
8	IU	15	Р	П*	П*	10	11	25	Р
9	$P\delta$	14	8	Р	18	12	8	17	22
10	$I_M\delta$	12	7	Р	15	9	7	16	16

Таким образом, представленные исследования методов второго и высокого порядка, а также их модификаций, показывают, что эти модели не имеют преимуществ над обычными реализациями метода Ньютона, несмотря на то что обычно в существующих публикациях такая методология сопровождается эпитетами «точный», «высокого порядка», «с существенной нелинейностью», «надежные», «существенно превосходящие метод Ньютона» и т.д. Фактически, из-за отсутствия итерационных методов решения системы квадратичных уравнений, данные методы являются лишь модификациями метода Ньютона.

2.5 Методы Ньютона по параметру

Исследования, представленные в предыдущих параграфах главы, показывают, что вычислительная модель метода Ньютона в форме балансов м-токов в полярной системе координат обладает достаточно хорошими надежностью и скоростью сходимости. Только эта модель смогла рассчитать все тестируемые схемы с «плоского старта», включая тестовую схему ЕЭС России. Однако, согласно результатам вычислительных экспериментов, такая модель не смогла рассчитать режимы тестовой схемы ОЭС «Сибири» при использовании стартового алгоритма с 2-мя итерациями метода Зейделя, хотя, как правило, реализация нескольких итераций метода Зейделя повышает надежность получения решения методом Ньютона. Современная математика пока не дала удобных для практики критериев сходимости метода Ньютона, и в случае расходимости итерационного процесса неясно, вызвано ли это тем, что режим не существует, или начальное приближение было задано недостаточно близким к решению. Методы (продолжения) по параметру позволяют улучшить надежность метода Ньютона [99], [111], [205], [272], [276], [309], [344]. Их можно рассматривать, как попытку расширить область сходимости используемого метода, или иначе, как способ получения достаточно близких начальных приближений [137].

Теоретической основой методов Ньютона по параметру является использование модели наименьших квадратов. Известно, что решение УУР

$$\Delta F(X, Y) = 0, \quad (1)$$

где Y – вектор задаваемых, а X – вектор искомых параметров режима, можно свести к решению задачи нелинейного программирования:

$$\varphi(X, Y) = \Delta F(X, Y)^T \Delta F(X, Y) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Поскольку функционал $\varphi(X, Y)$ есть сумма квадратов невязок, то (2) иногда называют задачей наименьших квадратов.

Основным преимуществом задачи наименьших квадратов является возможность получения решения теоретически в любой ситуации, в том числе при расчете режима, заданные параметры Y которого приводят к несовместности уравнений (1). Это так называемые запредельные режимы. Вопросы идентификации запредельных режимов и нахождение сбалансированного режима, ближайшего, в том или ином смысле, к желаемому, запредельному, возникают в различных областях приложения расчетов УР – при проектировании, когда необходимо получить сбалансированный режим, в противоаварийном управлении и т.д. и т.п. Необходимость решения этих вопросов усиливается отсутствием достаточно простых критериев сходимости методов расчета УР, что не позволяет выявить причину расходимости метода, вызвано ли это отсутствием решения (1), или обусловлено свойствами самого итерационного метода.

При использовании модели наименьших квадратов возможны два качественно различных решения, что следует из анализа необходимых условий достижения минимума (2). Согласно теории нелинейного программирования, таким условием является равенство нулю градиента функции цели:

$$\nabla_x \varphi(X, Y) = 2 [\partial \Delta F(X, Y) / \partial X]^T \Delta F(X, Y) = 0. \quad (3)$$

Выполнение условия (3) возможно при $\Delta F(X, Y) = 0$, что соответствует полученному по (1) сбалансированному УР. Но выполнение условия (3)

возможно и для $\Delta F(X, Y) \neq 0$, когда $\det [\partial \Delta F(X, Y) / \partial X] = 0$. Это говорит о том, что режим является несбалансированным (запредельным), для него система (1) несовместна, а полученные параметры X определяют предельный сбалансированный режим. К сожалению, в последнем случае из-за не выпуклости функции цели (2) нельзя гарантировать, что режим, параметры X которого соответствуют минимуму $\varphi(X, Y)$ с $\Delta F(X, Y) \neq 0$, является ближайшим предельным режимом, и, более того, говорить о том, что в случае получения $\min \varphi(X, Y) \neq 0$ режим с заданными параметрами Y не существует. Однако современный уровень развития теории режимов ЭС и вычислительных методов пока не дает лучшей оценки, поэтому и приходится таковой ограничиваться. При этом для получения более или менее правдоподобной оценки стремятся, если возможно, в качестве исходного приближения X^0 брать параметры существующего решения и переход от исходного к искомому режиму выполнять плавно. Следует отметить, что в функцию цели (2) можно включать сумму квадратов ограничений в виде штрафов, что позволяет с единого подхода рассчитывать режимы с учетом ограничений, накладываемых на ряд параметров режима.

Система нелинейных уравнений (3), дающая необходимые условия минимума функции цели $\varphi(X, Y)$, может быть решена итерационными методами, например, методом Ньютона. Однако на практике это встречает определенные вычислительные трудности, связанные, главным образом, с существенным увеличением нелинейности и ухудшением обусловленности (2) и (3) по сравнению с исходной системой (1). Кроме того, отыскание минимума $\varphi(X, Y)$ гарантировано в зоне ее выпуклости, т.е. положительно определенности матрицы вторых производных $[\partial^2 \varphi(X, Y) / \partial X^2]$. Задание исходного приближения вне этой зоны или на ее границе приводит к неполучению искомого режима [139]. Увеличение размерности сети сужает зону положительной определенности матрицы, и задание исходных приближений становится достаточным сложным. Были проведены

исследования [34] сходимости методов второго порядка, реализующих модель наименьших квадратов (2) для расчета потокораспределения, и оказалось, что такие методы сходятся заметно медленнее при расчетах режима, чем обычный метод Ньютона или по параметру. Поэтому на практике модель наименьших квадратов (2)-(3) используется, как правило, не в качестве основной, а как дополнение к системе (1). Тем самым удается не только сохранить вычислительные характеристики методов расчета УР, но и улучшить их. Одним из подходов, реализующих это, является метод Ньютона по параметру.

Метод Ньютона по параметру реализует важное свойство обычного метода Ньютона для модели (2), и именно то, что на каждой итерации ньютоновское направление ΔX_n , т.е. полученное решением системы линеаризованных уравнений (1):

$$[\partial F / \partial X] \Delta X_n = -\Delta F, \quad (4a)$$

является направлением спуска, т.е. уменьшения функции (2), поскольку

$$\nabla \varphi (X, Y)^T \Delta X_n = -2 \Delta F^T [\partial F / \partial X] [\partial F / \partial X]^{-1} \Delta F = -2 \Delta F^T \Delta F < 0 \quad (4b)$$

всякий раз, когда $\Delta F \neq 0$. Этот факт может показаться удивительным, но геометрически он вполне очевиден. Это свойство является гарантией того, что для достаточно малых шагов вдоль ньютоновского направления значение функции будет уменьшаться, даже когда величина функции (2) при полном ньютоновском шаге в конце итерации будет больше, чем в ее начале. Поэтому в методах Ньютона по параметру значение искомым переменных на $(i+1)$ итерации определяются выражением

$$X^{i+1} = X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}, \quad (5a)$$

где t^{i+1} - скалярная величина (параметр), выбираемая таким образом, чтобы

$$\varphi (X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}) < \varphi (X^i). \quad (5b)$$

Здесь

$$\varphi (X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}) = \Delta F^T (X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}) \Delta F (X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}). \quad (5b)$$

Задача (5) относится к задачам одномерной оптимизации по параметру t (линейный поиск) и может быть решена с использованием различных

методов одномерной оптимизации – равномерного поиска, золотого сечения и т.д. До сих пор еще господствует убеждение, что t следует выбирать исходя из точного решения задачи одномерной минимизации:

$$\varphi(X^i + t^{i+1} \Delta X_n^{i+1}) \rightarrow \min. \quad (6)$$

Более тщательное численное тестирование привело к пересмотру таких взглядов [90]. Общая процедура теперь такова: сначала пробуют сделать полный ньютоновский шаг и, если $t=1$ не удовлетворяет критерию (5б), методично дробят длину шага вдоль ньютоновского направления, пока не выполнится этот критерий. Вычислительный опыт показывает важность выполнения полного ньютоновского шага всякий раз, когда это возможно. Нарушение этого правила приводит к потере преимущества, которое имеет метод Ньютона вблизи решения – квадратичную скорость сходимости.

Среди простейших методов определения параметра t большее распространение при расчете УР получил метод деления пополам, когда на каждой итерации после определения ΔX из решения линеаризованных уравнений УР (4а) проверяют (5б) при $t=1$. Если это требование выполнено, тогда принимают $t=1$ и переходят к следующей итерации. В противном случае параметр t делят пополам до тех пор, пока не выполнится (5б). Таким образом, вектор зависимых переменных X на следующей итерации будет равен $X^{i+1} = X^i + \Delta X_n^{i+1}/2^m$, где m – наименьшее натуральное число, для которого выполняется (5б). Метод деления пополам прост, но требует вычисления вектора невязок в промежуточных точках, число которых заранее неизвестно и может быть значительным при больших ΔX . Поэтому часто параметр t находят, используя аналитические соотношения задачи одномерной минимизации (6).

В случае квадратичных уравнений УР можно использовать нетрудоемкие, но достаточно надежные оценки параметра t , основанные на использовании теоремы невязок [271], векторных и индуцированных матричных норм. Пусть изменение вектора неизвестных ΔX^{i+1} находится

методом Ньютона (4а). Тогда разложение в ряд Тейлора квадратичных уравнений УР (1) в направлении $t \Delta X^{i+1}$ можно представить в виде

$$\Delta F(X^i + t \Delta X^{i+1}) = \Delta F(X^i) + t \left[\frac{\partial \Delta F}{\partial X} \right] \Delta X^{i+1} + \frac{1}{2} t^2 (\Delta X^{i+1})^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \Delta X^{i+1}.$$

Из теоремы невязок известно, что

$$\frac{1}{2} (\Delta X^{i+1})^T \left[\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial X^2} \right] \Delta X^{i+1} = \Delta F(X^i + \Delta X^{i+1}),$$

поэтому разложение квадратичных уравнений в ряд Тейлора с учетом (4а) можно записать как

$$\Delta F(X^i + t \Delta X^{i+1}) = \Delta F(X^i) (1-t) + t^2 \Delta F(X^i + \Delta X^{i+1}).$$

Если воспользоваться понятием нормы и применить ее к обеим частям этого выражения, можно получить для $t \leq 1$

$$\begin{aligned} \|\Delta F(X^i + t \Delta X^{i+1})\| &= \|\Delta F(X^i) (1-t) + t^2 \Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\| \leq \\ &\leq \|\Delta F(X^i)\| (1-t) + t^2 \|\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\|. \end{aligned} \quad (7a)$$

Если потребовать

$$\|\Delta F(X^i + t \Delta X^{i+1})\| \leq \|\Delta F(X^i)\|, \quad (7b)$$

то, согласно (7а),

$$t \leq \frac{\|\Delta F(X^i)\|}{\|\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\|}. \quad (7b)$$

Можно также найти минимум верхнего предела (7а), взяв производную правой части по t и приравняв ее к нулю. Это дает следующую оценку для t :

$$t \leq \frac{1}{2} \frac{\|\Delta F(X^i)\|}{\|\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\|}. \quad (7g)$$

При этом для вектора невязок будет выполняться соотношение

$$\|\Delta F(X^i + t \Delta X^{i+1})\| \leq \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\|\Delta F(X^i)\|}{\|\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\|} \right) \|\Delta F(X^i)\|,$$

что, несомненно, удовлетворяет (5б).

Важно отметить, что в рассмотренных выражениях можно использовать любую векторную норму. Применение эвклидовой нормы позволяет получить более точную оценку параметра t на основе непосредственной минимизации

$$\left\| \Delta F(X^i + t\Delta X^{i+1}) \right\|_2 = \left\| \Delta F(X^i)(1-t) + t^2 \Delta F(X^i + t\Delta X^{i+1}) \right\|_2. \quad (7д)$$

Если ввести обозначения $\Delta F^i = \Delta F(X^i)$; $\Delta F^{i+1} = \Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})$, то тогда квадрат эвклидовой нормы можно представить как

$$\begin{aligned} \varphi = \left\| \Delta F(X^i + t\Delta X^{i+1}) \right\|_2^2 &= \left\| \Delta F^i \right\|_2^2 - 2t \left\| \Delta F^i \right\|_2^2 + t^2 \left(2 \left(\Delta F^{i+1} \right)^T \Delta F^i + \left\| \Delta F^i \right\|_2^2 \right) - \\ &- 2t^3 \left(\Delta F^{i+1} \right)^T \Delta F^i + t^4 \left\| \Delta F^{i+1} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (7е)$$

Оптимальное решение t^* для (7е) может быть найдено, используя условие $\partial \varphi / \partial t = 0$, а именно:

$$g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 = 0, \quad (7ж)$$

где

$$g_0 = -\left\| \Delta F^i \right\|_2^2; \quad g_1 = \left(2\Delta F^{i+1} \right)^T \Delta F^i + \left\| \Delta F^i \right\|_2^2; \quad g_2 = -\left(3\Delta F^{i+1} \right)^T \Delta F^i; \quad g_3 = 2 \left\| \Delta F^{i+1} \right\|_2^2.$$

Выражение (7ж) является кубическим уравнением относительно параметра t . Его решение можно найти по формуле Кардана [105] или с помощью численных методов. В качестве решения принимается наименьший положительный вещественный корень (7ж). Как видно из представленных выражений, определение оптимального t по (7ж) не приводит к существенному увеличению затрат времени на итерации, но позволяет увеличить надежность метода Ньютона.

Для неквадратичных УУР использование (7в)–(7г) не гарантируют выполнения условия (5б). В этом случае требуется их модификация. Для (7в) можно воспользоваться идеологией двоичного поиска для оценки параметра t ($t_0 = 1$):

$$t = \max_k \left(\begin{array}{l} t_k \mid \left\| \Delta F(X^i + t_{k-1} \Delta X^{i+1}) \right\| < \left\| \Delta F(X^i) \right\|; \\ t_k = \min \left\{ 0.5, \left\| \Delta F(X^i) \right\| / \left\| \Delta F(X^i + t_{k-1} \Delta X^{i+1}) \right\| \right\} t_{k-1}. \end{array} \right) \quad (7з)$$

Для (7г) на основе оптимизационной модели можно получить

$$t = \max_k \left(\begin{array}{l} t_k \mid \|\Delta F(X^i + t_{k-1} \Delta X^{i+1})\| < \|\Delta F(X^i)\|; \\ t_k = 0.5 \|\Delta F(X^i)\| / \|\Delta F(X^i + t_{k-1} \Delta X^{i+1})\| t_{k-1}. \end{array} \right) \quad (7и)$$

Следует отметить, что при использовании полярных координат вектор небалансов (1) не является коэрцитивным по норме, поэтому при использовании (7з)-(7и), должна быть задана максимальная допустимая длина шага $\|t\Delta X^{i+1}\|$, так как на практике могут встретиться чрезмерно большие шаги, когда матрица Якоби близка или почти вырождена, например, поворот углов больше четверти периода, Максимальная длина устанавливается для того, чтобы предотвратить выполнение шагов, которые могли бы вывести алгоритм из интересующей области, а также, вызвать переполнение при вычислении вектора небалансов.

Другим подходом является использование квадратичной аппроксимации нелинейных уравнений УР $\Delta F(X^i + t\Delta X^{i+1})$ на основе разложения в ряд Тейлора с отбрасыванием членов выше второго порядка. В этом случае реализация (7в)-(7г) дает

$$t = \|\Delta F(X^i)\| / \left\| 0,5 \sum_{k,m} \frac{\partial^2 \Delta F(X^i)}{\partial X_k \partial X_m} \Delta X_k^{i+1} \Delta X_m^{i+1} \right\|; \quad (7к)$$

$$t = 0.5 \|\Delta F(X^i)\| / \left\| 0,5 \sum_{k,m} \frac{\partial^2 \Delta F(X^i)}{\partial X_k \partial X_m} \Delta X_k^{i+1} \Delta X_m^{i+1} \right\|. \quad (7л)$$

Отметим, что (7к) в точности соответствует методу Матвеева [166]. Аналогичным образом могут быть получены скорректированные выражения для (7ж), в которых вместо ΔF^{i+1} будет $0,5 \Delta X^{i+1T} [\partial^2 \Delta F(X^i) / \partial X^2] \Delta X^{i+1}$.

Альтернативным подходом определения параметра t в случае неквадратичных УУР является реализация алгоритма линейного поиска на основе аппроксимации функции (2), использующей самую последнюю информацию, получаемую в процессе дробления ньютоновского шага. Согласно [90], правила приемлемости шага в линейном поиске, оптимального во всех случаях, не существует, хотя создается впечатление,

что требование (5б) отвечает здравому смыслу. Однако это простое условие не гарантирует сходимость X^i к точке минимума функции (2). В этом случае проблема может состоять в том, что было достигнуто малое убывание значения функции φ по сравнению с длиной шага. Разрешить эту проблему можно, потребовав, чтобы средняя скорость убывания от $\varphi(X^i)$ до $\varphi(X^i + t\Delta X^{i+1})$ составляла долю от первоначальной скорости убывания в этом направлении. То есть, для заданного $\alpha \in (0, 1/2)$ параметр $t \in (0, 1)$ должен удовлетворять неравенству

$$\varphi(X^i + t\Delta X^{i+1}) \leq \varphi(X^i) + \alpha t \nabla \varphi(X^i) \Delta X^{i+1}. \quad (8a)$$

Подстановка (2)-(4) в (8a) дает

$$\|\Delta F^{i+1}\|_2^2 \leq (1 - 2\alpha t) \|\Delta F^i\|_2^2. \quad (8б)$$

На практике α берется довольно малым, едва ли большим, чем требуемая точность решения в о.е. Рекомендуется использовать $\alpha \in (10^{-6}, 10^{-2})$.

В другом случае проблема неполучения минимума функции (2) состоит в том, что шаги слишком малы по сравнению с первоначальной скоростью убывания функции φ . Существуют разнообразные условия, гарантирующие достаточно большие шаги. Простейшим выполнением этого условия является реализация

$$t^j = \beta t^{j-1}, \quad \beta \in (l, u) \quad (9)$$

при j -м дроблении шага, где $0 < l < u < 1$ - заданные пределы.

С учетом сказанного, и определив $\varphi(t) = \varphi(X^i + t\Delta X^{i+1})$ для краткости записи, стратегию дробления шага t , т.е. выбора β , можно представить следующим образом.

Первоначально, т.е. вначале итерации, имеются две порции информации об $\varphi(t)$, а именно:

$$\varphi(0) = \|\Delta F^i\|_2^2 \quad \text{и} \quad \varphi'(0) = d\varphi(t)/dt|_{t=0} = -2\|\Delta F^i\|_2^2. \quad (10a)$$

После решения (4a) и вычисления $\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})$ известно также

$$\varphi(1) = \|\Delta F(X^i + \Delta X^{i+1})\|_2^2. \quad (106)$$

Следовательно, если $\varphi(1)$ не удовлетворяет (8), то $\varphi(t)$ моделируется одномерной квадратичной функцией:

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + (\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0))t^2,$$

удовлетворяющей (10), и вычисляется точка

$$\hat{t} = -0,5\varphi'(0)/(\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)) = \|\Delta F^i\|_2^2 / \left(\|\Delta F^{i+1}\|_2^2 + \|\Delta F^i\|_2^2 \right), \quad (11)$$

для которой $\varphi'_m(\hat{t}) = 0$.

Так как $\varphi''_m(t) = 2(\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)) = 2\left(\|\Delta F^{i+1}\|_2^2 + \|\Delta F^i\|_2^2\right) > 0$, то \hat{t} минимизирует $\varphi_m(t)$. Выражение (11) неявно задает верхнюю границу $u \approx 0.5$ для первого значения β алгоритма (9). Сравнение (11) с (7в) показывает, что величина шага \hat{t} получается меньше, чем в (7в). Если $\varphi(1)$ гораздо больше, чем $\varphi(0)$, то \hat{t} может оказаться очень малым. Одна из причин этого может заключаться в том, что на основе имеющейся информации $\varphi(t)$ плохо моделируется в данной области квадратичной функцией, поэтому в алгоритме устанавливается нижняя граница, например $l=0.1$. Это означает, что если на какой-либо итерации при j -ом дроблении шага было $\hat{t} \leq 0.1t^{j-1}$, то следующее пробное значение $t^j = 0.1t^{j-1}$.

Если снова окажется, что $\varphi(\hat{t}) = \varphi(X^i + \hat{t}X^{i+1})$ не удовлетворяет (8), то необходимо очередное дробление шага. Хотя можно было бы воспользоваться квадратичной моделью, как это делалось при первом дроблении, но теперь имеются 4 порции информации об $\varphi(t)$, поэтому лучше воспользоваться кубической моделью:

$$\varphi_c(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + at^2 + bt^3, \quad (12a)$$

в которой коэффициенты a и b определяются так, чтобы кубическая функция (12a) в точности соответствовала $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, и значениям функции $\varphi(t)$ для последних двух из предыдущих значений t . Причина использования кубической модели состоит в том, что она может более точно моделировать

ситуации, в которых $\varphi(t)$ имеет отрицательную кривизну, что весьма возможно, когда (8) не выполнялось для двух положительных значений t . Кроме того [90], такая кубическая функция имеет единственный локальный минимум:

$$\hat{t} = \left(-b + \sqrt{b^2 - 3a\varphi'(0)} \right) / 3a. \quad (12б)$$

После вычисления (12б), следующее пробное значение t определяется согласно (9). Такое дробление шага, реализующее (12) с (9), повторяется до тех пор, пока не будет выполнено (8), или $\|t^j \Delta X^{i+1}\|$ окажется меньше, чем заданная точность решения. В последнем случае это предотвращает заикливание линейного поиска и выявляет сходимость итерационного процесса к точке на поверхности вырожденности матрицы Якоби, т.е. обнаружение предельного режима.

Следует отметить, что рядом авторов, например, [99], [165]-[167], [307]-[308], предложены и исследованы несколько модификаций методов Ньютона по параметру. Однако такие публикации, как правило, ограничиваются рассмотрением решения квадратичных УУР в форме баланса мощностей в прямоугольных координатах с использованием только евклидовой нормы для нахождения параметра t .

Для сравнительного анализа вычислительной эффективности рассмотренных подходов определения параметра t , в таблице 2.15 представлены результаты вычислительных экспериментов реализации метода Ньютона по параметру $I_M \delta$, $P \delta$ и PU -моделей с гладким стартом на тестовых схемах с плохо обусловленной матрицей Якоби, которые использовались [165]-[167] для сравнительного анализа существующих и предлагаемых методов Ньютона по параметру.

В таблице 2.15 символ «=1» соответствует обычной реализации метода, «LS» - линейному поиску, «SO» - использование членов второго порядка, номер в круглых скобках - номер формулы определения параметра t с соответствующей нормой, «Пр» - получен УР на гиперповерхности ПР.

Таблица 2.15 - Число итераций метода Ньютона по параметру

Модель	t	ЭС					
		5_4	14_14	14_19	19_27	22_22	25_46
$I_{M\delta}$	=1	5~0	P	P	3~0	3~0	P
	$\ (7з)\ _1$	5~0	7~0	6~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7з)\ _2$	5~0	8~0	6~0	3~0	3~0	14~0
	$\ (7з)\ _\infty$	5~0	7~0	7~0	3~0	3~0	17~3
	$\ (7и)\ _1$	5~0	8~0	7~0	3~0	3~0	12~0
	$\ (7и)\ _2$	5~0	8~0	6~0	3~0	3~0	14~0
	$\ (7и)\ _\infty$	5~0	7~0	7~0	3~0	3~0	13~0
	LS	5~0	8~0	7~0	3~0	3~0	12~0
	$\ (7к)\ _1$	5~0	8~0	6~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7к)\ _2$	5~0	7~0	7~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7к)\ _\infty$	5~0	7~0	7~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7л)\ _1$	5~0	8~0	8~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7л)\ _2$	5~0	8~0	8~0	3~0	3~0	11~0
	$\ (7л)\ _\infty$	5~0	9~0	9~0	3~0	3~0	12~0
	(7ж) с SO	5~0	8~0	8~0	3~0	3~0	10~0
$P\delta$	=1	P	P	P	4~0	3~0	P
	$\ (7з)\ _1$	13~1	Пр~2	Пр~9	4~0	3~0	>40
	$\ (7з)\ _2$	8~1	Пр~2	Пр~9	4~0	3~0	Пр~13
	$\ (7з)\ _\infty$	10~1	Пр~2	10~1	4~0	3~0	13~1
	$\ (7и)\ _1$	9~1	Пр~2	Пр~11	4~0	3~0	15~1
	$\ (7и)\ _2$	10~1	7~1	Пр~9	4~0	3~0	10~1
	$\ (7и)\ _\infty$	11~1	7~1	7~1	4~0	3~0	11~1
	LS	9~1	7~1	Пр~11	4~0	3~0	>40
	$\ (7к)\ _1$	8~1	9~1	9~1	4~0	3~0	>40
	$\ (7к)\ _2$	9~1	8~1	10~1	4~0	3~0	Пр~6
	$\ (7к)\ _\infty$	9~1	Пр~2	9~1	4~0	3~0	>40
	$\ (7л)\ _1$	9~1	8~1	7~1	4~0	3~0	11~1
	$\ (7л)\ _2$	8~1	8~1	7~1	4~0	3~0	9~1
	$\ (7л)\ _\infty$	8~1	7~1	7~1	4~0	3~0	12~1
	(7ж) с SO	8~1	7~1	9~1	4~0	3~0	Пр~6
PU	=1	14~1	5~1	10~1	4~0	4~0	16~1
	$\ (7в)\ _1$	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~6
	$\ (7в)\ _2$	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~0
	$\ (7в)\ _\infty$	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~5
	$\ (7г)\ _1$	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~6
	$\ (7г)\ _2$	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	11~1
	$\ (7г)\ _\infty$	6~1	5~1	6~1	4~0	4~0	11~1
	LS	7~1	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~5
	(7ж)	Пр~2	5~1	6~1	4~0	4~0	Пр~4

Число перед символом “~” – количество требуемых итераций для получения решения с точностью 0.1 МВт/МВар, после символа “~” - количество ведущих микроматриц (ВМ) с отрицательным определителем (ВМО) треугольного разложения матрицы Якоби в точке полученного решения.

Первое число в обозначении тестовых схем соответствует количеству узлов, второе – количеству ветвей схемы.

Как видно из таблицы 2.15, метод по параметру заметно улучшил надежность $I_{M\delta}$ -модели, при этом эффективность модификаций метода по параметру примерно одинакова. В тоже самое время, только ряд модификаций метода по параметру смогли улучшить надежность $P\delta$ и PU -моделей, а другие привели к скатыванию итерационного процесса к точке на гиперповерхности вырожденности матрицы Якоби, т.е. ГПР, хотя искомое решение существует. Интересно, что к такому результату может привести как линейный поиск, так и оптимальный шаг, полученный из (7ж).

Поэтому использование метода по параметру может не гарантировать получение решения во всех случаях, когда решение существует. Одним из выходов из затруднения является использование условий теоремы о существовании неявной функции и следствий теорем о сходимости метода Ньютона [101]. Однако, напрямую использовать условия теорем о сходимости, чтобы выяснить, будет ли метод Ньютона сходиться из некоторого начального приближения, и выбрать параметр t , довольно затруднительно, так как одно из условий включает константу Липшица, для тщательной оценки которой требуется больше труда, чем для того, чтобы просто попробовать метод Ньютона и посмотреть, сходится он или нет [90]. Вместе с тем использование условий и следствий теорем о сходимости позволяет получить довольно интересные соотношения. Так, например, в [239] анализ теорем о сходимости (метода Ньютона) Конторовича и Mysovskikh позволил предложить следующие критерии проверки сходимости метода Ньютона:

$$\Theta_1 = h_{1_{i+1}}/h_{1_i} \leq 0,5h_{1_i} < 1, \text{ где } h_{1_i} = \omega_1 \|\Delta X^i\|, \text{ или} \quad (13a)$$

$$\Theta_2 = h_{2_{i+1}}/h_{2_i} \leq \frac{1}{2}h_{2_i} < 1, \text{ где } h_{2_i} = \omega_2 \|\Delta F^i\|. \quad (13b)$$

Здесь ω_1 и ω_2 - константы Липшица, фигурирующие в соответствующих теоремах.

В случае, если на какой-то итерации критерий сходимости (13а)/(13б) не выполняется, то обычный метод Ньютона классифицируется как «расходящийся» и реализуется процедура выбора параметра t для удовлетворения используемого критерия. Константу Липшица ω_1/ω_2 предложено оценивать на основе накопленной информации предыдущих итераций. Однако такую процедуру довольно трудно применить при расчете УР, т.к. изменение типа узлов приводит к изменению структуры системы нелинейных уравнений, а, следовательно, к полному обесцениванию информации, накопленной на предыдущих итерациях для оценки константы Липшица.

На основе (13) могут быть получены более «слабые» критерии проверки сходимости метода Ньютона, если ограничиться только строгими неравенствами:

$$\Theta_{1_i} = \|\Delta X^{i+1}\| / \|\Delta X^i\| < 1, \quad \text{или} \quad (14a)$$

$$\Theta_{2_i} = \|\Delta F^{i+1}\| / \|\Delta F^i\| < 1. \quad (14б)$$

Большинство модификаций метода Ньютона по параметру, в том числе рассмотренных выше, используют критерий (14б) и игнорируют (14а). Одним из способов учета критерия (14а) в методах по параметру является применение идеологии доверительных областей, простейшей реализацией которой является ограничение изменений значений переменных на итерации до определенной величины. В таблице 2.16 представлены результаты вычислительных экспериментов, когда на каждой итерации перед определением параметра t вектор ΔX^{i+1} , в случае необходимости, масштабировался так, чтобы максимальное изменение угла по линии не превышало 30° и максимальное снижение напряжения в узлах не превышало 20%.

Сравнение результатов, представленных в таблицах 2.15 и 2.16, показывает, что такое простое ограничение изменения переменных на итерации позволило увеличить надежность и сходимость как обычного

метода Ньютона, так и по параметру. При этом удалось исключить случаи скатывания итерационного процесса метода по параметру к точкам на гиперповерхности вырожденности матрицы Якоби.

Таблица 2.16 - Число итераций метода Ньютона по параметру с ограничением изменений переменных на итерации

Модель	t	ЭС					
		5_4	14_14	14_19	19_27	22_22	25_46
<i>I_{Mδ}</i>	=1	10~0	12~0	31~0	3~0	3~0	>40
	(7з) ₁	6~0	12~0	8~0	3~0	3~0	10~0
	(7з) ₂	6~0	9~0	8~0	3~0	3~0	10~0
	(7з) _∞	6~0	11~0	8~0	3~0	3~0	10~0
	(7и) ₁	5~0	13~0	8~0	3~0	3~0	>40
	(7и) ₂	5~0	10~0	8~0	3~0	3~0	12~0
	(7и) _∞	5~0	9~0	8~0	3~0	3~0	10~0
	LS	5~0	10~0	9~0	3~0	3~0	12~0
	(7к) ₁	6~0	12~0	10~0	3~0	3~0	11~0
	(7к) ₂	6~0	11~0	10~0	3~0	3~0	13~0
	(7к) _∞	5~0	10~0	9~0	3~0	3~0	11~0
	(7л) ₁	5~0	12~0	9~0	3~0	3~0	12~0
	(7л) ₂	5~0	11~0	9~0	3~0	3~0	11~0
	(7л) _∞	5~0	12~0	9~0	3~0	3~0	11~0
	(7ж) с SO	5~0	10~0	9~0	3~0	3~0	12~0
<i>Pδ</i>	=1	9~1	9~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7з) ₁	8~1	7~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7з) ₂	8~1	7~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7з) _∞	8~1	7~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7и) ₁	9~1	7~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7и) ₂	9~1	8~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7и) _∞	9~1	8~1	9~1	4~0	3~0	10~2
	LS	9~1	8~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7к) ₁	8~1	9~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7к) ₂	9~1	9~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7к) _∞	9~1	9~1	7~1	4~0	3~0	10~2
	(7л) ₁	9~1	9~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7л) ₂	8~1	9~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7л) _∞	9~1	9~1	8~1	4~0	3~0	10~2
	(7ж) с SO	8~1	9~1	7~1	4~0	3~0	10~2
<i>PU</i>	=1	14~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7в) ₁	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7в) ₂	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7в) _∞	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7г) ₁	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7г) ₂	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7г) _∞	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	11~2
	LS	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2
	(7ж)	7~1	6~1	7~1	4~0	4~0	10~2

Как уже отмечалось, для тестирования метода Ньютона по параметру использовались тестовые схемы [165], матрицы Якоби которых, согласно утверждению цитируемого источника, являются плохо обусловленными. Однако результаты, представленные в таблицах 2.15 и 2.16, для 19_27 и 22_22 тестовых схем такое не подтверждают. На этих схемах все тестируемые методы давали совпадающие решения, причем не более чем за 4 итерации, критерии сходимости (14) выполнялись на всех итерациях для $t=1$, т.е. не были задействованы процедуры выбора другого значения параметра t .

Для других тестовых систем $I_{M\delta}$ и $P\delta/PU$ -модели сошлись к разным решениям, причем $P\delta/PU$ -модели давали одинаковые решения с одной или двумя ВМО, в отличие от $I_{M\delta}$ -модели. Заметим, что схемы замещения этих систем не имеют ни одного PV -узла, и все узлы, кроме БУ, являются PQ -узлами. Поэтому без привлечения дополнительного анализа трудно определить, является ли решение с одной или несколькими ВМО статически устойчивым. Кроме того, для таких схем замещения могут получиться близкие решения, но с разным количеством ВМО, которые могут быть все статически устойчивыми, а в других случаях – только некоторые из них. Другими словами, при отсутствии PV -узлов проявляется известная проблема существования множества соседних решений. Возникает необходимость отсеивания не отвечающих эксплуатационным условиям режимов при плохой обусловленности вычислительных моделей. Расчет УР представляет собой нелинейное отображение заданных мощностей (P, Q) на неизвестные напряжения (U) , при этом для заданных исходных данных число решений в общем случае может меняться от нуля до довольно большого количества (для каждого PQ -узла по два). На рис. 2.2 кривая PV соответствует моделированию генераторных узлов PV -типом и получаемое решение расположено достаточно далеко от предела по существованию.

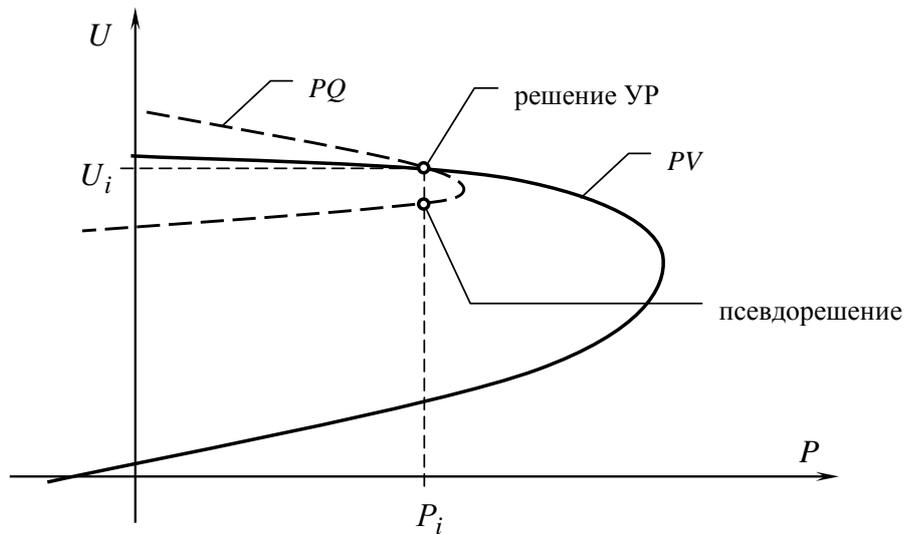


Рисунок 2.2 - PV - кривые

Побочные решения находятся «далеко» от исходного и имеют низкий уровень напряжения. Электрической системе без PV узлов соответствует кривая PQ – здесь решение близко к пределу по существованию и возникает несколько (в зависимости от ситуации и объема сети) псевдорешений, очень близких к настоящему. Более того, небольшие изменения исходных данных приводят к существенному изменению результата. Представленные в таблицах 2.15-2.15 тестируемые схемы не имеют PV -узлов, что характерно для распределительных и питающих сетей. Моделирование генераторных узлов PQ -типом используется также в вычислительных моделях оптимизации. Но в задачах оптимизации очень трудно, если вообще возможно, получить решением статический аperiодический неустойчивый режим, т.к. он имеет существенно худшие экономические и технические показатели по сравнению с эксплуатационными. Рассчитываемый режим должен отвечать эксплуатационным условиям. Генераторы оснащаются системами АРВ, которые поддерживают заданный уровень напряжения. Учет этого, т.е. использование PV -узлов, позволяет обеспечить однозначность получения решения [130]. Дополнительный анализ результатов вычислительных экспериментов, представленных в предыдущих параграфах главы, показал, что на всех рассмотренных тестовых схемах все ранее

тестируемые методы, в случае успешного расчета режима, давали совпадающие решения, причем во всех случаях в точках полученных решений определители всех ведущих микроматриц (ВМ) треугольного разложения матрицы Якоби были положительными. Если при гладком старте в треугольном разложении матрицы Якоби тестируемого метода имелись ВМО, т.е. ВМ с отрицательным определителем, тогда метод расходился и не мог рассчитать режим.

Необходимость отсутствия ВМО в статически апериодически устойчивом УР ЭС можно объяснить следующим образом. Если матрицу Якоби формировать в виде микроматриц, как представлено в Приложении Б, тогда прямой ход Гаусса можно рассматривать как поузловое эквивалентирование. И если на каком-то шаге прямого исключения Гаусса окажется, что определитель такой диагональной микроматрицы, т.е. ВМ, окажется отрицательным, то это означает, что УР части ЭС, «эквивалентированной» до этого узла, находится на нисходящей ветви V -образной характеристике. В большинстве теорем о сходимости метода Ньютона одним из основных условий является требование, чтобы определитель матрицы Якоби в итерационном процессе решения не менял знак. Т.е. если в точке начального приближения имеются ВМО, то самое лучшее, что может сделать метод – это получить решение, в котором число ВМО соответствует гладкому старту. Если в точке начального приближения имеются ВМО, тогда метод Ньютона по параметру не способен получить решение, в котором определители всех ВМ будут положительными. Как пример, рассмотрим результаты, представленные в таблице 2.15. Для тестовых схем 19_27 и 22_22 при гладком старте все модели не имеют ВМО, поэтому все методы дали совпадающие решения. В противоположность этому, для других схем при гладком старте PU и $P\delta$ -модели имели по одной ВМО, соответственно они не смогли получить решение, в котором определители всех ВМ были бы положительными, в отличие от $I_M\delta$ -модели, для которой при гладком старте все определители ВМ были положительными.

Метод по параметру может только помочь получить решение, число ВМО которого соответствует гладкому старту. Но как видно из таблицы 2.16, для схем 25_46 он не помог предотвратить получение PU и $P\delta$ -моделями решения с большим числом ВМО, чем при гладком старте. Это можно было избежать, если для этой ЭС на итерациях использовать ограничение $\min \Delta V_k / V_k \geq -0.1$ вместо $\min \Delta V_k / V_k \geq -0.2$.

Анализ выражений для PU -и $P\delta$ -моделей, представленных в параграфе 2.2, показывает, что число положительных и отрицательных ведущих элементов треугольного разложения их матриц Якоби будет совпадать, если при формировании этих матриц использовать те же самые величины комплексов напряжений. Как следствие, с гладкого старта PU и $P\delta$ -модели из-за ВМО не смогли рассчитать режимы одних и тех же 4-х систем, представленных в таблице 2.4. Применение методов по параметру для этих моделей так же не позволило рассчитать режим этих систем с гладкого старта. Одним из способов устранения ВМО в точке начального приближения является использование стартового алгоритма, например, несколько итераций метода Зейделя. Реализация двух итераций метода Зейделя позволила рассчитать PU и $P\delta$ -моделями режимы всех этих 4-х систем, т.к. после двух итераций метода Зейделя определители всех ВМ этих моделей стали положительными.

Однако метод Зейделя не гарантирует получение начального приближения без ВМО во всех случаях. Так, например, для систем, представленных в таблице 2.15 и 2.16, он обеспечил это только для схем 5_4, 19_27, 22_22. Более того, итерации метода Зейделя могут не только ухудшить начальное приближение, но даже привести к появлению новых ВМО, как, например, для ОЭС Сибири, результаты для которой представлены в таблице 2.5. Согласно таблице 2.4 с гладкого старта режим этой системы считали, как $I_{M\delta}$, так PU и $P\delta$ -модели. Однако 2 итерации метода Зейделя ухудшили начальное приближение, т.к. матрица узловых проводимостей этой системы имеет несколько отрицательных собственных

реактивных проводимостей. В $I_M\delta$ -модели ВМО не появились, однако начальное приближение стало значительно хуже, поэтому напряжения в ряде узлов существенно снизились на первой же итерации, что привело к расходимости итерационного процесса. Однако в этом случае применение метода по параметру позволило рассчитать режим за 4 итерации. В случае PU и $P\delta$ -моделей эти 2 итерации поспособствовали появлению ВМО, что привело к расходимости метода Ньютона, причем активизация методов по параметру не помогла получить решение.

В [165]- [167] утверждается, что метод простой итерации (Якоби) и метод Z -матрицы всегда стремятся к решению с положительными ведущими элементами. Однако это, скорей всего, возможно для схем замещения без PV -узлов. Согласно таблице 2.4, метод Z -матрицы смог рассчитать только две тестовые схемы. Хотя он начинал расходиться после некоторого числа итераций, использование результатов одной или нескольких итераций метода Z -матрицы в качестве стартового алгоритма не позволило рассчитать режим этих систем ни одной модификацией метода Ньютона, представленных в таблице 2.4. Поэтому, метод Z -матрицы не может быть рекомендован как стартовый алгоритм при расчете УР реальных ЭС. Метод Якоби имеет недостатки, аналогичные методу Зейделя.

Одним из возможных подходов, способствующих получению решения без ВМО, является адаптивная корректировка диагональных элементов матрицы Якоби в процессе треугольного разложения так, чтобы определители всех VM были положительными. Простейшим способом реализации такой стратегии является проверка определителя очередной VM и в случае его отрицательности, увеличение диагональных элементов этой микроматрицы на такую величину, чтобы ее определитель стал положительным, например, равным абсолютному значению исходной величины. Применение такой стратегии позволило PU и $P\delta$ -моделям получить решение без ВМО для всех систем, представленных в таблице 2.16. При этом дополнительно потребовалось ограничить максимальное

увеличение напряжения на итерации. Такая стратегия с применением метода по параметру и ограничением изменения переменных на итерации также позволила этим моделям рассчитать УР всех систем, представленных в таблицах 2.4 - 2.6, как с гладкого старта, так и после 2-х итераций метода Зейделя. Исключение составила ЕЭС. Используя эту стратегию, PU и $P\delta$ -моделям не удалось рассчитать ее режим с гладкого старта.

Поэтому с учетом выше сказанного особого внимания заслуживает $I_M\delta$ -модель. Оказалось, что для всех тестовых ЭС, результаты которых представлены в данной работе, а также для всех других реальных ЭС, которые встречал автор в своей научной и практической деятельности, всегда в точке гладкого старта определители всех ВМ $I_M\delta$ -модели были положительными. Это кажется удивительным, но это действительно так. Чтобы выяснить возможную причину этого, рассмотрим и сравним выражения для элементов матрицы Якоби $I_M\delta$ и, например, $P\delta$ -модели, представленных в параграфе 2.2. Если умножить каждое k -е линеаризованное уравнение баланса активного и реактивного м-тока $I_M\delta$ -модели на V_k , тогда, очевидно, решение системы линеаризованных уравнений не изменится, в тоже самое время, правая часть и элементы матрицы, полученной таким образом СЛУ, будут в точности соответствовать правой части и элементам матрицы Якоби $P\delta$ -модели, за исключением только двух элементов диагональных микроматриц.

Для $P\delta$ - модели диагональная микроматрица имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) & -2V_k G_{kk} - \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) \\ \hline -V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) & 2V_k B_{kk} + \sum_{m \in k} V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}) \end{array} \right], (15a)$$

в то время как для полученной $I_M\delta$ -модели

$$\left[\begin{array}{c|c} V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) & -V_k G_{kk} - P_k / V_k \\ \hline -V_k \sum_{m \in k} V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) & V_k B_{kk} - Q_k / V_k \end{array} \right]. (15б)$$

Сравнение (15) показывает, что эти микроматрицы будут совпадать только в точке решения, когда небалансы мощности равны нулю. При

гладком старте и на итерациях они будут отличаться элементами производных по модулю напряжения.

Микроматрицу (15a) можно представить также в виде

$$[J]_{kk} = \left[\begin{array}{c|c} V_k^2 B_{kk} + Q_k - \Delta Q_k & -V_k G_{kk} - P_k/V_k + \Delta P_k/V_k \\ \hline V_k^2 G_{kk} - P_k + \Delta P_k & V_k B_{kk} - Q_k/V_k + \Delta Q_k/V_k \end{array} \right], \quad (16a)$$

где ΔP_k и ΔQ_k – соответственно небаланс активной и реактивной мощности в k -ом узле в начале итерации, и ее определитель будет равен

$$\det[J]_{kk} = \left((V_k^2 B_{kk})^2 + (V_k^2 G_{kk})^2 - (Q_k - \Delta Q_k)^2 - (P_k - \Delta P_k)^2 \right) / V_k. \quad (16b)$$

Поэтому отрицательное значение этого определителя может появиться только при больших небалансах мощности в начале итерации, по величине превышающие первые два слагаемые.

При гладком старте, углы всех узлов задаются одинаковыми, обычно равные нулю, и микроматрицы (15) будут иметь вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} -V_k \sum_{m \in k} V_m B_{km} & -2V_k G_{kk} - \sum_{m \in k} V_m G_{km} \\ \hline -V_k \sum_{m \in k} V_m G_{km} & 2V_k B_{kk} + \sum_{m \in k} V_m B_{km} \end{array} \right]; \quad (17a)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -V_k \sum_{m \in k} V_m B_{km} & -V_k G_{kk} - P_k/V_k \\ \hline -V_k \sum_{m \in k} V_m G_{km} & V_k B_{kk} - Q_k/V_k \end{array} \right]. \quad (17b)$$

Хотя при гладком старте модули напряжения обычно принимаются равными номинальным значениям, задаваемым пользователем, в выражении (17) нельзя использовать соотношения $V_k = V_m$ и $Y_{kk} = -(\sum Y_{km} + \sum Y_{km}^{sh})$ для упрощения этих выражений, даже при использовании о.е. - из-за наличия в схемах замещения трансформаторов с ненормальными коэффициентами трансформации.

Возможной причиной появления отрицательной величины определителя микроматрицы (17a) могут быть случаи, когда знаки ее диагональных элементов не совпадают, или совпадают знаки внедиагональных элементов, или их сочетание. Результаты вычислительных экспериментов показали, что для всех тестируемых схем появление отрицательных значений

определителей микроматриц (17а) при гладком старте обуславливалось разными знаками диагональных элементов. Возможной причиной этого может быть то, что в микроматрице (17а), в отличие от (17б), слагаемое с собственной реактивной проводимостью имеет множитель 2, следовательно, шунтовые емкостные проводимости оказывают в два раза больший эффект на значение этого элемента, чем в (17б). Кроме того, наличие трансформаторов с неноминальными коэффициентами трансформации может привести к дополнительному уменьшению значения второго слагаемого в этом элементе, в то время как неуравновешенность коэффициентов трансформации напрямую не влияет на значение такого элемента в (17б). Также неуравновешенные коэффициенты трансформации могут быть причиной уменьшения недиагонального элемента производной по модулю напряжения за счет второго его слагаемого, в отличие от (17б).

Поскольку представленная вычислительная $I_{M\delta}$ -модель отличается $P\delta$ -модели только двумя элементами в диагональных микроматрицах матрицы Якоби, а все остальные расчетные выражения одинаковые, эту модель можно легко реализовать в существующих программах расчета УР, использующих $P\delta$ -модель. Однако следует учесть, что при активизации метода по параметру для определения шага t необходимо использовать выражения небалансов м-токов или их вторых производных, так как хотя расчетные выражения такой модели масштабированы в единицы мощности, но такая модель все равно остается м-токовой моделью. Например, если эту масштабированную модель применить к схемам, представленных в таблицах 2.15 и 2.16, для которых $P\delta$ -модель давала решение с ВМО, то метод по параметру с использованием выражений небалансов мощности или их вторых производных для определения параметра t блокировал возможность получить решение $I_{M\delta}$ -моделью, не позволяя ей выйти из области, в которой некоторые определители ВМ треугольного разложения $P\delta$ -модели были отрицательные, хотя масштабированная токовая модель не имела отрицательных ведущих элементов и давала правильное направление. В этом

направлении уменьшались только небалансы м-токов, однако росли небалансы мощности. Поэтому метод по параметру зависал, т.е. делал очень маленькие шаги, даже не дойдя до точки на гиперповерхности вырожденности матрицы Якоби.

В работах [165]-[167] предложены также другие методы по параметру, в которых минимизация евклидовой нормы небалансов УУР (2) производится не по одному ньютоновскому направлению ΔX_H , а в плоскости или пространстве, содержащих ΔX_H , т.е. так называемые двухпараметрические или многопараметрические методы. Причем, как правило, в качестве УУР используются уравнения в форме баланса мощностей в прямоугольной системе координат, т.е. квадратичные уравнения. Однако результаты вычислительных экспериментов, представленные в этих работах, показывают, что такие методы по параметру также не гарантируют получение решения, в котором определители всех ВМ треугольного разложения матрицы Якоби положительные. Поэтому проблема задания начального приближения также характерна для таких методов. В цитируемых работах для получения начальных приближений предложено использовать так называемый метод диагональной релаксации. Однако представленными выражениями этого метода можно воспользоваться только для схем замещения без PV узлов. Кроме того, как следует из представленных в этих работах результатов вычислительных экспериментов, его применение не гарантирует получение решения, в котором определители всех ВМ положительны.

2.6 Учет действия регуляторов возбуждения синхронных генераторов при расчетах установившихся режимов электрических систем

Вопрос учета PV узлов является важным аспектом расчета потокораспределения, который существенно сказывается на быстродействии и надежности получения решения. У каждого генератора, оснащенного системой АРВ, есть пределы возможного изменения реактивной мощности, в которых он может поддерживать заданный модуль напряжения, и выход из

этого диапазона или, наоборот, заход в него влечет за собой смену типа узла и, следовательно, переформирование УУР [44], [117], [118]. Такая смена сильно сказывается на расчете и в некоторых случаях из-за неудачной смены типа узла или других действий, можно не получить решение [218], или потребуется слишком большое число итераций [299], или будет получено некорректное, «фальшивое» решение [280].

При расчете УР генераторы с АРВ обычно моделируются кусочно-линейной характеристикой зависимости мощности генератора Q_G от модуля напряжения на его шинах V , как показано на рис. 2.3.б. В этом случае не учитываются астатизм регулятора, а также зависимость предельных реактивных мощностей от напряжения генератора. Более точное моделирование, необходимое для расчетов предельных режимов, можно выполнить путем замены характеристики с рис. 2.3.б на характеристику, показанную на рис. 2.3.а, или аналитического задания характеристики $Q_G = f(V_G)$.

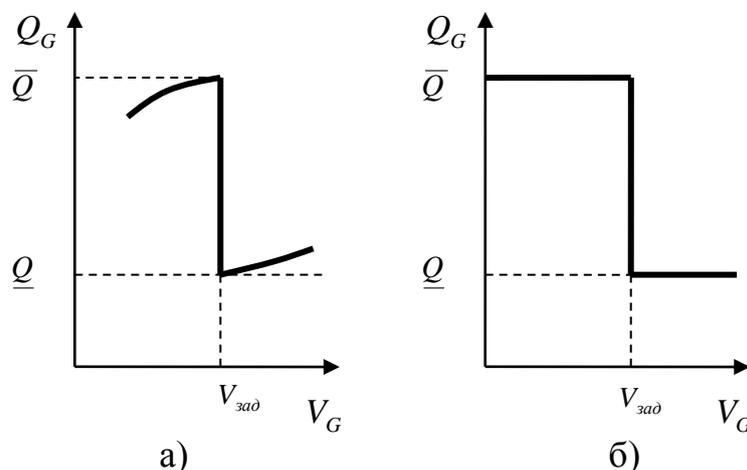


Рисунок 2.3 - Характеристика генератора с системой АРВ:
(а) – реальная; (б) – принимаемая при расчете режимов

Для определения параметров работы генератора необходимо иметь внешнюю характеристику реактивной мощности системы, показывающую изменение реактивной мощности в зависимости от напряжения на шинах генератора $Q_s = f_s(V_G)$. Для сложных энергосистем внешняя характеристика

может быть построена посредством выполнения многократных расчетов УР с различными значениями напряжения генератора. Однако в принципе такую характеристику строить не надо, поскольку она является одним из результатов решения УУР. При расчетах УР важен лишь наклон внешней характеристики. Для большинства режимов $\partial Q_S / \partial V_G > 0$, и характеристика имеет вид, показанный на рис. 2.4.а–в. Решение находится на пересечении внешней характеристики с характеристикой АРВ генератора. На рис. 2.4.а решение будет при $Q = \bar{Q}$ и $V_G < V_0$, на рис. 2.4.б – при $V_G = V_0$ и $\underline{Q} < Q_G < \bar{Q}$, а на рис. 2.4.в – при $Q_G = \underline{Q}$ и $V_G > V_0$.

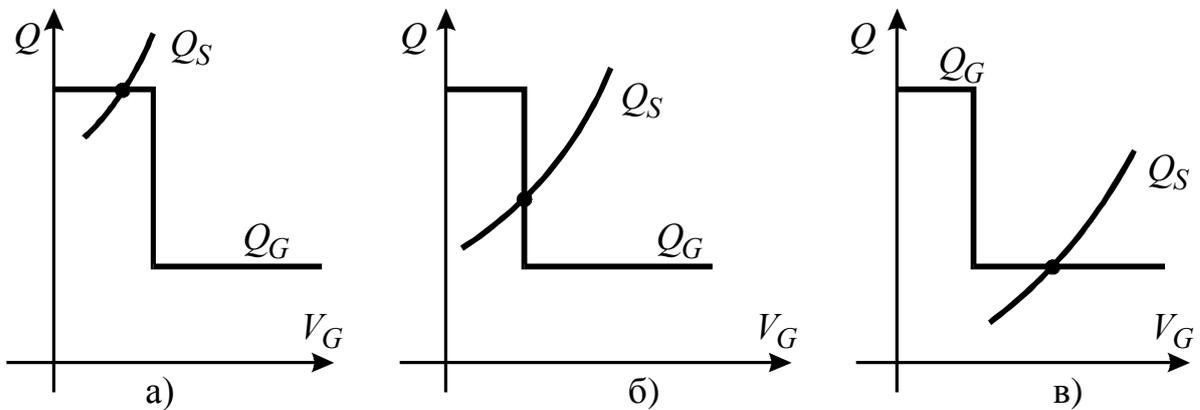


Рисунок 2.4 - Внешняя характеристика системы и генератора с АРВ

Существует несколько способов учета характеристик генераторов с АРВ при расчетах режимов методом Ньютона, которые можно разбить на 2 подхода. Первый подход основан на введении ряда ограничений и последовательной смене типов узлов при нарушении ограничений. Методы другого подхода базируются на аппроксимации характеристик генератора с АРВ гладкой кривой, например, как показано на рис. 2.7.

Рассмотрим первый подход. В этом случае каждому генераторному узлу, оснащённому АРВ, ставятся в соответствие 3 различные характеристики $Q_G = f(V_G)$, как показано на рис. 2.5.

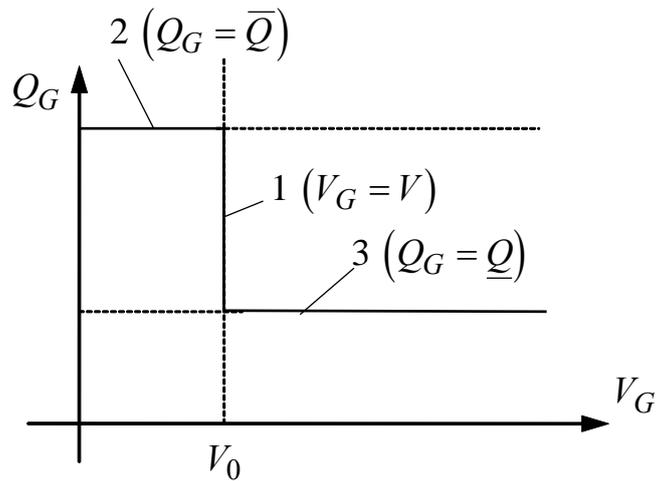


Рисунок 2.5 - Моделирование характеристики генератора с АРВ как совокупности стандартных характеристик PV и PQ узлов

В процессе расчета режима методом Ньютона по мере необходимости осуществляется переход от одной характеристики к другой. Характеристика 1 на рис. 2.5 соответствует узлу типа *PV*, характеристики 2 и 3 – узлам типа *PQ* с фиксированными мощностями, равными соответственно \bar{Q} и \underline{Q} . Для узлов типа *PV* в ходе расчета следует контролировать соблюдение неравенств

$$\underline{Q}_k \leq Q_{G_k} \leq \bar{Q}_k. \quad (1)$$

При нарушении (1) необходимо перейти к характеристике 2 или 3, изменив тип узла *PV* на *PQ*. Для генераторных узлов, переведенных в тип *PQ* и вырабатывающих максимальную (минимальную) реактивную мощность, необходимо контролировать ограничение

$$V_{G_k} < V_{0_k} \text{ при } Q_{G_k} = \bar{Q}_k \quad (V_{G_k} > V_{0_k} \text{ при } Q_{G_k} = \underline{Q}_k). \quad (2)$$

В случае нарушения этих ограничений следует перейти к характеристике 1 и изменить тип узла *PQ* на *PV*.

Процесс перехода от одной характеристики к другой показан на рис.2.6.а–г и сопровождается переформированием линеаризованных УУР, так как *PV* и *PQ* узлам соответствуют разные уравнения. При смене характеристик в узлах возникает дополнительный небаланс реактивной мощности, имеющий дефицитный характер в случаях, показанных на рис. 2.6.а,г, и избыточный – на рис. 2.6.б,в. В дальнейшем этот небаланс

перераспределяется между другими узлами с фиксированными модулями напряжения (так как они являются балансирующими по реактивной мощности), что приводит к изменению модулей напряжения в узлах с фиксированной реактивной мощностью (PQ узлы).

Одновременный (на одной итерации) учет ограничений, приводящих к избытку или дефициту реактивной мощности, проводить нецелесообразно. С одной стороны, это может ухудшить сходимость, или появится расходящийся итерационный процесс. С другой стороны, если после выполнения очередной итерации в ЭС имеется несколько узлов с различными формами нарушенных ограничений (1), (2), то учет только ограничений, вызывающих дефицит реактивной мощности, на последующих итерациях приведет к увеличению генерации мощности в узлах типа PV (рис. 2.6.б) и к уменьшению модуля напряжения в узлах типа PQ (рис. 2.6.в), т.е. часть ограничений может быть удовлетворена без смены характеристик. В последнюю очередь необходимо учитывать нарушение ограничений по Q (рис. 2.6.б), поскольку их выполнение может привести к необоснованному заданию $Q_G=Q$ и, следовательно, искусственному ограничению располагаемой мощности генераторов и возможной расходимости итерационного процесса (при посадке генераторов на минимум выработки реактивной мощности решения УУР может и не быть).

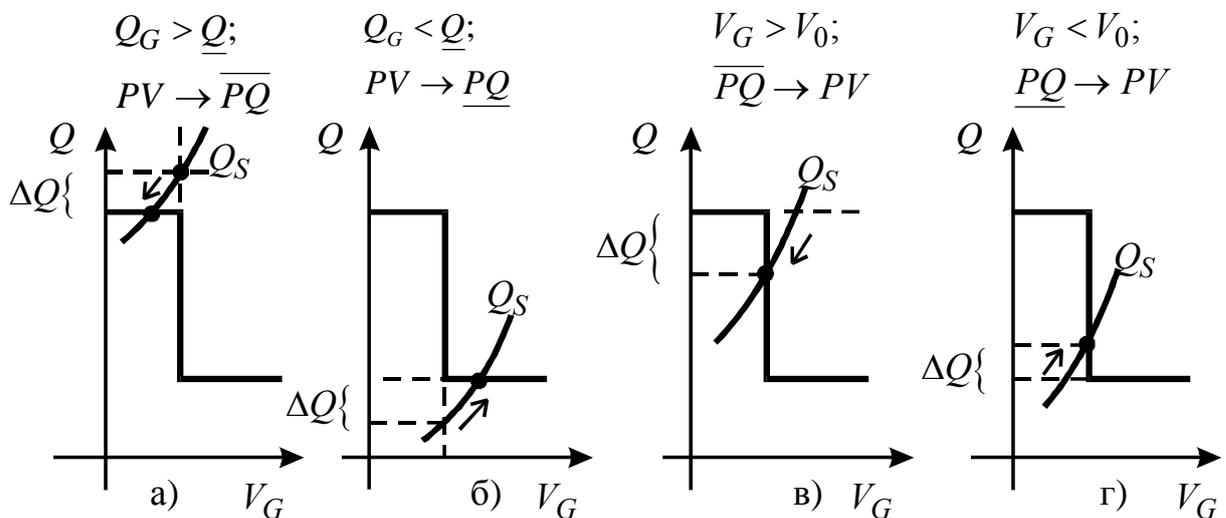


Рисунок 2.6 - Стратегия контроля ограничений

Оптимальный порядок учета нарушенных ограничений выглядит следующим образом: при наличии генераторов с нарушенными ограничениями, удовлетворение которых приводит к дефициту реактивной мощности (ограничения первой группы), учесть только их, выполнив смену характеристик $PV \rightarrow P\bar{Q}$ или $P\underline{Q} \rightarrow PV$ в соответствии с рис. 2.6.a,з, и продолжить расчет. Ограничения, выполнение которых приводит к избытку реактивной мощности (ограничение второй группы), применять только при отсутствии нарушений ограничений первой группы.

При расчете режима методом Ньютона реактивная мощность в узлах PV типа изменяется спонтанно (немонотонно). На начальных итерациях Q_G может увеличиться, а затем уменьшиться, или наоборот. Это связано с тем, что на первых итерациях истинные значения напряжений узлов неизвестны, и выработка генераторами реактивной мощности определяется не действительным распределением реактивной мощности, а погрешностью начального приближения, небалансы от которого могут значительно превышать допустимые диапазоны изменения Q_G . Наиболее ярко немонотонность в вариациях реактивной мощности проявляется для сильно связанных генераторных узлов. Обычно напряжение в узлах нагрузки задается выше действительного, и поэтому большинство генераторов выдает минимальную реактивную мощность. По этой причине контроль ограничений по реактивной мощности на каждой итерации может привести к ухудшению сходимости или даже к расходящемуся итерационному процессу. Поэтому целесообразно контроль ограничений по Q_G осуществлять только при достижении определенной точности расчета. Ограничения же по модулю напряжения (2) необходимо учитывать на каждой итерации (особенно при существенном их нарушении), так как увеличение числа PV узлов благоприятно сказывается на сходимости метода Ньютона.

Представленные рекомендации учета генераторов с системой АРВ в расчетах УР методом Ньютона являются результатом обобщения опыта

проведения многочисленных расчетов, учета специфики функционирования ЭС. Эти рекомендации позволяют повысить быстродействие и надежность расчетов установившихся режимов.

Другим подходом учета ограничений реактивной мощности являются методы, основанные на аппроксимации характеристики генератора плавной кривой $Q_G = f(V_G)$, как, например, представлено на рис. 2.7. Они дают возможность избежать процедуры контроля ограничений и связанного с ней переформирования СЛУ. Необходимую аппроксимацию можно реализовать, например, следующим образом

$$Q_G = \begin{cases} \bar{Q}, & V < V_0 - \Delta V_\varepsilon; \\ \underline{Q} + \frac{\bar{Q} + \underline{Q}}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{V - V_0}{\Delta V_\varepsilon} \right) \right) \right), & |V - V_0| \leq \Delta V_\varepsilon, \\ \underline{Q}, & V > V_0 + \Delta V_\varepsilon, \end{cases} \quad (3a)$$

где ΔV_ε – погрешность задания модуля напряжения. Такая характеристика не имеет скачков производных, значение ΔV_ε можно уменьшать по мере сходимости итерационного процесса, делая характеристику $Q_G = f(V_G)$ более жесткой.

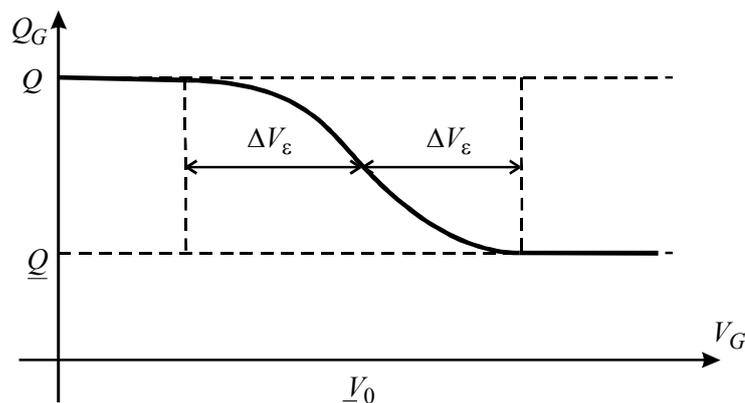


Рисунок 2.7 - Аппроксимация характеристики генератора с APB

Задание характеристики генератора в виде гладкой кривой $Q_G = f(V_G)$ позволяет рассматривать генератор как PQ узел с $P = P_G$ и реактивной

мощностью, заданной статической характеристикой $Q_k = Q_k(V_k)$, в уравнении баланса реактивной мощности генераторного узла

$$\Delta Q_k(\delta, V) = -Q_k(V_k) + \sum_{m \neq k} Q_{km}(\delta, V) = 0. \quad (3б)$$

В линеаризованных уравнениях это будет учитываться корректировкой элемента матрицы Якоби:

$$\sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} - \frac{dQ_k}{dV_k} \right) \Delta V_k = -\Delta Q_k(\delta, V). \quad (3в)$$

Другими словами, характеристика генератора с АРВ учитывается непосредственно в решении СЛУ, поскольку она включается в элементы матрицы Якоби $[\partial \Delta Q / \partial \mathcal{V}]$. К недостаткам этой аппроксимирующей модели следует отнести необходимость изменения шага Ньютона при значительном изменении на итерации реактивной мощности генераторов от минимальной до максимальной или наоборот. В этом случае шаг выбирается таким образом, чтобы реактивная мощность генератора, изменившаяся от одного предельного значения до другого, принимала среднее значение.

Другим способом моделирования действия системы АРВ генератора, который лишен отмеченного недостатка, является использование НСР-функций, обеспечивающих выполнение взаимосвязанных соотношений:

$$\psi_\mu(a, b) = 0 \Leftrightarrow a > 0; \quad b > 0; \quad ab = \mu, \quad (4)$$

благодаря чему система нелинейных уравнений:

$$\psi_k^+ = \psi_{\mu_k}^+(V_k^+, Q_k^+) = 0; \quad (5а)$$

$$\psi_k^- = \psi_{\mu_k}^-(V_k^-, Q_k^-) = 0; \quad (5б)$$

$$V_k = V_{ok} - V_k^+ + V_k^-. \quad (5в)$$

где $Q_k^+ = \bar{Q}_k - Q_k$ и $Q_k^- = Q_k - \underline{Q}_k$, в неявном виде моделирует действие системы АРВ генератора, приближая ее с $\mu \rightarrow 0$ к кусочно-линейной зависимости, представленной на рис. 2.3.б. В этом случае линеаризованное уравнение (3в) примет вид

$$\sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \Delta V_k - \Delta Q_k = -\Delta Q_k(\delta, V), \quad (6)$$

где выражение для ΔQ_k определяется из линеаризованных уравнений (5)

$$\frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \Delta V_k^+ - \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k^+} \Delta Q_k = -\Delta \psi_k^+; \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \Delta V_k^- + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k^-} \Delta Q_k = -\Delta \psi_k^-; \quad (7b)$$

$$\Delta V = -\Delta V_k^+ + \Delta V_k^-, \quad (7b)$$

следующим образом. Согласно (7a)-(7b),

$$\Delta V_k^+ = \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k^+} \Delta Q_k - \Delta \psi_k^+ \right) / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}; \quad \Delta V_k^- = - \left(\frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k^-} \Delta Q_k + \Delta \psi_k^- \right) / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}, \quad (8a)$$

подстановка которых в (7b) дает

$$\Delta Q_k = -D_k \left(\Delta V_k^+ + \Delta \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \Delta \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right), \quad (8b)$$

где

$$D_k = \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k^+} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k^-} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right)^{-1}.$$

В свою очередь, подстановка (8b) в (6) дает

$$\sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} + D_k \right) \Delta V_k = -\Delta Q_k(\delta, V) - r_k, \quad (9)$$

где

$$r_k = D_k \left(\Delta \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \Delta \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right).$$

После решения основной системы линеаризованных уравнений баланса мощностей, в которых вместо (3в) используется (9), изменение переменных для системы уравнений (5) определяются согласно (8)

Реализация второго подхода учета ограничений реактивной мощности генераторов показала, что ее действие аналогично первому подходу, т.е. когда реактивная мощность генератора находится в допустимых пределах,

эта стратегия делает $-\frac{dQ_k}{dV_k}$ в (3в) и D_k в (9) очень большими по величине, что приводит к незначительному изменению модуля напряжения на итерации, т.е. генератор ведет себя как *PV*-узел. В случае нехватки или избытка требуемой реактивной мощности, эти слагаемые становятся практически равными нулю и генератор ведет себя как *PQ* узел с соответствующим пределом реактивной мощности. Однако такое действие генераторов начинается с первой же итерации, а не после достижения определенной точности расчета. Поэтому такая стратегия в ряде случаев не давала возможность получить решение, в отличие от первого подхода. Аналогичным образом будут вести себя другие стратегии, использующие аппроксимацию характеристики АРВ генератора, подобную рис. 2.7. Поэтому такая стратегия учета пределов реактивной мощности может быть рекомендована только для алгоритмов поиска ПР, так как при утяжелении режима генераторы обычно ведут себя монотонно, т.е. если какой-то генератор достиг предела максимума реактивной мощности, то этот генератор останется на этом пределе до окончания расчета. В противоположность этому при обычном расчете режимов, когда начальное приближение недостаточно близко к искомому решению, например, используется гладкий старт, во время итерационного процесса генераторы могут неоднократно сменять свой тип на противоположный, если учет пределов реактивной мощности ведется на каждой итерации, начиная с первой.

Выводы по главе 2

1. Анализ вычислительных моделей потокораспределения метода Ньютона показал, что их расчетные выражения отличаются друг от друга только тем, что именно используется в качестве расчетных узловых мощностей в выражениях элементов диагональных микроматриц матрицы Якоби: заданные мощности узлов, либо полученные из уравнения баланса

мощности в узле в начале итерации, или их сочетание, либо нулевые значения. Однако, несмотря на такое, казалось бы, «небольшое» различие, эти модели обладают как разной скоростью сходимости, так и надежностью получения решения. Вычислительная модель в форме баланса токов в прямоугольной системе координат эффективна только при отсутствии *PV* узлов, обеспечивая надежность решения и небольшое количество итераций. Наличие *PV* узлов делает ее менее работоспособной по сравнению с моделями в форме баланса мощностей. Использование гибридной модели, когда *PV* узлы моделируются в форме баланса мощностей, не улучшает вычислительных характеристик. Метод *Z*-матрицы работоспособен только в ЭС с малыми нагрузками при отсутствии *PV* узлов и в низковольтных распределительных сетях. В зависимости от схемы и используемой вычислительной модели потокораспределения оценка начального приближения с помощью нескольких итераций метода Зейделя может как улучшить, так и ухудшить вычислительные характеристики метода Ньютона. Наиболее надежной и к тому же быстродействующей оказалась *m*-токовая модель в полярной системе координат. Только она смогла рассчитать все тестируемые схемы реальных ЭС с гладкого старта, потребовала наименьшее количество итераций.

2. Разделенные методы Ньютона имеют ограниченную область применения. Это, прежде всего ЭС, в схемах замещения которых активные сопротивления ветвей не превосходят индуктивные. Для таких ЭС быстрые разделенные методы Ньютона (*БРН*) являются быстродействующими и достаточно надежными, требуя обычно чуть больше итераций, чем метод Ньютона, а для расчета утяжеленных УР - в среднем в два раза больше. Для других ЭС, *БРН* могут, как работать, так и не работать, например, такие методы смогли рассчитать УР только двух из восьми ОЭС России, что позволяет их рассматривать как «узкоспециализированные». Для таких сетей *БРН* не могут также использоваться в качестве «стартовых» алгоритмов для

оценки начального приближения переменных, т.к. они довольно часто начинают расходиться с первой же итерации.

3. Из-за отсутствия неитерационных методов решения систем квадратичных уравнений методы второго порядка по сути дела являются модификациями метода Ньютона. Так, если методы второго порядка на всех итерациях используют матрицу Якоби первой итерации, они являются просто разновидностями модифицированного метода Ньютона. Методы более высокого порядка являются еще менее эффективными, т.к. учет членов выше второго порядка разложения решения неявной функции в ряд Тейлора не только существенно снижает быстродействие, но также сильно увеличивает требуемый объем памяти. Если в методе второго порядка корректируется также матрица Якоби членами второго порядка в явном виде, его вычислительные характеристики в лучшем случае соответствуют обычному методу Ньютона. Модификации метода Ньютона, в которых для «непосредственного» учета членов второго порядка (без их вычисления в явном виде) корректируются диагональные элементы матрицы Якоби, используя особенности УУР, могут, в зависимости от ЭС и модификации метода, как увеличить скорость сходимости и надежность получения решения, так и привести к противоположному эффекту.

4. Применение метода по параметру повышает надежность метода Ньютона. Существует и предложены ряд модификаций метода по параметру, но их вычислительная эффективность примерно одинаковая. Основным действием методов по параметру является ограничение (выбор) величины шага (параметра) так, чтобы избежать выхода итерационного процесса из области притяжения (сходимости) к искомому решению. Однако в ряде случаев методы по параметру могут вместо искомого решения сойтись к точке на гиперповерхности вырожденности матрицы Якоби. Чтобы этого избежать, необходимо использовать также идеологию доверительных областей, простейшей реализацией которой является ограничение изменения значений переменных на итерации до заранее заданной величины. Это

способствует исключению скатывания итерационного процесса методов по параметру к точке на гиперповерхности вырожденности матрицы Якоби. Методы Ньютона по параметру являются более надежными, чем обычные методы Ньютона, и их можно рассматривать, как попытку расширить область сходимости метода Ньютона, или иначе, как способ получения достаточно близких начальных приближений. Однако иногда оценка начального приближения для методов Ньютона по параметру также является крайне важной. Если в схеме замещения ЭС генераторы, оснащенные системой APВ, моделируются *PV* узлами, тогда в статически апериодическом устойчивом режиме все определители ведущих микроматриц (ВМ) треугольного разложения матрицы Якоби потокораспределения являются положительными. Основным из условий существующих теорем о сходимости метода Ньютона является требование, чтобы определитель матрицы Якоби в ходе итерационного процесса решения не изменял знак. Если в точке начального приближения имеются ВМ с отрицательным определителем (ВМО), то самое лучшее, что может сделать метод Ньютона по параметру – получить решение, для которого число ВМО будет соответствовать точке начального приближения. Поэтому метод Ньютона по параметру не способен обеспечить получение статически устойчивого режима, если в точке начального приближения имеются ВМО. Одним из способов получения начального приближения без ВМО является использование в качестве стартового алгоритма несколько итераций метода Зейделя. Однако, для некоторых ЭС использование метода Зейделя может ухудшить начальное приближение, и даже увеличить число ВМО. В связи с этим большое внимание заслуживает вычислительная модель потокораспределения в форме баланса *m*-токов в полярной системе координат. Как следует из теоретического анализа и подтверждается результатами вычислительных экспериментов, при гладком старте эта модель не имеет ВМО. Поэтому, при существовании статически

апериодически устойчивого режима для заданных исходных данных, $I_M\delta$ -модель при надлежащем выборе параметра обеспечивает его вычисление.

5. Представленные теоретические и экспериментальные исследования установили, что наиболее надежным методом, а также обладающим наибольшей скоростью сходимости, является метод Ньютона (по параметру) на основе вычислительной модели потокораспределения в форме баланса м-токов в полярной системе координат. Только этот метод позволил рассчитать все тестируемые схемы ОЭС России с гладкого старта, потребовав при этом наименьшее число итераций. При надлежащем выборе длины шага $I_M\delta$ -метод с гладкого старта обеспечивает получение решением статически апериодически устойчивого режима, если такой существует для заданных исходных данных.

Глава 3 Математические модели нелинейного программирования предельных режимов ЭС

3.1 Введение

Режим электрической системы подвержен различным возмущениям: флуктуации нагрузки, изменению топологии, аварийному (плановому) отключению (включению) электрооборудования и т.д., и требуется знать пределы, как с точки зрения статической устойчивости, так и существования УР [297]. Задача становится особенно актуальной в условиях либерализации энергетики, поскольку стремление субъектов к извлечению максимальной прибыли может приводить к режимам, близким к предельным [163].

Оценка предельных режимов ЭС играет ключевую роль при планировании, анализе и управлении режимами ЭС. В теории установившихся режимов электрических систем предельный режим, как правило, ассоциируют с пределом по статической устойчивости [41], [95]. ПР есть такой установившийся режим, в котором произвольно малое изменение любого текущего параметра в неблагоприятном направлении вызывает потерю синхронизма генераторами или лавину напряжения. Обычно для поиска ПР используется подход и критерий П.С. Жданова, т.е. полагают, что исходный УР устойчив, затем этот режим последовательно утяжеляют до тех пор, пока не перейдет через ноль определитель матрицы Якоби уравнений малых колебаний. При введении шины неограниченной мощности, а также некоторых других предположений, проверка якобиана линеаризованных УУР может использоваться для выявления возможной аperiodической неустойчивости [327], [359]. В этом случае определитель матрицы Якоби потокораспределения для предельного по статической аperiodической устойчивости УР равен нулю. Поэтому одним из наиболее распространенных способов нахождения ПР является последовательный расчет серии УР с заданным шагом утяжеления до получения режима с расходящимся итерационным процессом, который, в свою очередь,

корректируется бинарным поиском, или методом Ньютона по параметру [268], [359]. Однако, как только УР ЭС подходит близко к условиям статической неустойчивости, расходимость расчета потокораспределения может быть вызвана плохой обусловленностью матрицы Якоби [254], [274]. Поэтому большее распространение получили методы с параметризацией шага утяжеления зависимых переменных [229], [279], [281] или нормой изменения на итерации [187], [273]. В этом случае матрица Якоби в промежуточных и ПР не вырождена [129], [332], что позволяет также получать V-образные статические характеристики [227]. Такие методы за рубежом получили название методы продолжения потокораспределения (continuation power flow). Быстродействие методов последовательного утяжеления зависит от правильного выбора размера шага утяжеления, либо нормы изменения переменных на итерации. В среднем время нахождения ПР в заданном направлении утяжеления соизмеримо с 10 расчетами потокораспределения [189].

Другими подходами оценки ПР являются: использование анализа областей сходимости степенных рядов зависимых переменных [27], [164], аппроксимация разложения решения в окрестности ПР через параметры последовательно утяжеляемых параметров [257], [371], экстраполяция индексов ПР полиномом второй или четвертой степени от шага утяжеления [200], [204], [215], [216], [224], [228], [230], [249], [335], использование регрессионных моделей [289], наименьшего сингулярного числа или собственного значения матрицы Якоби [267], [292], [293], [348], [349], [360], [364], близость промежуточных утяжеляемых режимов вторым решениям УУР [343], [366]. Различные интерполяции и аппроксимации не позволяют учесть возможные технологические ограничения на параметры режима. Как следствие, оценки могут быть как завышены, так и занижены, что требует дополнительной верификации.

Существенным вкладом в теорию предельных режимов явилось формирование уравнений предельных режимов (УПР) [104], [112],

известные на западе как метод точки коллапса (point of collapse method (PoC)) [212]-[213], в которых УУР с заданным направлением утяжеления решаются совместно с уравнениями линейной зависимости строк или столбцов матрицы Якоби. Обобщенные уравнения предельных режимов (ОУПР) [59]-[65] позволяют на основе единого подхода получать различные предельные режимы, в том числе ближайšie к исходному. В [247] уравнения ближайшего предельного режима получены для Евклидовой метрики на основе геометрической интерпретации левого собственного вектора матрицы Якоби, отвечающего нулевому собственному значению, как нормали гиперповерхности ПР. УПР, PoC и ОУПР включают удвоенное количество уравнений и неизвестных по сравнению с обычным расчетом режима, но в случае успешного решения по точности и быстродействию превосходят методы последовательного утяжеления [213]. Однако они страдают существенным недостатком – для успешной реализации требуется хорошее начальное приближение собственного вектора и предельного режима. Как следствие, решение УПР или ОУПР может дать режим в противоположном направлении утяжеления или не быть ближайшим предельным. Проверка последнего связана с оценкой кривизны гиперповерхности ПР в пространстве утяжеляемых параметров [247], что требует большого объема вычислений [189]. Компромиссным подходом является нахождение ближайшего ПР последовательным получением предельных режимов в направлении левого собственного вектора матрицы Якоби, отвечающего нулевому собственному значению предыдущего ПР [247]. В этом случае время нахождения ближайшего ПР соответствует примерно 100 расчетам УР [189].

Весьма эффективным и универсальным подходом является использование моделей и инструментов нелинейного программирования для решения задач ПР. Как оказалось, можно представить ряд задач ПР, как оптимизационные задачи. Это позволяет учесть различные ограничения, расширить спектр решаемых задач ПР, использовать мощные средства

нелинейного программирования. Первые публикации появились почти тридцать лет назад. В [62]-[63] была выявлена связь между задачей оптимизации и ПР, предложен подход нахождения различных ПР, в том числе ближайших, основанный на нелинейном программировании. В [313], [336], [356] задачи нахождения предельного режима в заданном направлении изменения мощности сформулированы как оптимизационные задачи. В [259] для решения задачи ввода режима в область существования использовался метод внутренней точки. В [210], [247], [305], [333], [368] задача поиска предельного режима сформулирована как оптимизационная задача. В [361] при решении задачи диспетчеризации генераторов с целью увеличения коэффициента запаса статической устойчивости использовался градиентный метод. В [9]-[11], [194], [221], [222], [234], [278], [294], [300], [320]-[323], [334], [353], [365] использовалась оптимизационная постановка для обеспечения необходимого коэффициента запаса статической устойчивости или решения других задач ПР.

Основной чертой существующих оптимизационных подходов для нахождения ПР или их учета в других задачах ЭС является то, что они ограничиваются рассмотрением ПР в заданном направлении изменения мощности, используя модель, предложенную в [355]. Для решения иных задач ПР, например, поиска ближайших ПР, предложены более сложные оптимизационные модели [210], [361]. Такие модели требуют больших вычислительных ресурсов и поэтому не получили распространения.

Цель этой главы 3 состоит в том, чтобы предложить, теоретически обосновать и исследовать модель ПР электрических систем, основанную на нелинейном программировании (НЛПР модель). Предлагаемая модель является универсальной. Многие существующие вычислительные модели ПР, использующие оптимизационную технику, например, представленные в [62]-[63], [259], [275], [313], [322], [336], [355], [365], оказываются частными случаями этой модели. НЛПР модель позволяет рассчитывать и учитывать различные ПР, включая ПР в заданном направлении изменения мощностей,

ближайшие ПР, ввод режима в область существования и т.д., повысить надежность и точность расчетов. Кроме этого НЛПР модель имеет важное теоретическое значение. Она позволила получить новые важные свойства ПР, которые способствуют лучшему пониманию моделей установившихся режимов ЭС и ПР, развитию теории ПР и разработке более эффективных алгоритмов решения задач ПР.

Дальнейший материал главы представлен следующим образом. В параграфе 3.2 предложена и исследуется НЛПР модель с обычным, т.е. с одиночным БУ. Параграф 3.3 посвящен НЛПР модели с РБУ. В параграфе 3.4 рассматривается учет технологических ограничений в НЛПР модели. В параграфе 3.5 представлен метод внутренней точки численной реализации НЛПР модели, а параграфе 3.6 – вычислительные аспекты программной реализации НЛПР модели. Наконец, выводы и заключения даны в §3.7.

3.2 НЛПР модель

Основная черта существующих подходов нахождения ПР заключается в добавлении к вычислительной модели УР «внешних» критериев ПР в качестве «принудительного» механизма для «перемещения» режима ЭС к ПР. ПР ЭС можно сравнить с крутым обрывом. Когда УР ЭС находится вдали от ПР, вычислительные модели почти не чувствуют край «обрыва» и могут «улететь» далеко за пределы [104]. Как следствие, требуется либо большой объем вычислений, либо не гарантируется робастность алгоритмов. Поэтому, неудивительно, что промышленные программы определяют ПР, используя заданное направление утяжеления с дискретным или параметризованным шагом, пока итерационный процесс расчета УР не разойдется. Вместе с тем критерий ПР уже неявно содержится в самой вычислительной модели УР.

ПР ЭС является, прежде всего, УР, но некоторые параметры принимают предельные (экстремальные) значения. Согласно результатам главы 1, вырожденность матрицы Якоби потокораспределения (1.2.46), а

следовательно, и ПР, зависит от состава зависимых и независимых переменных. Поэтому, принимая состав зависимых и независимых переменных как в вычислительной модели УР (1.2.1) - (1.2.4), рассмотрим задачу условной оптимизации:

$$\min f(X, Y) \quad (1)$$

при условии (ограничениях)

$$\Delta F(X, Y) = 0. \quad (2)$$

Здесь (1) – некоторая функция цели, а (2) – УУР в форме (1.2.2). Вектор оптимизируемых переменных представлен в виде двух векторов X и Y . В теории нелинейного программирования все оптимизируемые переменные рассматриваются равнозначными и такое разделение не используется. Оно было введено при разработке алгоритмов метода приведенного градиента [5], [110], [130], [248] для задачи оптимизации режимов ЭС. На основе теоремы о неявной функции оптимизируемые переменные были сгруппированы в зависимые X и независимые Y переменные, что позволило значительно уменьшить сложность решения задачи оптимального потокораспределения, разделив ее на две подзадачи – расчет режима (решение системы нелинейных уравнений (2)) и шаг оптимизации в пространстве независимых переменных Y .

Функция Лагранжа для задачи (1)-(2) может быть представлена как

$$L(X, Y, \lambda) = f(X, Y) + \Delta F(X, Y)^T \lambda. \quad (3)$$

Здесь λ представляет собой вектор вспомогательных переменных, называемых множителями Лагранжа, каждый из которых может быть ассоциирован с соответствующим уравнением ограничения в форме равенства исходной задачи условной оптимизации. Множители Лагранжа определяют стоимость ограничения в форме равенства с точки зрения целевой функции.

Необходимые условия оптимальности задачи (1)-(3) определяются следующими уравнениями:

$$\nabla_x L = \nabla_x f + [\partial \Delta F / \partial X]^T \lambda = 0; \quad (4)$$

$$\nabla_y L = \nabla_y f + [\partial \Delta F / \partial Y]^T \lambda = 0; \quad (5)$$

$$\nabla_\lambda L = \Delta F(X, Y) = 0. \quad (6)$$

Здесь $\nabla_x L = [\partial L / \partial X]^T$ есть градиент функции L относительно вектора X .

Если градиент целевой функции (1) по зависимым переменным равен нулю, т.е. $\nabla_x f = 0$, условие (4) перейдет в

$$\nabla_x L = [\partial \Delta F / \partial X]^T \lambda = 0. \quad (7)$$

В свою очередь, если состав вектора X задачи нелинейного программирования (1)-(2) отвечает вектору зависимых переменных задачи потокораспределения, тогда матрица $[\partial \Delta F / \partial X]$ в (4) и (7) будет соответствовать матрице Якоби (1.2.4а). В этом случае уравнение (7) для $\lambda \neq 0$ определяет вырожденность матрицы Якоби (1.2.4а), а значит, учитывая (1.2.4в), вырожденность матрицы Якоби потокораспределения (1.2.4б), т.е. ПР.

Для того чтобы гарантировать (7), достаточно исключить зависимые переменные задачи потокораспределения из целевой функции (1). В этом случае решением задачи нелинейного программирования (1)-(2) будет ПР, соответствующий минимуму целевой функции (1). С помощью этой модели, названной НЛПР моделью, можно рассчитывать различные ПР, например, ближайшие ПР. Для этого необходимо использовать соответствующую целевую функцию. Применения НЛПР модели для решения задач ПР будет рассмотрено в последующих главах 4 и 5. Кроме этого, НЛПР модель имеет также важное теоретическое значение. Ее анализ позволяет обнаружить свойства ПР, которые способствуют лучшему пониманию ПР и моделей потокораспределения, развитию теории ПР.

Учитывая особенности НЛПР модели, рассмотрим математическую модель оптимального потокораспределения:

$$\min f(P, Q) \quad (8)$$

при условиях

$$\begin{bmatrix} \Delta P(P, \delta, V) \\ \Delta P_b(P_b, \delta, V) \\ \Delta Q(Q, \delta, V) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Система (9) является векторным представлением уравнений потокораспределения (2.2.1). Целевая функция определяется решаемой задачей. Все переменные в оптимизационной задаче (8)-(9) равнозначны. Однако, вследствие вырожденности полной матрицы Якоби (1.2.3а), один из узлов должен иметь фиксированный угол напряжения, и, по крайней мере, один узел должен иметь фиксированный модуль напряжения. Других ограничений нет. Для того, чтобы связать решение (8)-(9) с ПР, необходимо использовать состав зависимых и независимых переменных как для задачи расчета потокораспределения. Индекс b обозначает балансирующий узел, который, для упрощения выражений, принят также в качестве базисного. Это может быть любой узел, участвующий в задаче оптимизации.

Функция Лагранжа для задачи (8)-(9) может быть представлена как

$$L = f(P, Q) - \Delta P(P, \delta, V)^T \lambda^P - \Delta P_b(P_b, \delta, V) \lambda_b^P - \Delta Q(Q, \delta, V)^T \lambda^Q. \quad (10)$$

Поэтому необходимые условия оптимальности даются следующими уравнениями:

$$\partial L / \partial P_m = \partial f / \partial P_m - \lambda_m^P = 0; \quad (11)$$

$$\partial L / \partial P_b = \partial f / \partial P_b - \lambda_b^P = 0; \quad (12)$$

$$\partial L / \partial Q_m = \partial f / \partial Q_m - \lambda_m^Q = 0; \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\delta} L \\ \nabla_V L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda_b^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = 0; \quad (14)$$

$$\nabla_{\lambda^P} L = -\Delta P(P, \delta, V) = 0; \quad (15)$$

$$\partial L / \partial \lambda_b^P = -\Delta P_b(P_b, \delta, V) = 0; \quad (16)$$

$$\nabla_{\lambda^Q} L = -\Delta Q(Q, \delta, V) = 0. \quad (17)$$

Исследование системы линейных уравнений (14) позволяет получить важные свойства множителей Лагранжа, используемые в НЛПР модели.

Матрица системы уравнений (14) является прямоугольной. Она включает матрицу Якоби потокораспределения (1.2.4б) плюс строку частных производных уравнения баланса активной мощности БУ. Дополним эту матрицу столбцом частных производных уравнений потокораспределения относительно угла напряжения БУ и получим расширенную матрицу Якоби:

$$[J_A] = \begin{bmatrix} & & \partial \Delta P / \partial \delta_b \\ & J_{LF} & \partial \Delta Q_{PQ} / \partial \delta_b \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V_{PQ} & \partial \Delta P_b / \partial \delta_b \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Расширенная матрица Якоби, так же, как полная матрица Якоби (1.2.3а), вырождена. Ее правый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, равен $[e^T, 0^T, 1]^T$. Ее левый собственный вектор соответствующий нулевому собственному значению представляет собой вектор множителей Лагранжа $[\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ задачи оптимизации (8)-(17). Чтобы увидеть это, достаточно проверить выполнение следующего выражения:

$$[\partial \Delta P / \partial \delta_b]^T \lambda^P + [\partial \Delta P_b / \partial \delta_b] \lambda_b^P + [\partial \Delta Q / \partial \delta_b]^T \lambda^Q = 0. \quad (19)$$

Так как правый собственный вектор расширенной матрицы Якоби, соответствующий нулевому собственному значению, равен $[e^T, 0^T, 1]^T$, то множители $\partial / \partial \delta_b$ в (19) могут быть получены через суммирование строчковых элементов соответствующей подматрицы, что, с учетом (14), дает (19).

Система (14) определяет также взаимосвязь между множителями Лагранжа. Если (14) представить, как

$$\begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial \Delta P_b / \partial \delta^T \\ \partial \Delta P_b / \partial V^T \end{bmatrix} \lambda_b^P, \quad (20)$$

и сравнить с системой (1.4.2), то можно обнаружить, что эти две системы тождественны друг другу. Но в системе (1.4.2) вектор $[\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$

представляет собой вектор нормали гиперповерхности мощностей ЭС. Поэтому вектор множителей Лагранжа $[\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ стандартной задачи оптимизации режима ЭС является вектором нормали ГМ ЭС, рассмотренной в первой главе. Там же были получены соотношения между компонентами этого вектора:

$$\lambda_m^P = (1 - \partial\pi/\partial P_m) \lambda_b^P; \quad (21)$$

$$\lambda_m^Q = -\partial\pi/\partial Q_m \lambda_b^P, \quad (22)$$

где $\partial\pi/\partial P_m$ есть относительный прирост потерь для узла m при балансирующем узле b .

Выражения (21)-(22) совместно с (11)-(13) дают критерий оптимального потокораспределения, обобщающий классический критерий для комплексной задачи оптимизации режима электрической системы [124]. Оптимальное решение не зависит от выбора балансирующего узла. Классическая задача оптимального потокораспределения использует БУ для сравнения экономичности работы электрических станций. Разность между правой и левой частью (21) является величиной элемента вектора приведенного градиента в задаче оптимизации по активной мощности. Условия оптимальности (11)-(13) и (21)-(22) останутся неизменными при другом назначении балансирующего узла. Действительно, множители Лагранжа $[\lambda^{P^T}, \lambda^{Q^T}, \lambda_b^P]^T$ являются компонентами левого собственного вектора расширенной матрицы Якоби (18), соответствующего нулевому собственному значению. Расширенная матрица Якоби остается той же самой безотносительно места расположения балансирующего узла. Конечно, значения $(1 - \partial\pi/\partial P_m)$ будут другими, но согласно (1.4.5), в (21)-(22) они изменятся в одной и той же пропорции $1 - \partial\pi_k/\partial P_m = (1 - \partial\pi_b/\partial P_m)/(1 - \partial\pi_b/\partial P_k)$, $\partial\pi_k/\partial Q_m = \partial\pi_b/\partial Q_m/(1 - \partial\pi_b/\partial P_k)$, где $\partial\pi_b/\partial P_m$ - относительный прирост потерь при балансирующем узле b , $\partial\pi_k/\partial P_m$ - то же самое при новом балансирующем узле k .

Соотношения (11)-(12) и (21) между множителями Лагранжа позволяют получить интересную интерпретацию ПР. Для этого рассмотрим продажу электрическими станциями электрической энергии на оптовом рынке [331], где в качестве целевой функции используется выражение

$$f = \sum C_m P_m \rightarrow \min .$$

Здесь C_m есть заявочная цена m -й станции за 1 кВтч отпущенной электроэнергии.

Предположим, что у мощной ГЭС в узле k переполнено водохранилище и необходимо «вхолостую» сбросить воду, либо продать электроэнергию по любой цене. ГЭС заявляет низкую цену. Предположим также, что в результате сетевой ремонтной компании ослаблена пропускная способность линий, отходящих от станции. Сколько электроэнергии может продать ГЭС? Это определяется соотношениями (12) и (21), которые для данного случая примут вид

$$\lambda_k^P = \partial f / \partial P_k = C_k = (1 - \partial \pi / \partial P_k) C_b .$$

Полагая, что $C_k \ll C_b$, можно получить $1 - \partial \pi / \partial P_k = C_k / C_b \approx 0$. Когда ГЭС анонсирует нулевую цену, $\lambda_k^P = C_k = 0$ и $\partial \pi / \partial P_k = 1$, т.е. станция будет загружена так, что последующее увеличение ее активной мощности будет идти только на вызываемые этим потери. Если при расчете УР такая станция не является БУ, тогда установившийся режим не будет предельным, т.к. возможна дополнительная загрузка ее и других узлов. Как только относительный прирост потерь для ГЭС превысит единицу, дальнейший рост ее генерации приведет к снижению полезно полученной мощности, которую восполнит БУ. Если при расчете УР данная станция будет назначена балансирующей, тогда установившийся режим будет предельным по существованию. Действительно, в этом случае система (12) и (20) примет вид:

$$\lambda_b^P = 0; \tag{23}$$

$$\begin{vmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial \mathcal{N} \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial \mathcal{N} \end{vmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Матрица левой части системы (24) является транспонированной матрицей Якоби потокораспределения, а поскольку условие (24) при $\lambda^P, \lambda^Q \neq 0$ определяет ее вырожденность, это соответствует ПР ЭС. Назначение нулевой цены для узла означает исключение его мощности из целевой функции. Поэтому если активную мощность узла, выполняющего функции балансирующего при расчете УР, исключить из целевой функции (8), то решением оптимизационной задачи (8)-(9) будет ПР, отвечающий заданной целевой функции.

Таким образом, ПР можно охарактеризовать как невозможность балансирующего узла поддержать установившийся режим ЭС, поскольку все его действия по балансировке режима будут сведены на нет возникающими при этом потерями активной мощности. Балансирующий узел как бы теряет электрическую связь с частью или со всей системой, что соответствует отсутствию балансирующего узла в вычислительной модели УР со всеми вытекающими последствиями.

Исключение из целевой функции (8) компонент, в явном виде включающих зависимые переменные уравнений потокораспределения (1.2.1)-(1.2.2), не нарушает условия о допустимости использования функции Лагранжа и существования неявной функции в ПР. Это действительно так, несмотря на то, что матрица Якоби потокораспределения (24) вырождена в ПР. Согласно теории нелинейного программирования [19], чтобы гарантировать существование и единственность вектора множителей Лагранжа, градиенты уравнений ограничений (9) должны быть линейно независимыми. В задаче нелинейного программирования (8)-(9) число переменных превышает число уравнений ограничений. Поэтому, однородная система линейной зависимости градиентов имеет больше уравнений, чем переменных. Согласно теореме Сарда, ненулевое решение такой системы, т.е. линейная зависимость градиентов, имеет меру ноль [24],

[137]. Линейная независимость градиентов уравнений (9) обеспечивает условия существования неявной функции в ПР для каждого узла с ненулевым множителем Лагранжа в (24), но не для узла, который назначен балансирующим при расчете ПР. Это свойство используется в методах последовательного утяжеления при изменении состава зависимых и независимых переменных [187], [227], [229], [273], [279]. В ПР размерность нуль пространства расширенной матрицы Якоби (18) будет также равна единице [196], как в любом другом режиме. Левый собственный вектор для нулевого собственного значения расширенной матрицы Якоби также будет соответствовать вектору множителей Лагранжа (23)-(24). Это можно показать, если рассмотреть выражение (18) и провести необходимые выкладки.

В случае изменения балансирующего узла в ПР, условия (23)-(24) в общем случае не будут выполняться, если новый балансирующий узел не будет иметь нулевой множитель Лагранжа в (24), т.е. смена БУ в ПР делает этот режим не предельным. Подробные объяснения этого, также как возможные исключения, ранее были рассмотрены в первой главе.

3.3 НЛПР модель с распределенным балансирующим узлом

В случае использования распределенного балансирующего узла (РБУ) его мощность P^S будет зависимой переменной и задача оптимального распределения (3.2.8)-(3.2.9) будет иметь вид:

$$\min f(P, Q) \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{bmatrix} \Delta P(P + \mathcal{G}^S P^S, \delta, V) \\ \Delta Q(Q, \delta, V) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где \mathcal{G}^S - вектор коэффициентов участия узлов в РБУ с $\sum_{k \in S} \mathcal{G}_k^S = 1$.

Система (2) есть векторное представление уравнений потокораспределения (1.2.1) с РБУ. Все переменные в оптимизационной

задаче (1)-(2) также равнозначны. Однако, вследствие вырожденности полной матрицы Якоби (1.2.3), один из узлов должен иметь фиксированный угол напряжения, и, по крайней мере, один узел должен иметь фиксированный модуль напряжения. Других ограничений нет. Для того чтобы связать решение (1)-(2) с ПР, необходимо также использовать состав зависимых и независимых переменных как для задачи расчета потокораспределения.

Функция Лагранжа для задачи (1)-(2) может быть представлена как

$$L = f(P, Q) - \Delta P(P + \mathcal{G}^S P^S, \delta, V)^T \lambda^P - \Delta Q(Q, \delta, V)^T \lambda^Q. \quad (3)$$

Необходимые условия оптимальности даются следующими уравнениями:

$$\partial L / \partial P_m = \partial f / \partial P_m - \lambda_m^P = 0; \quad (4)$$

$$\partial L / \partial P^S = \partial f / \partial P^S - \mathcal{G}^{ST} \lambda^P = 0; \quad (5)$$

$$\partial L / \partial Q_m = \partial f / \partial Q_m - \lambda_m^Q = 0; \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\delta} L \\ \nabla_V L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\nabla_{\lambda^P} L = -\Delta P(P + \mathcal{G}^S P^S, \delta, V) = 0; \quad (8)$$

$$\nabla_{\lambda^Q} L = -\Delta Q(Q, \delta, V) = 0. \quad (9)$$

Если переменная P^S не будет включена в целевую функцию (1), уравнение (5) примет вид

$$\partial L / \partial P^S = -\mathcal{G}^{ST} \lambda^P = -\sum_{k \in S} \mathcal{G}_k^S \lambda_k^P = 0, \quad (10)$$

что, совместно с (7) дает

$$\begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V & \mathcal{G}^S \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Но матрица линейных уравнений в (11) представляет собой транспонированную матрицу Якоби УУР с РБУ (1.2.4г). Поэтому система уравнений (11) с $\lambda \neq 0$ определяет вырожденность этой матрицы, т.е. предельный режим.

Следует отметить, что система линейных уравнений (7) есть в точности система уравнений (3.2.14) и (3.2.20). Поэтому все результаты, полученные в предыдущем параграфе для вектора множителей Лагранжа справедливы и в данном случае – вектор множителей Лагранжа λ задачи оптимизации (1)-(2) является вектором нормали ГМ ЭС. Поэтому взаимосвязь между этими множителями определяется также соотношениями, ранее полученными для компонент вектора нормали при использовании РБУ (1.4.14)

Точно так же, как в предыдущем параграфе, можно ввести в рассмотрение расширенную матрицу Якоби (3.2.18), ее собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению, также будет вектор неопределенных множителей Лагранжа задачи оптимизации (1)-(2). Смена балансирующего узла, т.е. изменение коэффициентов участия узлов в РБУ, не изменяет эту расширенную матрицу, следовательно, не изменяет и множителей Лагранжа. Однако в этом случае УР не будет ПР, если для нового РБУ не будет соблюдаться (11). Подробные объяснение этого, а также возможные исключения, представлены ранее в первой главе.

3.4 *НЛПР модель с учетом технологических ограничений*

В реальных задачах поиска предельных режимов по статической устойчивости или существования режимов ЭС необходимо учитывать различного рода технологические пределы (ограничения) для имеющегося электрооборудования. В этом случае НЛПР модель должна быть дополнена соответствующими ограничениями - неравенствами. Вначале рассмотрим стандартную задачу оптимального потокораспределения с ограничениями – неравенствами:

$$\min f(P, Q) \quad (1)$$

при условиях

$$\Delta P(P, \delta, V) = 0; \quad (2)$$

$$\Delta P_b(P_b, \delta, V) = 0; \quad (3)$$

$$\Delta Q(Q, \delta, V) = 0; \quad (4)$$

$$P^- \leq P \leq P^+; \quad (5)$$

$$Q^- \leq Q \leq Q^+; \quad (7)$$

$$V^- \leq V \leq V^+; \quad (8)$$

$$P_C^- \leq P_C(\delta, V) \leq P_C^+; \quad (9)$$

$$|I_l(\delta, V)| \leq |I_l^+|. \quad (10)$$

Здесь нижние индексы C и l обозначают сечения и линии соответственно. Верхними индексами “-” и “+” указаны нижние и верхние пределы. При участии в оптимизации узлов нагрузки, их реактивная мощность может моделироваться соотношением

$$Q_L = P_L \operatorname{tg}(\varphi_L). \quad (11)$$

Индекс b обозначает базисный узел, для которого задается угол, обычно равный нулю. В качестве базисного может быть выбран любой узел. В методах приведенного градиента базисный узел играет также роль балансирующего узла, и месторасположение этого узла выбирается, как правило, с точки зрения улучшения сходимости [110], [111], [130], например, имеющий достаточные пределы регулирования активной мощности и пологую характеристику относительных приростов расхода топлива. В современных программах оптимального потокораспределения выбор базисного узла не влияет на сходимость и поэтому назначается произвольно.

В отличие от программ расчета УР, в стандартной задаче оптимального потокораспределения не используется балансирующий узел, если не применяется метод приведенного градиента. Кроме этого, всем генераторным узлам назначается PQ -тип, задаются пределы на реактивную мощность (7) и диапазоны возможных изменений напряжений узлов (8), т.е. в задаче оптимального потокораспределения полностью отсутствуют узлы PV -типа, хотя, как правило, генераторы оснащаются системой АРВ, поддерживающее заданное напряжение. Как отмечено в [130], это может в некоторых случаях создать определенные трудности при получении

оптимального «утяжеленного» режима, т.к. Якобиан потокораспределения во время итерационного процесса может изменить знак, поэтому требуется достаточно хорошее начальное приближение. В тоже самое время, согласно раннее полученным соотношениям, чтобы решением задачи оптимального потокораспределения был ПР, необходимо, чтобы состав зависимых и независимых переменным соответствовал задаче расчета УР, т.е. должен быть назначен обычный или распределенный БУ, а синхронные машины, оснащенные системой АРВ, представлялись *PV*-типом с учетом диапазона возможного изменения реактивной мощности (7) - как при расчете УР. Это можно реализовать разными способами. Наиболее простым является подход, аналогичный процедуре учета генераторных узлов стандартной задачи расчета УР. Так, например, в [355] предлагается при выходе генератора на ограничение по реактивной мощности его моделировать ЭДС, соответствующей предельному значению тока обмотки возбуждения, за синхронным сопротивлением. Для задачи (1)-(10) это будет соответствовать изменению состава и количества зависимых и независимых переменных. Следует отметить, что обычно при расчете УР генераторы, вышедшие на ограничения по реактивной мощности, обрабатываются простой сменой типа узла из *PV* в *PQ*-тип с фиксацией реактивной мощности на соответствующем пределе и переводом его напряжения в переменную, т.е. также изменяется состав зависимых и независимых переменных [35]. Такой подход учета генераторных узлов обладает определенными преимуществами, например, простотой алгоритмической реализации, довольно быстрой сходимостью, однако имеется существенный недостаток. Этот способ учета не позволяет получить решение, если расчетный ПР будет отвечать бифуркации, индуцированной пределом реактивной мощности генератора (limit-induced bifurcation, (LIB)), вызывающей «немедленную» статическую неустойчивость. Фактически это означает, что закрепление реактивной мощности какого-то генератора приводит к мгновенному переходу на обратную ветвь характеристики, на которой увеличение

реактивной мощности генератора, т.е. тока обмотки возбуждения, будет приводить не к росту напряжения, а наоборот, к снижению, в отличие от обычной ветви характеристики. Вычислительно это проявляется следующим образом: один или несколько генераторов выходят на ограничение по максимальной реактивной мощности, они переводятся в *PQ*-тип с фиксацией реактивных мощностей на соответствующих пределах и освобождением их напряжений. При этом Якобиан потокораспределения изменяет знак и на следующей итерации напряжения этих генераторных узлов увеличиваются. Так как у генераторов, реактивная мощность которых закреплена на верхнем пределе, проверяется модуль напряжения, поэтому из-за его превышения над заданным значением такие генераторы будут переведены обратно в *PV*-тип. На следующей итерации их реактивная мощность опять превысит предел, они снова будут переведены в *PQ*-тип, и такая процедура будет повторяться неограниченное число раз. Другими словами, вычислительный процесс никогда не сойдется и решение не будет получено.

Одним из способов выхода из такого затруднения является использование особенностей LIB в процедуре учета генераторных узлов. Это позволяет сохранить преимущество такого подхода учета генераторных узлов через изменение их типа - довольно быструю сходимость. Подробнее такая процедура будет рассмотрена в следующей главе. Возможно применение также другого, более универсального, «чисто» математического подхода, использующего так называемые комплементарные ограничения (complementarity constraints) [320]-[323], т.е. уравнения взаимозависимости.

Напомним, что комплементарные ограничения основаны на реализации так называемого комплементарного условия. Комплементарное условие представляет собой произведение двух переменных a и b , которое должно быть равно нулю

$$ab = 0. \quad (12)$$

Анализ (12) показывает, что возможны три ситуации: (а) $a=0$ и $b \neq 0$; (б) $a \neq 0$ и $b=0$; (в) $a=0$ и $b=0$. На практике, большинство встречающихся условий взаимозависимости представляют собой так называемые смешанные комплементарные ограничения – когда только часть переменных должны подчиняться условиям взаимозависимости. Примером является моделирование узлов оснащенных системой АРВ, поддерживающей требуемое значение напряжений, которое можно представить в форме ограничений - неравенств на покомпонентной основе:

$$Q_k^- \leq Q_k \leq Q_k^+; \quad (13a)$$

$$V_k = V_k^0 + dV_k^- - dV_k^+; \quad (13б)$$

$$dV_k^- \geq 0; \quad dV_k^+ \geq 0; \quad (13в)$$

$$(Q_k - Q_k^-)dV_k^- \leq 0; \quad (13г)$$

$$(Q_k^+ - Q_k)dV_k^+ \leq 0, \quad (13д)$$

где V_k^0 - значение напряжения, поддерживаемое системой АРВ. Система уравнений (13) имеет ряд важных свойств. Т.к. Q_k должна находиться в регулировочном диапазоне (13а), только одна из dV_k^+ или dV_k^- может быть больше нуля, и решением системы (13) является:

$$1) \text{ если } Q_k = Q_k^-, dV_k^- \geq 0 \text{ и } dV_k^+ = 0 \Rightarrow V_k \geq V_k^0;$$

$$2) \text{ если } Q_k = Q_k^+, dV_k^- = 0 \text{ и } dV_k^+ \geq 0 \Rightarrow V_k \leq V_k^0;$$

$$3) \text{ если } Q_k^- < Q_k < Q_k^+, dV_k^- = 0 \text{ и } dV_k^+ = 0 \Rightarrow V_k = V_k^0.$$

Таким образом, смешанные комплементарные ограничения (13) моделируют систему АРВ генераторных узлов для задачи оптимизации (1)-(10) точно так же, как при расчете установившихся режимов.

Обычно предпочтительно избегать введения дополнительных переменных в решаемую задачу. Так в случае (13) введение положительных переменных dV_k^+ и dV_k^- можно исключить, если эту систему реорганизовать следующим образом:

$$Q_k^- \leq Q_k \leq Q_k^+; \quad (14a)$$

$$V_k = V_k^0 + dV_k ; \quad (14б)$$

$$(Q_k - Q_k^-)dV_k \leq 0 ; \quad (14в)$$

$$(Q_k - Q_k^+)dV_k \leq 0 . \quad (14г)$$

Эквивалентность между исходными системами (13) и (14) можно объяснить следующим образом:

- 1) если для некоторого k : $Q_k^- < Q_k < Q_k^+$, тогда $Q_k - Q_k^- > 0$ в (14в) $\Rightarrow dV_k \leq 0$ и $Q_k - Q_k^+ < 0$ в (14г) $\Rightarrow dV_k \geq 0$, поэтому $dV_k = 0$ и $V_k = V_k^0$;
- 2) если для некоторого k : $Q_k = Q_k^-$, тогда $(Q_k - Q_k^-)dV_k = 0$ в (14в) для любого dV_k и $Q_k - Q_k^+ < 0$ в (14г) $\Rightarrow dV_k \geq 0$, поэтому $dV_k \geq 0$ и $V_k \geq V_k^0$;
- 3) если для некоторого k : $Q_k = Q_k^+$, тогда $Q_k - Q_k^- > 0$ в (14в) $\Rightarrow dV_k \leq 0$ и $(Q_k - Q_k^+)dV_k = 0$ в (14г) для любого dV_k , поэтому $dV_k \leq 0$ и $V_k \leq V_k^0$.

Таким образом, если в задаче оптимизации используются комплементарные ограничения в форме (13), величина напряжения V_k определяется с помощью двух положительных переменных dV_k^+ и dV_k^- . Если реализуется (14), то требуется только одна переменная dV_k , которая может принимать нулевое, положительное или отрицательное значение в зависимости от текущего режима.

Основное преимущество использования комплементарных ограничений для моделирования генераторных узлов, оснащенных системой АРВ, состоит не только в том, что с их помощью в задаче оптимизации генераторы моделируются аналогично обычной задаче расчета потокораспределения, но также в том, что с их помощью задача оптимизации может также получать решения даже в том случае, когда расчетный ПР будет соответствовать ЛИБ [194].

Рассмотрим задачу оптимального потокораспределения (1)-(10), когда генераторы, оснащенные системой АРВ, моделируются с помощью комплементарных ограничений (13), или (14). Заметим, что для стандартной задачи оптимального потокораспределения пределы мощности по сечениям (9) задаются, чтобы обеспечить требуемый коэффициент запаса статической устойчивости, полученный на основе многочисленных расчетов УР ЭС. В НЛПР модели эти пределы могут не задаваться, т.к. они являются следствием результатов расчета ПР.

Для сокращения записи представим совокупность ограничений (8)-(10), также как используемые комплементарные ограничения (13), или (14) в общем виде:

$$G(\delta, V) \leq 0, \quad (15)$$

и сформируем функцию Лагранжа такой задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} L = & f(P, Q) - \Delta P(P, \delta, V)^T \lambda^P - \Delta P_b(P_b, \delta, V) \lambda_b^P - \Delta Q(Q, \delta, V)^T \lambda^Q + \\ & + \sum (P_m^- - P_m) \gamma_m^{P^-} + \sum (P_m - P_m^+) \gamma_m^{P^+} + \sum (Q_m^- - Q_m) \gamma_m^{Q^-} + \\ & + \sum (Q_m - Q_m^+) \gamma_m^{Q^+} + G(\delta, V)^T \mu, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\gamma_m^{P^-}$ - $\gamma_m^{Q^+}$ представляют собой множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (5)-(7), и μ - вектор множителей Лагранжа, отвечающий векторному неравенству (15).

Уравнения оптимальности для этой задачи могут быть представлены в следующем виде:

$$\partial L / \partial P_m = \partial f / \partial P_m - \lambda_m^P - \gamma_m^{P^-} + \gamma_m^{P^+} = 0; \quad (17a)$$

$$\partial L / \partial P_b = \partial f / \partial P_b - \lambda_b^P = 0; \quad (17б)$$

$$\partial L / \partial Q_m = \partial f / \partial Q_m - \lambda_m^Q - \gamma_m^{Q^-} + \gamma_m^{Q^+} = 0; \quad (17в)$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\delta} L \\ \nabla_V L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda_b^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial G / \partial \delta^T \\ \partial G / \partial V^T \end{bmatrix} \mu = 0; \quad (17г)$$

$$\nabla_{\lambda^P} L = -\Delta P(P, \delta, V) = 0; \quad (17д)$$

$$\partial L / \partial \lambda_b^p = -\Delta P_b(P_b, \delta, V) = 0; \quad (17e)$$

$$\nabla_{\lambda^Q} L = -\Delta Q(Q, \delta, V) = 0; \quad (17ж)$$

$$(P_m^- - P_m) \gamma_m^{P^-} = 0, \quad \gamma_m^{P^-} \geq 0; \quad (17з)$$

$$(P_m - P_m^+) \gamma_m^{P^+} = 0, \quad \gamma_m^{P^+} \geq 0; \quad (17и)$$

$$(Q_m^- - Q_m) \gamma_m^{Q^-} = 0, \quad \gamma_m^{Q^-} \geq 0; \quad (17к)$$

$$(Q_m - Q_m^+) \gamma_m^{Q^+} = 0, \quad \gamma_m^{Q^+} \geq 0; \quad (17л)$$

$$\text{diag}(\mu)G(\delta, V) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad (17м)$$

где $\text{diag}(\mu)$ - диагональная матрица, в которой диагональные элементы равны соответствующим элементам вектора μ .

Если мощность балансирующего узла не входит в целевую функцию, то согласно (17б)

$$\partial L / \partial P_b = -\lambda_b^p = 0. \quad (17н)$$

В свою очередь, согласно (17з)-(17л): $\gamma_m^{P^-} = \gamma_m^{P^+} = 0$, когда $P_m^- < P_m < P_m^+$, и $\gamma_m^{Q^-} = \gamma_m^{Q^+} = 0$, когда $Q_m^- < Q_m < Q_m^+$. В этом случае (17а) и (17в) переписутся следующим образом:

$$\partial f / \partial P_m = \lambda_m^p; \quad (17о)$$

$$\partial f / \partial Q_m = \lambda_m^Q. \quad (17п)$$

Решение рассматриваемой задачи определяется используемой функцией цели (1), некоторые возможные виды которой будут рассмотрены в последующих главах. Отметим только, что эта целевая функция может включать управляющие воздействия, например мощности узлов. Так как узловые мощности являются отдельными слагаемыми в уравнениях баланса мощностей, в условиях оптимальности первого порядка они будут присутствовать только в этих уравнениях (17д)-(17ж), а также, возможно, в (17о)-(17п). Поэтому согласно (17о)-(17п), в случае сепарабельной целевой функции, управляющие воздействия будут определяться только соответствующими множителями Лагранжа λ задачи оптимизации. Но что представляет собой вектор неопределенных множителей Лагранжа λ задачи

оптимального потокораспределения с ограничениями неравенствами (15)? Анализ (17г) позволяет ответить на этот вопрос.

Если ограничение в форме неравенства не является активным в точке решения, значит, оно не повлияло на полученное решение, может быть проигнорировано и исключено из системы (15). Поэтому рассмотрим только активные ограничения:

$$G^a(\delta, V) = 0. \quad (18)$$

Тогда линеаризованные уравнения (17д)-(17ж), (18) и (17г) в точке решения можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta P_b \\ \Delta Q \end{bmatrix} = 0; \quad (19a)$$

$$-\begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^p \\ \lambda_b^p \\ \lambda^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial G^a / \partial \delta^T \\ \partial G^a / \partial V^T \end{bmatrix} \mu^a = 0; \quad (19б)$$

$$\begin{bmatrix} \partial G^a / \partial \delta \\ \partial G^a / \partial V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = 0. \quad (19в)$$

Если умножить (19в) слева на вектор – строку μ^{aT} , затем из полученного выражения вычистить (19а), умноженное слева на вектор-строку λ^T , можно получить

$$-\begin{bmatrix} \lambda^p \\ \lambda_b^p \\ \lambda^q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta P_b \\ \Delta Q \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \lambda^p \\ \lambda_b^p \\ \lambda^q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta P_b / \partial \delta & \partial \Delta P_b / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix} + \mu^{aT} \begin{bmatrix} \partial G^a / \partial \delta \\ \partial G^a / \partial V \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = 0, \quad (19г)$$

что, с учетом (19б) дает

$$\lambda^{pT} \Delta P + \lambda_b^p \Delta P_b + \lambda^{qT} \Delta Q = 0. \quad (19д)$$

Это уравнение является уравнением гиперплоскости в пространстве мощностей, если генераторные узлы моделируются, как при обычном расчете потокораспределения. Следовательно, это уравнение определяет вектор λ как вектор нормали некоторой гиперповерхности, отвечающей

этой касательной гиперплоскости. Но что представляет собой эта гиперповерхность?

Если в точке решения нет ни одного активного ограничения в форме неравенства, тогда $\mu=0$ и (19б) можно представить как (3.2.14), поэтому гиперповерхность будет соответствовать ГМ ЭС. Так как в этом случае также должно выполняться (17н), матрица Якоби потокораспределения (3.2.24) будет вырожденной, что соответствует полученному ПР, и эта гиперповерхность будет гиперповерхностью предельных режимов ОСР в пространстве мощностей.

Если в точке решения имеются активные ограничения, тогда $\mu \neq 0$, поэтому представим систему (19б) в следующем виде

$$[J]^T \begin{bmatrix} \lambda^p \\ \lambda^e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V} \end{bmatrix}^T \lambda_b^p + \begin{bmatrix} \partial G^a / \partial \delta^T \\ \partial G^a / \partial V^T \end{bmatrix} \mu^a, \quad (19е)$$

где

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial \Delta P / \partial \delta & \partial \Delta P / \partial V \\ \partial \Delta Q / \partial \delta & \partial \Delta Q / \partial V \end{bmatrix} \quad (19ж)$$

является матрицей Якоби потокораспределения с балансирующим узлом b . В точке решения возможны два случая – когда матрица Якоби (19ж) вырожденная, или нет.

В случае, когда матрица Якоби невырожденная, полученный режим не будет предельным по условиям существования или статической устойчивости. Он будет предельным с точки зрения активных ограничений – неравенств (18). Т.к. матрица Якоби невырожденная, множители Лагранжа λ^p и λ^e можно получить непосредственно из системы (19е) с учетом (17н)

$$\begin{bmatrix} \lambda^p \\ \lambda^e \end{bmatrix} = [N^a] \mu^a = \sum N_i^a \mu_i^a, \quad (19з)$$

где

$$[N^a] = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial G^a}{\partial \delta} & \frac{\partial G^a}{\partial V} \end{bmatrix} [J]^{-1} \right)^T, \quad (19и)$$

и $[N_i^a]$ - i -й столбец матрицы $[N^a]$.

Вектор $[N_i^a]$ в (19з) является вектором нормали гиперповерхности активного ограничения-неравенства:

$$G_i^a(\delta, V) = 0, \quad (19к)$$

в пространстве мощностей ОСР. Действительно, линеаризация (19к) дает

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_i^a}{\partial \delta} & \frac{\partial G_i^a}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19л)$$

В свою очередь, линеаризация (17д) и (17ж) дает

$$[J] \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19м)$$

Решение (19м) относительно углов и модулей напряжений с последующей подстановкой в (19л) дает

$$[N_i^a]^T \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = 0, \quad (19н)$$

где

$$[N_i^a] = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial G_i^a}{\partial \delta} & \frac{\partial G_i^a}{\partial V} \end{bmatrix} [J]^{-1} \right)^T. \quad (19о)$$

Уравнение (19н) представляет собой уравнение касательной гиперплоскости к гиперповерхности активного ограничения – неравенства (19к) в пространстве мощностей ОСР. Следовательно, вектор $[N_i^a]$ является вектором нормали этой гиперповерхности. Поэтому в первом случае согласно (19з) вектор множителей Лагранжа λ не будет вектором нормали гиперповерхности мощностей ЭС и вектором нормали гиперповерхности предельных режимов в пространстве мощностей ОСР, этот вектор будет линейной комбинацией векторов нормалей (19з) гиперповерхностей активных ограничений – неравенств в точке решения.

Во втором случае, т.е. когда матрица Якоби в точке решения вырождена, полученный режим будет предельным по условиям существования, или статической устойчивости, а также предельным с точки

зрения активных ограничений – неравенств (18). В этом случае, используя полученное раннее свойство предельных режимов, а именно что надлежащая смена БУ в ПР делает режим неопредельным, предположим, что такая замена выполнена и рассмотрим систему (19е) с невырожденной матрицей Якоби в левой части. В этом случае вектор λ^P и λ^Q может быть получен из (19е) в следующем виде

$$\begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^Q \end{bmatrix} = \lambda^N + [N^a] \mu^a = \lambda^N + \sum N_i^a \mu_i^a, \quad (19п)$$

где

$$\lambda^N = - \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_b}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P_b}{\partial V} \end{bmatrix} [J]^{-1} \right)^T \lambda_b^P, \quad (19р)$$

а $[N^a]$ и $[N_i^a]$ в (19п) те же самые, что в (19и) и (19о) соответственно.

Сравнение (19р) с (3.2.20) показывает, что вектор λ^N есть вектор нормали ГМ. В свою очередь, используя рассуждения, аналогичные представленным выше, можно показать, что вектор $[N_i^a]$ в (19п) является вектором нормали гиперповерхности активного ограничения (19к) в пространстве мощностей ОСР. Поэтому во втором случае согласно (19п), вектор λ будет линейной комбинацией вектора нормали ГМ и векторов нормалей (19з) гиперповерхностей активных ограничений – неравенств в точке решения.

3.5 Метод внутренней точки НЛПР модели

НЛПР модель относится к задаче условной оптимизации со многими переменными и с ограничениями как в форме равенств, так и неравенств. Хотя теория нелинейного программирования довольно хорошо разработана, однако до сих пор не предложен универсальный и надежный метод условной оптимизации, гарантирующий получение глобального оптимума для любой задачи нелинейного программирования. Как следствие, в существующей литературе предложены десятки методов нелинейного

программирования, на один или два порядка больше, чем для решения систем нелинейных уравнений, причем существующие методы нелинейного программирования ограничиваются поиском локального оптимума и не всегда достаточно хорошо работают в некоторых случаях. Главным затруднением для большинства методов является учет ограничений в форме неравенств. Заранее, до получения решения, неизвестно, какие ограничения неравенства будут активны в точке решения, а выявление активных и неактивных ограничений в процессе решения – процедура неоднозначная и вычислительно затратная.

Так как не существует универсального и надежного метода условной оптимизации, для конкретных задач могут подходить одни методы и плохо работать другие. В электроэнергетике применение методов нелинейного программирования для решения задач оптимального потокораспределения началось сравнительно давно – в 50-х годах прошлого века. Поэтому из всего большого разнообразия существующих методов условной оптимизации уже выявлены вычислительно эффективные методы, успешно реализованные в компьютерных программах оптимального потокораспределения или оценки состояния. В России наибольший вклад в этой области внесли П.И. Бартоломей, А.З. Гамм, В.М. Горштейн, Л.А. Крумм, В.Г. Неуймин и др. За рубежом – J. Carpentier, H.W. Dommel, W.F. Tinney и др. По сути дела, существует не так много методов, используемых для расчета оптимального потокораспределения ЭС или оценки состояния. Первоначально из-за неразвитости вычислительной техники и методов нелинейного программирования, для решения задачи оптимального потокораспределения довольно длительное время развивался и использовался в основном метод приведенного градиента. Конечно, предлагались и другие методы, довольно подробный обзор которых представлен в [111]. Однако большинство предложенных методов не нашло практического применения из-за небольшой вычислительной эффективности. Только в середине 80-х годов прошлого века, на основе

подхода, предложенного индийским исследователем Кармакар (Karmakar) для решения задачи линейного программирования, который, в отличие от симплекс метода [358], гарантировал получение решения за полиномиальное время (правда, потом оказалось, что коэффициенты у полиномов достаточно высокие и в большинстве случаев симплекс метод работает быстрее), была разработана довольно удачная модификация метода барьерной функции, иногда называемая методом внутреннего штрафа, получившая название метода внутренней точки. В настоящее время в большинстве, если не во всех современных компьютерных программах, используются те или иные модификации метода внутренней точки [363].

Вкратце, метод внутренней точки использует ту же первоначальную стратегию, что и симплекс метод – все ограничения в форме неравенств преобразуются в соответствующие ограничения в форме равенств за счет введения дополнительных положительных переменных. Кроме этого, к функции цели добавляется барьерная функция – минус сумма логарифмов введенных положительных переменных с весовым множителем μ , который по той или иной стратегии уменьшается практически до нуля в конце итерационного процесса. Барьерная функция препятствует выходу из допустимой области. В методе внутренней точки, как и в симплекс методе, выполняется процедура регулировки длины шага, но так, чтобы гарантировать строго положительные значения вспомогательных переменных, поскольку логарифм нуля не существует. Метод внутренней точки довольно успешно применяется в современной практике для решения задач оптимального потокораспределения ЭС или оценки состояния [13], [94]. При удачной стратегии выбора весового множителя μ барьерной функции этот метод обеспечивает довольно быструю и надежную сходимость к решению за счет движения внутри, а не по границе допустимой области. Однако, если метод внутренней точки сильно приблизится к границе, он будет вести себя так же, как симплекс метод. В

этом случае количество итераций значительно возрастает, иногда превышая 100.

Для формирования вычислительной НЛПР модели, реализующей метод внутренней точки, воспользуемся стандартной записью задачи нелинейного программирования [14], сгруппировав переменные и представив уравнения (3.4.1)-(3.4.10), (3.4.13)|(3.4.14) в следующем виде:

$$f(y) \rightarrow \min \quad (1a)$$

при условиях

$$\Delta h(x, y, z) = 0; \quad (1б)$$

$$g^- \leq g(x) \leq g^+; \quad (1в)$$

$$\psi(z, x) \leq 0; \quad (1г)$$

$$y^- \leq y \leq y^+; \quad (1д)$$

$$z^- \leq z \leq z^+; \quad (1е)$$

$$x^- \leq x \leq x^+. \quad (1ж)$$

Здесь x - вектор фазовых углов и модулей напряжений; y - активные мощности узлов и реактивные мощности PQ узлов; z - реактивные мощности генераторных узлов; (1б) – вектор-функции УУР; (1в) – сетевые ограничения перетока активной мощности в контролируемых сечениях, токов в линиях; (1г) – вектор-функции комплементарных ограничений (3.4.13) или (3.4.14); верхними индексами «+» и «-» помечены верхние и нижние пределы переменных.

Для метода внутренней точки система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y) - \mu \sum \ln g_s^+ - \mu \sum \ln g_s^- - \mu \sum \ln x_s^+ - \mu \sum \ln x_s^- \\ & - \mu \sum \ln y_s^+ - \mu \sum \ln y_s^- - \mu \sum \ln \psi_s \end{aligned} \quad (2a)$$

при условиях

$$\Delta h(x, y, z) = 0; \quad (2б)$$

$$\Delta g(g, x) = g(x) - g = 0; \quad (2в)$$

$$\Delta \psi(z, x, \psi_s) = \psi(z, x) + \psi_s = 0; \quad (2г)$$

$$g - g^+ + g_s^+ = 0; \quad -g + g^- + g_s^- = 0; \quad (2д)$$

$$x - x^+ + x_s^+ = 0; \quad -x + x^- + x_s^- = 0; \quad (2е)$$

$$y - y^+ + y_s^+ = 0; \quad -y + y^- + y_s^- = 0; \quad (2ж)$$

$$z - z^+ + z_s^+ = 0; \quad -z + z^- + z_s^- = 0. \quad (2з)$$

Здесь нижним индексом s (slack) отмечены положительные переменные, дополнительно введенные для приведения ограничений в форме неравенств в форму равенств.

Сформируем функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = & f(y) - \mu \sum \ln g_s^+ - \mu \sum \ln g_s^- - \mu \sum \ln x_s^+ - \mu \sum \ln x_s^- + \\ & - \mu \sum \ln y_s^+ - \mu \sum \ln y_s^- - \mu \sum \ln \psi_s + \\ & + \Delta h(x, y, z)^T \lambda_h + \Delta g(g, x)^T \lambda_g + \Delta \psi(z, x, \psi_s)^T \lambda_\psi + \\ & + (g - g^+ + g_s^+)^T \gamma_g^+ + (-g + g^- + g_s^-)^T \gamma_g^- + (x - x^+ + x_s^+)^T \gamma_x^+ + \\ & + (-x + x^- + x_s^-)^T \gamma_x^- + (y - y^+ + y_s^+)^T \gamma_y^+ + (-y + y^- + y_s^-)^T \gamma_y^- + \\ & + (z - z^+ + z_s^+)^T \gamma_z^+ + (-z + z^- + z_s^-)^T \gamma_z^-. \end{aligned} \quad (3)$$

Необходимые условия оптимальности – равенство нулю градиента функции Лагранжа по всем переменным задачи:

$$\nabla_y L = \nabla_y f + \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial y} \right]^T \lambda_h + \gamma_y^+ - \gamma_y^- = 0; \quad (4а)$$

$$\nabla_z L = \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right]^T \lambda_h + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T \lambda_\psi + \gamma_z^+ - \gamma_z^- = 0; \quad (4б)$$

$$\nabla_x L = \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \lambda_h + \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \lambda_g + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T \lambda_\psi + \gamma_x^+ - \gamma_x^- = 0; \quad (4в)$$

$$\nabla_g L = -\lambda_g + \gamma_g^+ - \gamma_g^- = 0; \quad (4г)$$

$$\nabla_{\lambda_h} L = \Delta h(x, y, z) = 0; \quad (4д)$$

$$\nabla_{\lambda_g} L = \Delta g(g, x) = 0; \quad (4е)$$

$$\nabla_{\lambda_\psi} L = \Delta \psi(x, z, \psi_s) = \psi(x, z) + \psi_s = 0; \quad (4ж)$$

$$\nabla_{\gamma_g^+} L = g - g^+ + g_s^+ = 0; \quad \nabla_{\gamma_g^-} L = -g + g^- + g_s^- = 0; \quad (4з)$$

$$\nabla_{\gamma_x^+} L = x - x^+ + x_S^+ = 0; \quad \nabla_{\gamma_x^-} L = -x + x^- + x_S^- = 0; \quad (4и)$$

$$\nabla_{\gamma_y^+} L = y - y^+ + y_S^+ = 0; \quad \nabla_{\gamma_y^-} L = -y + y^- + y_S^- = 0; \quad (4к)$$

$$\nabla_{\gamma_z^+} L = z - z^+ + z_S^+ = 0; \quad \nabla_{\gamma_z^-} L = -z + z^- + z_S^- = 0; \quad (4л)$$

$$\nabla_{g_S^+} L = -\mu[G_+]^{-1} e + \gamma_g^+ = 0; \quad \nabla_{g_S^-} L = -\mu[G_-]^{-1} e + \gamma_g^- = 0; \quad (4м)$$

$$\nabla_{x_S^+} L = -\mu[X_+]^{-1} e + \gamma_x^+ = 0; \quad \nabla_{x_S^-} L = -\mu[X_-]^{-1} e + \gamma_x^- = 0; \quad (4н)$$

$$\nabla_{y_S^+} L = -\mu[Y_+]^{-1} e + \gamma_y^+ = 0; \quad \nabla_{y_S^-} L = -\mu[Y_-]^{-1} e + \gamma_y^- = 0; \quad (4о)$$

$$\nabla_{z_S^+} L = -\mu[Z_+]^{-1} e + \gamma_z^+ = 0; \quad \nabla_{z_S^-} L = -\mu[Z_-]^{-1} e + \gamma_z^- = 0; \quad (4п)$$

$$\nabla_{\psi_S} L = -\mu[\Psi]^{-1} e + \lambda_\psi = 0, \quad (4р)$$

где $e = [1, 1, \dots, 1]^T$, $[G_+] = \text{diag}(g_S^+)$, $[G_-] = \text{diag}(g_S^-)$, $[X_+] = \text{diag}(x_S^+)$, $[X_-] = \text{diag}(x_S^-)$, $[Y_+] = \text{diag}(y_S^+)$, $[Y_-] = \text{diag}(y_S^-)$, $[Z_+] = \text{diag}(z_S^+)$, $[Z_-] = \text{diag}(z_S^-)$

Переменные y и z соответствуют мощностям узлов, которые входят в уравнения баланса мощностей аддитивно, поэтому $\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial y} \right]^T \lambda_h = \pm \lambda_{h_y}$ и

$\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right]^T \lambda_h = \pm \lambda_{h_z}$. Здесь знак «+» соответствует нагрузке, «-» – генерации.

Поэтому первые два уравнения можно записать в виде:

$$\nabla_y L = \nabla_y f \pm \lambda_{h_y} + \gamma_y^+ - \gamma_y^- = 0; \quad (5а)$$

$$\nabla_z L = \pm \lambda_{h_z} + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T \lambda_\psi + \gamma_z^+ - \gamma_z^- = 0. \quad (5б)$$

Обычно в методе внутренней точки (4м)-(4р) представляется в виде:

$$[G_+] \gamma_g^+ = \mu e; \quad [G_-] \gamma_g^- = \mu e; \quad [X_+] \gamma_x^+ = \mu e; \quad [X_-] \gamma_x^- = \mu e; \quad (6а)$$

$$[Y_+] \gamma_y^+ = \mu e; \quad [Y_-] \gamma_y^- = \mu e; \quad [Z_+] \gamma_z^+ = \mu e; \quad [Z_-] \gamma_z^- = \mu e; \quad [\Psi] \lambda_\psi = \mu e. \quad (6б)$$

Это позволяет трактовать (4а) – (4л) с (6) как условия оптимальности Куна-Такера задачи нелинейного программирования (4), возмущенные параметром μ .

Выполним линеаризацию системы нелинейных уравнений (5), (4в)-(4л)

$$\text{и (6), учитывая, что } \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial y} \right] \Delta y = \begin{bmatrix} \pm \Delta y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial z} \right] \Delta z = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm \Delta z \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\nabla_{yy}^2 f \right] \Delta y \pm \Delta \lambda_{n_y} + \Delta \gamma_y^+ - \Delta \gamma_y^- = -\nabla_y L; \quad (7a)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z^2} \right] \Delta z + \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z \partial x} \right] \Delta x \pm \Delta \lambda_{n_z} + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T \Delta \lambda_\psi + \Delta \gamma_z^+ - \Delta \gamma_z^- = -\nabla_z L; \quad (7б)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x \partial z} \right] \Delta z + \left(\left[\frac{\partial^2 \Delta h^T \lambda_h}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta g^T \lambda_g}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x^2} \right] \right) \Delta x + \quad (7в)$$

$$+ \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_h + \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_g + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_\psi + \Delta \gamma_x^+ - \Delta \gamma_x^- = -\nabla_x L;$$

$$-\Delta \lambda_g + \Delta \gamma_g^+ - \Delta \gamma_g^- = -\nabla_g L; \quad (7г)$$

$$\begin{bmatrix} \pm \Delta y \\ \pm \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right] \Delta x = -\Delta h; \quad (7д)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right] \Delta x - \Delta g = -\Delta g(x); \quad (7е)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right] \Delta z + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right] \Delta x + \Delta \psi_S = -\Delta \psi; \quad (7ж)$$

$$\Delta y + \Delta y_S^+ = -y + y^+ - y_S^+; \quad -\Delta y + \Delta y_S^- = y - y^- - y_S^-; \quad (7з)$$

$$\Delta x + \Delta x_S^+ = -x + x^+ - x_S^+; \quad -\Delta x + \Delta x_S^- = x - x^- - x_S^-; \quad (7и)$$

$$\Delta g + \Delta g_S^+ = -g + g^+ - g_S^+; \quad -\Delta g + \Delta g_S^- = g - g^- - g_S^-; \quad (7к)$$

$$\Delta z + \Delta z_S^+ = -z + z^+ - z_S^+; \quad -\Delta z + \Delta z_S^- = z - z^- - z_S^-; \quad (7л)$$

$$\left[Y_+ \right] \Delta \gamma_y^+ + \left[\Gamma_y^+ \right] \Delta y_S^+ = \mu e - \left[Y_+ \right] \gamma_y^+; \quad \left[Y_- \right] \Delta \gamma_y^- + \left[\Gamma_x^- \right] \Delta y_S^- = \mu e - \left[Y_- \right] \gamma_y^-; \quad (7м)$$

$$\left[X_+ \right] \Delta \gamma_x^+ + \left[\Gamma_x^+ \right] \Delta x_S^+ = \mu e - \left[X_+ \right] \gamma_x^+; \quad \left[X_- \right] \Delta \gamma_x^- + \left[\Gamma_x^- \right] \Delta x_S^- = \mu e - \left[X_- \right] \gamma_x^-; \quad (7н)$$

$$\left[Z_+ \right] \Delta \gamma_z^+ + \left[\Gamma_z^+ \right] \Delta z_S^+ = \mu e - \left[Z_+ \right] \gamma_z^+; \quad \left[Z_- \right] \Delta \gamma_z^- + \left[\Gamma_z^- \right] \Delta z_S^- = \mu e - \left[Z_- \right] \gamma_z^-; \quad (7о)$$

$$\left[G_+ \right] \Delta \gamma_g^+ + \left[\Gamma_g^+ \right] \Delta g_S^+ = \mu e - \left[G_+ \right] \gamma_g^+; \quad \left[G_- \right] \Delta \gamma_g^- + \left[\Gamma_g^- \right] \Delta g_S^- = \mu e - \left[G_- \right] \gamma_g^-; \quad (7п)$$

$$\left[\Psi \right] \Delta \lambda_\psi + \left[\Gamma_\psi \right] \Delta \psi_S = \mu e - \left[\Psi \right] \lambda_\psi, \quad (7р)$$

где $[\Gamma_z^+]$, $[\Gamma_z^-]$ - диагональные матрицы с элементами вида $[\Gamma_z^+]_{kk} = \gamma_{z_k}^+$, $[\Gamma_z^-]_{kk} = \gamma_{z_k}^-$.

Важным свойством системы (7) является возможность непосредственного исключения вспомогательных и их двойственных переменных из линеаризованных уравнений без появления новых ненулевых элементов. Рассмотрим, например, вспомогательные z_S^+ , z_S^- и их двойственные переменные γ_z^+ , γ_z^- . Из линеаризованных уравнений (7л) и (7о) можно получить:

$$\Delta z_S^+ = -\Delta z - z + z^+ - z_S^+; \quad \Delta z_S^- = \Delta z + z - z^- - z_S^-;$$

$$\Delta \gamma_z^+ = [\Gamma Z_+] \Delta z + [\Gamma Z_+](z - z^+) + \mu [Z_+]^{-1} e;$$

$$\Delta \gamma_z^- = -[\Gamma Z_-] \Delta z - [\Gamma Z_-](z - z^-) + \mu [Z_-]^{-1} e,$$

где $[\Gamma Z_+] = [Z_+]^{-1} [\Gamma_z^+]$; $[\Gamma Z_-] = [Z_-]^{-1} [\Gamma_z^-]$. Поэтому

$$\Delta \gamma_z = \Delta \gamma_z^+ - \Delta \gamma_z^- = [\Gamma Z] \Delta z + dZ,$$

где $[\Gamma Z] = [\Gamma Z_+] + [\Gamma Z_-]$; $dZ = [\Gamma Z_+](z - z^+) + [\Gamma Z_-](z - z^-) + \mu [Z_+]^{-1} e - \mu [Z_-]^{-1} e$.

Используя аналогичные преобразования для других вспомогательных и соответствующих двойственных переменных, и подставляя полученные соотношения в линеаризованные уравнения, можно получить следующую скорректированную систему линеаризованных уравнений:

$$(\nabla_{yy}^2 f + [\Gamma Y]) \Delta y \pm \Delta \lambda_{h_y} = -\nabla_y L - dY; \quad (8a)$$

$$\left(\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z^2} \right] + [\Gamma Z] \right) \Delta z + \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z \partial x} \right] \Delta x \pm \Delta \lambda_{h_z} + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T \Delta \lambda_\psi = -\nabla_z L - dZ; \quad (8б)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x \partial z} \right] \Delta z + \left(\left[\frac{\partial^2 \Delta h^T \lambda_h}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta g^T \lambda_g}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x^2} \right] + [\Gamma X] \right) \Delta x +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_h + \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_g + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_\psi = -\nabla_x L - dX; \quad (8в)$$

$$\begin{bmatrix} \pm \Delta y \\ \pm \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right] \Delta x = -\Delta h; \quad (8\Gamma)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right] \Delta x - \Delta g = -\Delta g(x); \quad (8\Delta)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right] \Delta z + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right] \Delta x + \Delta \psi_s = -\Delta \psi; \quad (8\epsilon)$$

$$-\Delta \lambda_g + [\Gamma G] \Delta g = -\nabla_g L - dG; \quad (8\text{ж})$$

$$\Delta \lambda_\psi + [\Gamma \Psi] \Delta \psi_s = -(\lambda_\psi - \mu[\Psi]^{-1}) = -d\Psi. \quad (8з)$$

Исключение переменных Δz , Δy , $\Delta \psi_s$ и $\Delta \lambda_\psi$ из системы (8) позволяет получить итоговую СЛУ:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta h^T \lambda_h}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta g^T \lambda_g}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + [\Gamma X] + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T [\Gamma \Psi] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right] - [\overline{XZ}] [\overline{DZ^{-1}}] [\overline{ZX}] \right) \Delta x + \\ & + \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_h + [\overline{XZ}] [\overline{DZ^{-1}}] \Delta \lambda_{h_z} + \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \Delta \lambda_g \\ & = -(\nabla_x L + dX) - \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) + \\ & + [\overline{XZ}] [\overline{DZ^{-1}}] \left((\nabla_z L + dZ) + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \right) = \\ & = -(\nabla_x L + dX) - \left(\left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T - [\overline{XZ}] [\overline{DZ^{-1}}] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T \right) ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \\ & + [\overline{XZ}] [\overline{DZ^{-1}}] (\nabla_z L + dZ); \\ & \left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T + \begin{bmatrix} 0 \\ [\overline{DZ^{-1}}] [\overline{ZX}] \\ 0 \end{bmatrix} \Delta x - \begin{pmatrix} (\nabla_{yy}^2 f + [\Gamma Y])^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [\overline{DZ^{-1}}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta \lambda_h = \end{aligned}$$

$$= -\Delta h \pm \left[\begin{array}{c} (\nabla_{yy}^2 f + [\Gamma Y])^{-1} (\nabla_y L + dY) \\ [DZ^{-1}] \left((\nabla_z L + dZ) + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \right) \\ 0 \end{array} \right];$$

$$\left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right] \Delta x - [\Gamma G]^{-1} \Delta \lambda_g = -\Delta g(x) - [\Gamma G]^{-1} (\nabla_g L - dG),$$

где

$$[DZ] = \left(\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z^2} \right] + [\Gamma Z] + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T [\Gamma \Psi] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right] \right);$$

$$[ZX] = \left(\left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial z \partial x} \right] + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T [\Gamma \Psi] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right] \right);$$

$$[XZ] = \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x \partial z} \right] + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T [\Gamma \Psi] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right],$$

которую можно представить в матричном виде:

$$\left[\begin{array}{c} \left(\left[\frac{\partial^2 \Delta h^T \lambda_h}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta g^T \lambda_g}{\partial x^2} \right] + [\Gamma X] \right) \\ + \left[\frac{\partial^2 \Delta \psi^T \lambda_\psi}{\partial x^2} \right] \\ + \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T [\Gamma \Psi] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right] - \\ - [XZ][DZ^{-1}][ZX] \\ \left(\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \mp \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \right) \\ \left(\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \mp \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \right) \\ \left(\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \mp \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \right) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left(\left[\frac{\partial \Delta h}{\partial x} \right]^T \mp \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T \right) \\ \mp \left(\begin{array}{cc} [0] & [0] \\ [XZ][DZ^{-1}] & [0] \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} (\nabla_{yy}^2 f + [\Gamma Y])^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [DZ^{-1}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{array} \right) \\ (0) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta x \\ \Delta \lambda_h \\ \Delta \lambda_g \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \nabla_x L + dX - [XZ][DZ^{-1}](\nabla_z L + dZ) + \\ \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) - \\ [XZ][DZ^{-1}] \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \\ (\nabla_{yy}^2 f + [\Gamma Y])^{-1} (\nabla_y L + dY) \\ (\nabla_z L + dZ) + \\ \left[\frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \\ [0] \end{array} \right) \\ \Delta h \mp \left[\frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right]^T ([\Gamma \Psi] \Delta \psi - d\Psi) \\ (\Delta g(x) + [\Gamma G]^{-1} (\nabla_g L + dG)) \end{array} \right]. \quad (9)$$

Назовем эту систему базисной. Расчетные выражения элементов базисной системы (9), реализующих ограничения в форме неравенств в терминах исходных переменных задачи (3.4.1)-(3.4.10), (3.4.13)|(3.4.14), представлены в Приложении Г.

После решения базисной системы (9) изменение остальных переменных, исключенных из исходной СЛУ (5) в процессе получения базисной системы (9), определяются из соответствующих линейных

соотношений Приложения Г. Новые значения переменных на следующей $i + 1$ -ой итерации будут:

$$\begin{aligned}\xi^{(i+1)} &= \xi^{(i)} + \alpha \Delta \xi^{(i)}; & \xi_S^{\pm(i+1)} &= \xi_S^{\pm(i)} + \alpha \Delta \xi_S^{\pm(i)}; & \gamma_{\xi}^{\pm(i+1)} &= \gamma_{\xi}^{\pm(i)} + \alpha \Delta \gamma_{\xi}^{\pm(i)}; \\ \lambda^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} + \alpha \Delta \lambda^{(i)}; & \psi_S^{(i+1)} &= \psi_S^{(i)} + \alpha \Delta \psi_S^{(i)},\end{aligned}$$

где $\xi \subset x, y, z, g$, а длина шага α определяется из условия положительности вспомогательных (с нижним индексом s) и их двойственных переменных

$$\alpha = \min[0.99995 \times \alpha_s, 1], \quad (10)$$

где, в свою очередь,

$$\alpha_s = \min \left[\min_{\Delta \xi_S^{\pm(i)} < 0} \frac{\xi_S^{\pm(i)}}{|\Delta \xi_S^{\pm(i)}|}, \min_{\Delta \gamma_{\xi}^{\pm(i)} < 0} \frac{\gamma_{\xi}^{\pm(i)}}{|\Delta \gamma_{\xi}^{\pm(i)}|}, \min_{\Delta \psi_S^{(i)} < 0} \frac{\psi_S^{(i)}}{|\Delta \psi_S^{(i)}|}, \min_{\Delta \lambda_{\psi}^{(i)} < 0} \frac{\lambda_{\psi}^{(i)}}{|\Delta \lambda_{\psi}^{(i)}|} \right].$$

При этом важно в ходе итерационного процесса обеспечить строгую положительность дополнительных и их двойственных переменных, поэтому в (10) используется множитель 0.99995. Корректируется также весовой коэффициент при барьерной функции:

$$\mu = \sigma \frac{\sum_{\xi} \xi_S^{\pm(i+1)T} \gamma_{\xi}^{\pm(i+1)} + \psi_S^{(i+1)T} \lambda_{\psi}^{(i+1)}}{\sum_{\xi} \dim \xi_S^{\pm} + \dim \psi_S}, \quad (11)$$

где $\sigma \in (0,1)$ - так называемый «центрирующий» параметр, обычно используется $\sigma = 0.2$; $\dim \xi_S^{\pm}$ - размерность вектора ξ_S^{\pm} .

3.6 Вычислительные аспекты реализации НЛПР модели

Анализ базисной системы линейных уравнений метода внутренней точки (3.5.9), решаемой на каждой итерации, показывает, что такая система может быть представлена в следующем матричном виде:

$$\begin{bmatrix} [\partial^2 \Delta h^T \lambda_h / \partial x^2 + dH] & [\partial \Delta h / \partial x + dJ]^T & [\partial \Delta g / \partial x]^T \\ [\partial \Delta h / \partial x + dJ] & -dD_h^{-1} & 0 \\ [\partial \Delta g / \partial x]^T & 0 & -dD_g^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda_h \\ \Delta \lambda_g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L + d\nabla_x L \\ \Delta h + d\Delta h \\ \Delta g + d\Delta g \end{bmatrix}. \quad (1a)$$

Здесь символ D соответствует диагональным подматрицам, а префиксом d указаны компоненты (подматрицы), добавленные в процессе получения базисной системы. Матрица системы (1а) является симметричной и разреженной. Если в решаемой задаче нелинейного программирования отсутствуют ограничения по потокам активной мощности по сечениям, то эту базисную систему (1а) можно еще больше редуцировать, не снижая ее разреженность, если из последнего уравнения (1а) выразить

$$\Delta\lambda_g = [dD_g] \left(\left[\frac{\partial\Delta g}{\partial x} \right] \Delta x + \Delta g + d\Delta g \right), \quad (1б)$$

и подставить в первое. В этом случае уменьшится размерность базисной системы без какого-либо увеличения заполнения ее подматриц, и эту базисную систему структурно можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} H & J^T \\ J & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda_h \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L' \\ \Delta h' \end{bmatrix}, \quad (2а)$$

где

$$[H] = \left[\partial^2 \Delta h^T \lambda_h / \partial x^2 \right] + [dH] + \left[\frac{\partial\Delta g}{\partial x} \right]^T [dD_g] \left[\frac{\partial\Delta g}{\partial x} \right]; \quad (2б)$$

$$[J] = \left[\partial\Delta h / \partial x \right] + [dJ]; \quad [D] = -[dD_h]^{-1}; \quad (2в)$$

$$\nabla_x L' = \nabla_x L + d\nabla_x L + \left[\frac{\partial\Delta g}{\partial x} \right]^T [dD_g] (\Delta g + d\Delta g); \quad \Delta h' = \Delta h + d\Delta h. \quad (2г)$$

Число уравнений и неизвестных СЛУ (2) только в два раза больше, чем для стандартной задачи расчета потокораспределения. Матрица этой системы является симметричной. Структура расположения ненулевых элементов подматриц $[H]$ и $[J]$ в точности соответствует структуре матрицы Якоби потокораспределения $[\partial\Delta h / \partial x]$, а подматрица $[D]$ является диагональной. Поэтому для ее решения можно воспользоваться подходом, рассмотренным в Приложении Б, т.е. СЛУ (2) и ее переменные группировать и записывать отдельно по узлам. Это позволяет представить матрицу СЛУ (2) в виде микроматриц, как при расчетах УР, но большего 4×4 размера, и работать с ними, как с элементарными объектами. В этом случае структура матрицы

СЛУ (2) будет полностью совпадать со структурой матрицы узловых проводимостей. Поэтому можно воспользоваться технологией Приложения Б для решения такой разреженной СЛУ. В случае, когда имеются ограничения активной мощности по сечениям, использование (1б) для них не позволяет представить матрицу СЛУ (2) в виде микроматриц, т.к. в результате подстановки (1б) в первое уравнение (1а), в матрице $[H]$ появятся новые ненулевые элементы, и ее структура не будет совпадать со структурой матрицы Якоби потокораспределения $[\partial\Delta h/\partial x]$. В таких случаях уравнение активной мощности по сечению лучше рассматривать как уравнение для псевдоузла, и работать с псевдоузлом как с обычным. Это позволяет редуцировать СЛУ (1а) аналогично (2), воспользоваться микроматрицами и технологией Приложения Б. С учетом сказанного, рассмотрим расчетные выражения матрицы (2) для УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат.

Компоненты функции Лагранжа, формирующие линеаризованные уравнения (2), можно представить в виде

$$L = \sum_k \Delta P_k \lambda_k^p + \sum_k \Delta Q_k \lambda_k^q + \sum_k \Delta S_k \lambda_k^s, \quad (3)$$

где ΔP_k и ΔQ_k - уравнение баланса активной и реактивной мощности в узле k , а ΔS_k - уравнение баланса активной мощности по сечению k . Напомним, что уравнение баланса активной мощности по сечению рассматривается как уравнение для псевдоузла.

Воспользовавшись выражениями обменных мощностей и их производных из Приложения Б, первые производные функции Лагранжа (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} &= \frac{\Delta P_k}{\partial \delta_k} \lambda_k^p + \sum_{m \neq k} \frac{\Delta P_m}{\partial \delta_k} \lambda_m^p + \frac{\Delta Q_k}{\partial \delta_k} \lambda_k^q + \sum_{m \neq k} \frac{\Delta Q_m}{\partial \delta_k} \lambda_m^q + \sum_g \frac{\partial \Delta S_g}{\partial \delta_k} \lambda_g^s = \\ &= \lambda_k^p \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^p - \lambda_k^q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^q + \sum_g \frac{\partial \Delta S_g}{\partial \delta_k} \lambda_g^s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial V_k} &= \frac{\Delta P_k}{\partial V_k} \lambda_k^P + \sum_{m \neq k} \frac{\Delta P_m}{\partial V_k} \lambda_m^P + \frac{\Delta Q_k}{\partial V_k} \lambda_k^Q + \sum_{m \neq k} \frac{\Delta Q_m}{\partial V_k} \lambda_m^Q + \sum_g \frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_k} \lambda_g^S = \\
&= \lambda_k^P \left(-2V_k G_{kk} - \sum_m P_{km} / V_k \right) - \sum_{m \neq k} \frac{P_{mk}}{V_k} \lambda_m^P + \lambda_k^Q \left(2V_k B_{kk} - \sum_m Q_{km} / V_k \right) \\
&\quad - \sum_{m \neq k} \frac{Q_{mk}}{V_k} \lambda_m^Q + \sum_g \frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_k} \lambda_g^S.
\end{aligned}$$

Тогда вторые производные функции Лагранжа будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k^2} &= \frac{\partial \left(\lambda_k^P \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^Q + \sum_g \frac{\partial \Delta S_g}{\partial \delta_k} \lambda_g^S \right)}{\partial \delta_k} = \\
&= \lambda_k^P \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^P + \lambda_k^Q \sum_m Q_{km} + \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^Q + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k^2} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial \delta_m} &= -\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial \delta_m} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial V_k} &= \frac{\lambda_k^P \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^Q}{V_k} + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial V_k} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial V_m} &= \frac{\lambda_k^P Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q P_{km} + P_{mk} \lambda_m^Q}{V_m} + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial V_m} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \delta_k} &= \frac{\lambda_k^P \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^Q}{V_k} + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial \delta_k} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \delta_m} &= \frac{-\lambda_k^P Q_{km} + Q_{mk} \lambda_m^P + \lambda_k^Q P_{km} - P_{mk} \lambda_m^Q}{V_k} + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial V_k^2} &= -2G_{kk} \lambda_k^P + 2B_{kk} \lambda_k^Q + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k^2} \lambda_g^S; \\
\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial V_m} &= \frac{-\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P - \lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q}{V_k V_m} + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_g^S.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица СЛУ (2) может быть представлена в виде следующих микроматриц:

Диагональный элемент: узел k

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^P} = \Delta P_k \\ \frac{\partial L}{\partial V_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k^2} \right] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial V_k} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} \right] \\ \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} \right] & [-d_k^P] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \right] & [0] \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \delta_k} \right] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k^2} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right] \\ \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} \right] & [0] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right] & [-d_k^Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_k \\ \Delta \lambda_k^P \\ \Delta V_k \\ \Delta \lambda_k^Q \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \left[\lambda_k^P \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^P + \right. \\ \left. + \lambda_k^Q \sum_m Q_{km} + \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^Q + \right. \\ \left. + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k^2} \lambda_g^S \right] \\ \left[\sum_m Q_{km} \right] \\ \left[\sum_m Q_{km} \right] \\ \left[\sum_m Q_{km} \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\sum_m Q_{km} \right] \\ [-d_k^P] \\ [-2V_k^2 G_{kk} - \sum_m P_{km}] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\lambda_k^P \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^P - \right. \\ \left. - \lambda_k^Q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^Q + \right. \\ \left. + \sum_g V_k \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial V_k} \lambda_g^S \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \\ \left[-2V_k^2 G_{kk} - \sum_m P_{km} \right] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_k \\ \Delta \lambda_k^P \\ \Delta V_k \\ \Delta \lambda_k^Q \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \left[\lambda_k^P \sum_m Q_{km} - \sum_{m \neq k} Q_{mk} \lambda_m^P - \right. \\ \left. - \lambda_k^Q \sum_m P_{km} + \sum_{m \neq k} P_{mk} \lambda_m^Q - \right. \\ \left. + \sum_g V_k \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial \delta_k} \lambda_g^S \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \\ \left[-\sum_m P_{km} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[-2V_k^2 G_{kk} - \right. \\ \left. - \sum_m P_{km} \right] \\ [0] \\ \left[2V_k^2 B_{kk} - \right. \\ \left. - \sum_m Q_{km} \right] \\ \left[2V_k^2 B_{kk} - \sum_m Q_{km} \right] \\ \left[-d_k^Q \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_k \\ \Delta \lambda_k^P \\ \Delta V_k \\ \Delta \lambda_k^Q \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

Взаимный элемент: узел k - узел m

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^P} = \Delta P_k \\ \frac{\partial L}{\partial V_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial \delta_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta P_m}{\partial \delta_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial V_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_k} \right] \\ \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} \right] & [0] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} \right] & [0] \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \delta_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial V_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \right] \\ \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \right] & [0] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \right] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_m \\ \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P \\ -\lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial \delta_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [-Q_{mk}] & \begin{bmatrix} \frac{\lambda_k^P Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^P}{V_m} \\ -\lambda_k^Q P_{km} + P_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial V_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [P_{mk}] \\ [-Q_{km}] & [0] & [-P_{km}/V_m] & [0] \\ \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_k^P Q_{km} + Q_{mk} \lambda_m^P}{V_k} \\ + \lambda_k^Q P_{km} - P_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [-\frac{P_{mk}}{V_k}] & \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P}{V_k V_m} \\ -\lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [-\frac{Q_{mk}}{V_k}] \\ [P_{km}] & [0] & [-Q_{km}/V_m] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_m \\ \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix}.$$

Взаимный элемент: узел k - базисный узел m

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^P} = \Delta P_k \\ \frac{\partial L}{\partial V_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_m}{\partial \delta_k} \\ [0] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_k \partial V_m} \\ \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial V_m} \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_k} \\ [0] \\ \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \\ [0] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [-Q_{mk}] & \begin{bmatrix} \frac{\lambda_k^P Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^P}{V_m} \\ -\lambda_k^Q P_{km} + P_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial \delta_k \partial V_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [P_{mk}] \\ [0] & [-P_{km}/V_m] & [0] \\ [-\frac{P_{mk}}{V_k}] & \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P}{V_k V_m} \\ -\lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_g^S \end{bmatrix} & [-\frac{Q_{mk}}{V_k}] \\ [0] & [-Q_{km}/V_m] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix}.$$

Диагональный элемент: базисный узел k

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^P} = \Delta P_k \\ \frac{\partial L}{\partial V_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [-d_k^P] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \right] & [0] \\ \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k^2} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right] \\ [0] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right] & [-d_k^Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_k^P \\ \Delta V_k \\ \Delta \lambda_k^Q \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} [-d_k^P] & \left[-2V_k G_{kk} - \sum_m \frac{P_{km}}{V_k} \right] & [0] \\ \left[-2V_k G_{kk} - \sum_m \frac{P_{km}}{V_k} \right] & \left[-2G_{kk} \lambda_k^P + 2B_{kk} \lambda_k^Q + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k^2} \lambda_g^S \right] & \left[2V_k^2 B_{kk} - \sum_m \frac{Q_{km}}{V_k} \right] \\ [0] & \left[2V_k B_{kk} - \sum_m \frac{Q_{km}}{V_k} \right] & [-d_k^Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_k^P \\ \Delta V_k \\ \Delta \lambda_k^Q \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Базисным узлом может быть любой узел. Для него фиксируется угол $\delta_b=0$. Если активная и реактивная мощности этого узла не участвуют в процессе оптимизации, точнее, если на них не накладывается ограничений, то $d_k^P = d_k^Q = 0$ и микроматрица будет вырожденной. Поэтому для страховки от обращения вырожденной микроматрицы базисный узел должен исключаться последним. В этом случае в процессе триангуляции расчетная микроматрица станет невырожденной.

Взаимный элемент: базисный узел k - узел m

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^P} = \Delta P_k \\ \frac{\partial L}{\partial V_k} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} \right] & [0] & \left[\frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} \right] & [0] \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \delta_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial V_m} \right] & \left[\frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \right] \\ \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \right] & [0] & \left[\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \right] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_m \\ \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} [-Q_{km}] & [0] & \left[-\frac{P_{km}}{V_m} \right] & [0] \\ \left[\frac{-\lambda_k^P Q_{km} + Q_{mk} \lambda_m^P}{V_k} + \lambda_k^Q P_{km} - P_{mk} \lambda_m^Q \right] & \left[-\frac{P_{mk}}{V_k} \right] & \left[\frac{-\lambda_k^P P_{km} - P_{mk} \lambda_m^P}{V_k V_m} - \lambda_k^Q Q_{km} - Q_{mk} \lambda_m^Q \right] & \left[-\frac{Q_{mk}}{V_k} \right] \\ + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_g^S & & + \sum_g \frac{\partial^2 \Delta S_g}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_g^S & \\ [P_{km}] & [0] & \left[-\frac{Q_{km}}{V_m} \right] & [0] \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_m \\ \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix}.$$

Взаимный элемент: базисный узел k - сечение g

$$\begin{bmatrix} [0] \\ \left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_k} \right] \\ [0] \end{bmatrix} [\Delta \lambda_g^S].$$

Диагональный элемент: сечение g

$$[-d_s] [\Delta \lambda_g^S].$$

Взаимный элемент: сечение g - узел m :

$$\left[\left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial \delta_m} \right] \quad [0] \right] \left[\left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_m} \right] \quad [0] \right] \begin{bmatrix} \Delta \delta_m \\ \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix}.$$

Взаимный элемент: узел k - сечение g :

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial \delta_k} \right] \\ [0] \\ \left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_k} \right] \\ [0] \end{bmatrix} [\Delta \lambda_g^S].$$

Взаимный элемент: сечение g - базисный узел m :

$$\left[[0] \right] \left[\left[\frac{\partial \Delta S_g}{\partial V_m} \right] \right] \begin{bmatrix} \Delta \lambda_m^P \\ \Delta V_m \\ \Delta \lambda_m^Q \end{bmatrix}.$$

Выводы по главе 3

1. Теоретическое исследование показало, что одним из эффективных подходов решения задач предельных режимов электрических систем (ПР) является использование моделей и инструментов нелинейного программирования. ПР есть прежде всего УР, часть параметров которого принимает экстремальные значения, поэтому критерий ПР неявно содержится в самой вычислительной модели УР. Учет этого позволил предложить и теоретически обосновать модель нелинейного программирования предельных режимов ЭС (НЛПР модель). Предлагаемая модель является универсальной, позволяет учитывать и рассчитывать различные ПР, например, ПР в заданном направлении утяжеления, ближайшие ПР, ввод режима в область существования и т.д., повысить надежность и точность расчетов. Многие существующие модели ПР, реализующие оптимизационную технику, оказываются частными случаями НЛПР модели. Кроме этого, НЛПР модель имеет важное теоретическое значение, позволяет получить новые важные свойства ПР, способствующие лучшему пониманию моделей УР и ПР ЭС, развитию теории ПР и разработке эффективных алгоритмов решения задач ПР.
2. Анализ НЛПР модели обнаружил, что эта модель в неявном виде реализует инструментарий гиперповерхности мощностей установившихся режимов электрических систем (ГМ), представленной в первой главе. Так, например, вектор неопределенных множителей Лагранжа УУР НЛПР модели является вектором нормали ГМ ЭС, а матрица вторых производных УУР с множителями Лагранжа является той матрицей, положительная определенность которой определяет выпуклость ГМ. Исследование свойств НЛПР модели позволило подтвердить результаты первой главы, а именно то, что ПР характеризуется неспособностью БУ поддержать УР ЭС, поскольку все его действия по балансировке режима сводятся на нет возникающими

при этом потерями активной мощности. БУ как бы теряет электрическую связь с частью или со всей ЭС, что соответствует отсутствию БУ в вычислительной модели УР. Однако, несмотря на то, что матрица Якоби потокораспределения НЛПР модели является вырожденной в ПР, это не нарушает условия о допустимости использования функции Лагранжа и существования неявной функции в ПР, поскольку градиенты уравнений ограничений НЛПР модели являются линейно независимыми. Линейная независимость градиентов обеспечивает условия существования неявной функции в ПР для каждого узла с ненулевым множителем Лагранжа, т.е. с ненулевой компонентой вектора нормали ГМ, но не для узла, который назначен балансирующим для расчета ПР. Поэтому соответствующая смена БУ делает этот рассчитанный ПР неопредельным УР.

3. Теоретические исследования показали, что продуктивным средством для вычислительной реализации НЛПР модели является метод внутренней точки. Выполненные аналитические преобразования обнаружили, что прямодвойственный метод внутренней точки позволяет эффективно учитывать функциональные ограничения в форме неравенств и редуцировать систему линеаризованных уравнений, решаемой на каждой итерации, в СЛУ, число уравнений и переменных которой соответствует системе линеаризованных уравнений НЛПР модели без уравнений ограничений в форме неравенств, т.е. только в два раза больше, чем при обычном расчете УР. Причем структура и расположение ненулевых элементов этих матриц будут полностью совпадать. Это позволяет, используя микроматрицы, сформировать СЛУ, структура матрицы которой соответствует матрице Якоби потокораспределения, и воспользоваться эффективными технологиями разреженных матриц, хорошо себя зарекомендовавшими в программах расчета УР.

Глава 4 Вычислительные модели нелинейного программирования поиска предельных режимов электрических систем в заданном направлении утяжеления

4.1 Введение

Один из обычно используемых подходов поиска ПР состоит в последовательном расчете серии установившихся режимов вдоль заданной траектории с дискретным шагом, пока не разойдется расчет УР, который, в свою очередь, уточняется двоичным поиском [147] или методом Ньютона по параметру [268], [359]. Однако, как только УР подходит близко к ПР, расходимость итерационного процесса может быть вызвана плохой обусловленностью матрицы Якоби. Вот почему, в методах продолжения (по параметру) потокораспределения (continuation power flow – CPF) широко используется параметризация уравнений потокораспределения [279] или нормализация изменения шага утяжеления [273]. В этом случае матрица Якоби в промежуточных и ПР не вырождена, что позволяет получать также PV кривые [227].

Уравнения ПР (УПР) [104], известные за рубежом как метод точки коллапса (point of collapse method – PoC) [213], включающие систему уравнений потокораспределения в заданном направлении утяжеления с уравнениями линейной зависимости строк или столбцов матрицы Якоби, играют важную роль в исследованиях ПР и выигрывают у CPF в быстродействии и точности полученного решения [212]. Однако имеется существенный недостаток, т.к. требуется достаточно хорошее начальное приближение переменных, иначе решением УПР методом Ньютона (PoC) может быть не искомый ПР, а ПР в противоположном заданному направлении утяжеления, или не сойдется итерационный процесс.

Весьма эффективным и универсальным подходом является использование оптимизационных моделей и инструментов. Это позволяет учесть различные ограничения, расширить спектр решаемых задач.

Основанные на нелинейном программировании модели ПР в заданном направлении изменения мощностей предложены сравнительно давно [62]-[63], [355]. Однако до сих пор такие модели не получили распространения в практике расчетов ПР. Электроэнергетика требует достаточно надежных и быстрых методов. Глобальная сходимость оптимизационных алгоритмов является по своей природе вычислительно затратной. Усложнение кода и высокий объем вычислений является обычной платой за надежную сходимость алгоритмов [19], [90], [235], [337]. В западной литературе пока не было предложено основанных на оптимизации алгоритмов расчета ПР в заданном направлении изменения мощности, по вычислительным характеристикам превосходящие методы последовательного утяжеления. Было только установлено, что использование обобщенного метода приведенного градиента эквивалентно методам продолжения потокораспределения [209]. Поэтому неудивительно, что до сих пор в промышленных программах для расчета ПР используются методы дискретного последовательного утяжеления [147], или CPF [227], [372]. Другие методы расчета ПР в заданном направлении утяжеления пока реализованы только в исследовательских программах [211].

Модель нелинейного программирования предельных режимов ЭС в заданном направлении изменения мощности (НЛПР-Н модель) является частным случаем НЛПР модели, предложенной в предыдущей главе. Цель настоящей главы 4 состоит в том, чтобы на основе НЛПР-Н модели разработать надежные и вычислительно эффективные методы расчета ПР в заданном направлении изменения мощности. Для этого в параграфе 4.2 выявлены и проанализированы особенности и вычислительные трудности реализации НЛПР-Н модели. Результаты этого анализа, учет особенностей структуры НЛПР-Н модели, а также условий оптимальности второго порядка, позволили в параграфе 4.3 предложить простой, быстрый и надежный НЛПР-Н метод расчета ПР в заданном направлении изменения мощности как с одиночным, так и с распределенным БУ. В параграфе 4.4.

представлены учет технологических ограничений, алгоритм НЛПР-Н метода поиска ПР в заданном направлении утяжеления с процедурой идентификации и определения индуцированной пределом бифуркации. В параграфе 4.5 представлены НЛПР-НП модель и метод расчета ПР в заданном направлении утяжеления, учитывающие неточность прогноза мощностей узлов исходного УР. В параграфе 4.6 обсуждается вычислительная эффективность предложенных методов, представлен сравнительный анализ с существующими подходами. Параграф 4.7 посвящен решению задачи определения критического сечения в ПР, т.е. сечения, по которому происходит нарушение статической апериодической устойчивости ЭС при переходе через ПР. Заключение и выводы представлены в параграфе 4.8.

4.2 *НЛПР-Н модель и ее анализ*

Согласно результатам предыдущей главы, НЛПР-Н модель (в заданном направлении утяжеления), может быть представлена в следующем виде:

$$\min -t \quad (1a)$$

при условии

$$\Delta F(X, Y + t dY) = 0. \quad (1b)$$

Здесь t – скалярная переменная, которую обычно называют коэффициент загрузки; система (1б) - это система нелинейных уравнений баланса активных мощностей в PV и PQ узлах и уравнений баланса реактивных мощностей в PQ узлах; вектор X представляет углы напряжений узлов, кроме БУ, и модули напряжений PQ узлов; вектор Y задает активную и реактивную мощность в каждом узле нагрузки и активную мощность, вырабатываемую в каждом генераторном узле; вектор направления утяжеления dY задает определенные технологическими изменениями активной и реактивной мощности нагрузки, а также изменения в выработке активной мощности. Модель (1) была предложена в [62]-[63], [355]. Эта модель является частным случаем НЛПР модели [196].

Функция Лагранжа задачи (1) может быть представлена в виде

$$L = -t + \Delta F(X, Y + tdY)^T \lambda, \quad (2)$$

где λ является вектором вспомогательных переменных, называемых множителями Лагранжа.

Дифференцирование этой функции по всем переменным дает:

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (3a)$$

$$\nabla_\lambda L = \Delta F(X, Y + tdY) = 0; \quad (3б)$$

$$\nabla_t L = -1 + dY^T \lambda = 0. \quad (3в)$$

Здесь $\nabla_X L = [\partial L / \partial X]^T$ обозначает градиент функции Лагранжа относительно вектора X , и $[J] = [\partial \Delta F / \partial X]$ представляет собой матрицу Якоби УУР.

Условие (3в) гарантирует, что в точке решения задачи (1) вектор λ не равен нулю, поэтому (3а) определяет вырожденность матрицы Якоби потокораспределения, т.е. ПР [197].

Система нелинейных уравнений (3) представляет собой условия оптимальности первого порядка для задачи (1). Согласно теории нелинейного программирования [19], решение задачи (1) будет точкой строгого локального минимума, если

$$Z^T [H] Z > 0, \quad (4a)$$

$[H] = [\partial^2 \Delta F^T \lambda / \partial X^2]$, для любого вектора Z , который отвечает системе линейных уравнений

$$\forall Z, Z_t : [J]Z + dY \cdot Z_t = 0, \quad (4б)$$

где Z_t , в свою очередь, может принимать любое значение. Соотношения (3) - (4) известны как достаточные условия оптимальности второго порядка.

В ПР матрица Якоби потокораспределения $[J]$ вырождена. В противоположность этому, матрица системы (3) линеаризованных уравнений:

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 \\ J & 0 & dY \\ 0 & dY^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_X L \\ \nabla_\lambda L \\ \nabla_t L \end{bmatrix}. \quad (5)$$

не вырождена в точке решения задачи (1) [10]. Чтобы показать это, предположим обратное и умножим матрицу (5) справа на ее собственный вектор $[U^T W^T V]^T$, отвечающий нулевому собственному значению,

$$[H]U + [J]^T W = 0; \quad (6a)$$

$$[J]U + dY * V = 0; \quad (6б)$$

$$dY^T W = 0. \quad (6в)$$

Умножая (6) слева на собственный вектор-строку $[U^T W^T V]$, можно получить

$$U^T [H]U + U^T [J]^T W + W^T [J]U + W^T dY * V + V * dY^T W = 0. \quad (7a)$$

Из условия (6в) следует, что $W^T dY * V = V * dY^T W = 0$, а из (6б)

$$W^T [J]U = U^T [J]^T W = -W^T dY * V = 0.$$

Поэтому (7a) преобразуется в

$$U^T [H]U = 0, \quad (7б)$$

т.е. вектор U является либо собственным вектором матрицы $[H]$, отвечающим ее нулевому собственному значению, либо нулевым вектором. В первом случае (7б) с (6б) противоречат (4), поэтому вектор U должен быть только нулевым. Тогда согласно (6б) $V=0$, а согласно (6a) должно соблюдаться условие $[J]^T W = 0$. Учитывая (3a), имеем $W = \lambda$. Но тогда (6в) противоречит (3в), поэтому вектор W также должен быть нулевым вектором. Следовательно, условия (6) будут выполняться только для нулевого вектора $[U^T W^T V]^T$, поэтому матрица линеаризованных уравнений (5) будет невырожденная в точке решения задачи (1).

Уравнения (3a) - (3б) могут быть получены прямо из теоремы о неявной функции. При таком подходе они в России получили название уравнений ПР (УПР) [104], за рубежом - метод точки коллапса (PoC) [213]. В существующих модификациях УПР (PoC) условие (3a) в некоторых случаях записывается для правого собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению, в то время как евклидова или l_∞ -норма вектора λ используется как второе слагаемое в (3в).

Исследования [212]-[213] показали, что хорошие начальные приближения для переменных, особенно собственного вектора, являются существенными для получения решения системы нелинейных уравнений (3). Иначе итерационный процесс решения (3) методом Ньютона или не даст искомым ПР, или не сойдется. Поэтому, несмотря на то, что в случае успешного решения РоС превосходит как методы последовательного дискретного утяжеления, так и методы продолжения потокораспределения, из-за ненадежности РоС большинство исследователей в своих разработках отдают предпочтение последним, по крайней мере, для нахождения первоначального ПР [265], [266].

Ненадежность РоС связана со свойствами системы нелинейных уравнений (3) и матрицы СЛУ (5). Во-первых, условия (3) соответствуют экстремуму функции задачи (1), при этом экстремумом может быть или минимум или максимум. Поэтому, в зависимости от начальных приближений переменных, решением системы нелинейных уравнений (1) может быть ПР как в заданном направлении утяжеления, так и в противоположном. Во-вторых, матрица системы уравнений (5) имеет свойства, противоположные матрице Якоби потокораспределения. Матрица Якоби потокораспределения обычно хорошо обусловлена в нормальных режимах, но вырождена в ПР. В противоположность этому, матрица системы линейных уравнений (5) хорошо обусловлена в ПР, но плохо - в нормальных режимах, причем для “легких” режимов она очень близка к вырожденной [10]. Именно сочетание таких свойств систем (3) и (5) делает РоС неработоспособным в большинстве случаев.

Чтобы прояснить возникающие трудности, рассмотрим 2-х узловую систему с PV узлом k и балансирующим узлом m . В этом случае задача (1) будет иметь следующий вид:

$$\min -t$$

при условии

$$\Delta P_k = P_k + t dP_k - V_k^2 |Y_{km}| \sin \alpha_{km} - V_k V_m |Y_{km}| \sin(\delta_{km} - \alpha_{km}) = 0,$$

где t - коэффициент загрузки; δ_k, V_k - угол и модуль напряжения в узле k ; P_k - активная мощность в узле k ; dP_k - заданное "направление" изменения активной мощности для узла k ; Y_{km} - проводимость между узлами k и m ; $\alpha_{km} = \angle Y_{km} + \pi/2$ - угол потерь; $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$.

Функция Лагранжа этой задачи может быть представлена как

$$L = -t + [P_k + tdP_k - V_k^2 |Y_{km}| \sin(\alpha_{km}) - V_k V_m |Y_{km}| \sin(\delta_{km} - \alpha_{km})] \lambda,$$

поэтому условиями оптимальности первого порядка являются:

$$\nabla_{\delta_k} L = -V_k V_m |Y_{km}| \cos(\delta_{km} - \alpha_{km}) \lambda = 0; \quad (8a)$$

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta P_k = P_k + tdP_k - V_k^2 |Y_{km}| \sin(\alpha_{km}) - V_k V_m |Y_{km}| \sin(\delta_{km} - \alpha_{km}) = 0; \quad (8б)$$

$$\nabla_t L = -1 + dP_k \lambda = 0. \quad (8в)$$

Из уравнения (8в) легко определяется множитель Лагранжа $\lambda = 1/dP_k$.

Поэтому, если использовать это значение как начальное приближение λ , то только два линейризованных уравнения будут действительно использоваться во время итерационного процесса:

$$[V_k V_m |Y_{km}| \sin(\delta_{km} - \alpha_{km}) \lambda] \Delta \delta_k = -\Delta_{\delta_k} L = V_k V_m |Y_{km}| \cos(\delta_{km} - \alpha_{km}) \lambda; \quad (8г)$$

$$[-V_k V_m |Y_{km}| \cos(\delta_{km} - \alpha_{km})] \Delta \delta_k + dP_k \Delta t = -\nabla_{\lambda} L = -\Delta P_k. \quad (8д)$$

Согласно (8г),

$$\Delta \delta_k = \text{ctg}(\delta_{km} - \alpha_{km}). \quad (8е)$$

Подстановка (8е) в (8д) дает

$$\Delta t = -\text{ctg}(\delta_{km} - \alpha_{km}) \nabla_{\delta_k} L - \Delta P_k / dP_k. \quad (8ж)$$

В зависимости от исходного установившегося режима и заданного направления утяжеления dP_k множитель при $\Delta \delta_k$ в (8г), который соответствует матрице Гессе $[H]$ в (5), может быть положительной, либо отрицательной величиной. Однако изменение режима (8е) пойдет только в одном направлении, независимо от заданного dP_k . В случае $\delta_{km} > \alpha_{km}$ угол δ_{km} будет возрастать, следовательно, ПР будет соответствовать максимальной выработке активной мощности в узле k . В случае $\delta_{km} < \alpha_{km}$

угол δ_{km} будет уменьшаться, и ПР будет соответствовать максимальному потреблению в узле k . Установившийся режим с $\delta_{km} = \alpha_{km}$ является «пограничным режимом» (ГР) между областями притяжения к этим двум ПР. Якобиан (детерминант) линеаризованных уравнений (8г)-(8д) с учетом (8в) равен $V_k V_m |Y_{km}| \sin(\delta_{km} - \alpha_{km}) / dP_k$. Поэтому в ГР, т.е. когда $\delta_{km} = \alpha_{km}$, матрица линеаризованных уравнений (8г)-(8д) является вырожденной. В окрестности ГР эта матрица плохо обусловлена. Поэтому в случае "легкого" исходного режима, когда $\delta_{km} \approx \alpha_{km}$, приращения $\Delta\delta_k$ (8е) и Δt (8ж) могут быть очень большими. В противоположность этому, в ПР Якобиан (8г)-(8д) имеет самое высокое абсолютное значение. Вблизи ПР матрица системы (8г)-(8д) хорошо обусловлена и метод Ньютона показывает квадратичную скорость сходимости.

В случае использования прямоугольной системы координат ПР будет также зависеть от начального установившегося режима. Изменение угла больше одного периода невозможно, но коэффициент загрузки t и величина напряжения могут существенно превысить расчетные значения. Вблизи ПР скорость сходимости оказывается ниже, чем в полярных координатах. Можно предположить, что использование $t^2 dP$ является более успешным вариантом, чем tdP . Однако это не дает желательного результата. Если начальная матрица Гессе $[H]$ не является положительно определенной, колебательный итеративный процесс возникает вокруг ГР $\delta_{km} = \alpha_{km}$. В случае положительно определенной матрицы $[H]$ скорость сходимости оказывается заметно хуже, чем с tdP .

Таким образом, представленный анализ показывает, что для успешной реализации задачи (1) необходимо решить две проблемы. Во-первых, итерационный процесс должен генерировать изменение переменных в "правильном" направлении. Во-вторых, при использовании СЛУ (5), необходимо применять механизмы, учитывающие возможную плохую обусловленность матрицы этой системы. В теории нелинейного

программирования предложено много таких процедур [19], [90], [235]. Однако обычная реализация этих процедур пока не позволила разработать вычислительно эффективный алгоритм решения задачи (1). Существует два классических подхода для глобализации локально сходящего алгоритма: процедуры линейного поиска или использование доверительных областей. Первый подход требует применения функции выгодности, выбор которой неоднозначен и сильно влияет на скорость сходимости алгоритма. Вторым подходом связан с большим дополнительным объемом вычислений на каждой итерации, например, для обеспечения положительной определенности матрицы Гессе, или требуемой инерции матрицы (5). Вместе с тем учет особенностей структуры СЛУ (5) и критерия оптимальности второго порядка (4) задачи (1) позволил разработать простой, быстрый и надежный метод расчета ПР в заданном направлении изменения мощностей [10], [197].

4.3 НЛПР-Н метод

НЛПР-Н метод использует систему линеаризованных уравнений (5) в следующем виде:

$$[H]\Delta X + [J]^T \Delta \lambda = -\nabla_x L; \quad (1a)$$

$$[J]\Delta X + dY\Delta t = -\Delta F; \quad (1б)$$

$$dY^T \Delta \lambda = -\nabla_t L. \quad (1в)$$

Анализ условий оптимальности второго порядка (4.2.4) задачи нелинейного программирования (4.2.1) показывает, что в отличие от задачи безусловной оптимизации, (4.2.4) не требуют положительно определенной матрицы Гессе $[H]$ в точке решения. Достаточно иметь положительно определенную матрицу Гессе $[H]$ вдоль направления Z в пространстве зависимых переменных, удовлетворяющего условию (4.2.4.б).

Сравнение (4.2.4.б) с (1б) показывает, что система (1б) в точности соответствует (4.2.4.б) при $\Delta F = 0$, т.е. когда (1б) является однородной.

Поэтому, чтобы учесть условие (4.2.4) при решении задачи (1), представим вектор ΔX в виде суммы двух векторов:

$$\Delta X = \Delta X_{dY} \Delta t + \Delta X_{\Delta F}, \quad (2a)$$

где ΔX_{dY} и $\Delta X_{\Delta F}$ являются решением СЛУ:

$$[J] \Delta X_{dY} = -dY; \quad (2б)$$

$$[J] \Delta X_{\Delta F} = -\Delta F. \quad (2в)$$

Подстановка (2а) в (1а) дает

$$\Delta \lambda = -\lambda - [J^T]^{-1} [H] (\Delta X_{dY} \Delta t + \Delta X_{\Delta F}). \quad (2г)$$

В свою очередь, подстановка (2г) в (1в) позволяет получить

$$\Delta t = - (a + \Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{\Delta F}) / \Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY}, \quad (2д)$$

где $a = \nabla_t L + \nabla_x L^T \Delta X_{dY}$.

Сравнение (4.2.4б) с (2б) показывает, что $\Delta X_{dY} = Z/Z_t$. Следовательно $\Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY} = Z^T [H] Z / Z_t^2$. Поэтому, чтобы обеспечить изменение переменных в «правильном» направлении, необходимо, согласно требованию (4.2.4а), иметь знаменатель в (2д) положительным, в противном случае необходимо его «подправить». Наиболее простым подходом, который, кстати, обосновывается теоретически, является увеличение каждого диагонального элемента матрицы Гессе $[H]$ на положительную величину $\beta > 0$ в (1а) [90]. В этом случае изменится выражение (2г) и уравнение (2д) примет вид

$$\Delta t = - \frac{a + \Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{\Delta F} + \beta \Delta X_{dY}^T \Delta X_{\Delta F}}{\Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY} + \beta \|\Delta X_{dY}\|_2^2}, \quad (2е)$$

где $\|\cdot\|_2$ обозначает Евклидову норму.

Значение β может быть выбрано различными способами, основным требованием является

$$\Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY} + \beta \|\Delta X_{dY}\|_2^2 > 0. \quad (2ж)$$

Но этого условия недостаточно для надежной сходимости метода. В параграфе 4.2 анализ 2-х узловой системы показал, что матрица линейных уравнений (4.2.5), а значит (1), вырождена в ГР. Для (2д) это означает, что ее знаменатель будет равен нулю. В окрестности ГР эта матрица плохо обусловлена и значение знаменателя (2д) будет значительно меньше 1. Как следствие, изменение переменной Δt , а значит ΔX и $\Delta \lambda$, будут очень большими в соответствии с (2д), (2а) и (2г). Согласно (2е), величина β позволяет уменьшить величину Δt , т.е. улучшить обусловленность системы (1). Для этого можно воспользоваться идеологией доверительных областей. Если тем или иным способом определено допустимое значение Δt_{\max} , значение β может быть получено непосредственно из (2е):

$$\beta = \max \left\{ 0, -\frac{a + \Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{\Delta F} + \Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY} \Delta t_{\max}}{\Delta X_{dY}^T \Delta X_{\Delta F} + \|\Delta X_{dY}\|_2^2 \Delta t_{\max}} \right\}. \quad (23)$$

Так как расстояние к ПР не известно заранее, и значение dY может быть выбрано произвольным, лучшим решением будет адаптивное переназначение величины Δt_{\max} после определения ΔX_{dY} из (2б) с тем, чтобы ограничить максимальное изменение углов напряжения узлов или других параметров режима на итерации.

После определения Δt из (2е), вектор ΔX находится из (2а), а вектор λ - из решения СЛУ (2и)

$$[J]^T \Delta \lambda = -(\nabla_X L + [H] \Delta X + \beta \Delta X). \quad (2и)$$

Коэффициент загрузки t линейно включен в уравнение (4.2.3б). После итерации он изменится в соответствии с линеаризованными выражениями (1б), где нелинейные изменения не учитываются. Поэтому после итерации значение t может быть подправлено на величину

$$\Delta t_c = -\Delta F^T dY / \|dY\|_2^2. \quad (2к)$$

Это уменьшает Евклидову норму вектора небаланса мощностей на итерации и вектор небалансов мощностей становится ортогональным вектору dY , что также улучшает обусловленность задачи.

В случае РБУ уравнения потокораспределения (4.2.1б) принимают следующий вид

$$\Delta F(X, Y + P^S \mathcal{G}^S + t dY) = 0, \quad (3a)$$

где P^S представляет собой мощность РБУ; \mathcal{G}^S задает коэффициенты участия узлов в РБУ с $\mathcal{G}_k^S \geq 0$ и $\sum \mathcal{G}_k^S = 1$.

Когда (3a) будет использован для задачи (4.2.1), условие (4.2.3в) останется неизменным, (4.2.3б) будет заменено (3a), и (4.2.3а) будет дополнено уравнением

$$\nabla_{P^S} L = \lambda^T \mathcal{G}^S = 0. \quad (3б)$$

Векторы ΔX_{dY} и $\Delta X_{\Delta F}$ для (2a), (2e), (2з), и (2и) могут быть получены решением СЛУ:

$$\begin{bmatrix} J_{LF}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{dY} \\ \Delta P_{dY}^S \end{bmatrix} = -dY; \quad \begin{bmatrix} J_{LF}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{\Delta F} \\ \Delta P_{\Delta F}^S \end{bmatrix} = -\Delta F, \quad (3в)$$

где $\begin{bmatrix} J_{LF}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J, \mathcal{G}^S \end{bmatrix}$ является матрицей Якоби потокораспределения с РБУ [196].

Вектор множителей Лагранжа находится решением следующей СЛУ

$$\begin{bmatrix} J_{LF}^S \end{bmatrix}^T \lambda = - \begin{bmatrix} [H] \Delta X + \beta \Delta X \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3г)$$

Изменение мощности РБУ на итерации определяется выражением:

$$\Delta P^S = \Delta P_{dY}^S \Delta t + \Delta P_{\Delta F}^S. \quad (3д)$$

Аналогично коэффициенту загрузки, мощность РБУ линейно включена в уравнение (3a). Именно поэтому после итерации ее значение может быть скорректировано на величину $-\Delta F^T \mathcal{G}^S / \|\mathcal{G}^S\|_2^2$, тем самым компенсируя проекцию вектора невязок мощностей на вектор \mathcal{G}^S .

Чтобы проиллюстрировать вычислительную эффективность разработанного НЛПР-Н метода, рассмотрим 2-х узловую ЭС, анализ которой был выполнен в параграфе 4.2. В таблице 4.1 представлены результаты применения НЛПР-Н метода к этой системе при нахождении ПР в заданном направлении утяжеления (увеличение генерации) в узле k .

Параметры линии, данные по узлам и результаты расчета потокораспределения исходного режима представлены под таблицей 4.1.

ТАБЛИЦА 4.1 - РЕЗУЛЬТАТЫ НЛПР-Н МЕТОДА ДЛЯ 2-Х УЗЛОВОЙ СИСТЕМЫ

№ Итерации	1	2	3
$\Delta X_{dY}^T [H] \Delta X_{dY}$	$-2.885 \cdot 10^{-3}$	0.042	$1.548 \cdot 10^3$
Δt_{max}	21.186	16.147	0.103
β	36.445	6.365	0
Δt	21.186	16.147	-8.177
$\Delta \delta_{km}$	45^0	49.172^0	0.278^0
δ_{km}	67.115^0	116.287^0	116.565^0
t	21.186	37.333	29.157
$P_k + tdP_k$	311.183	473.333	391.567
Собственное значение [J]	-205.586	-1.314	$1.032 \cdot 10^{-5}$
$ \Delta P_k $	14.97	81.772	$3.189 \cdot 10^{-3}$

Параметры системы: $Y_{km} = -(20 + j40)^{-1}$ сим, $V_k = V_m = 110$ кВ, $P_k = 100$ МВт,
 $dP_k = 10$ МВт, $\alpha_{km} = 26.565^0$, $\delta_{km}^0 = 22.115^0$, $d\Delta P_k / d\delta_{km}^0 = -269.748$

Рассматриваемая система имеет два ПР. Один соответствует максимальной генерации в узле k , другой – максимальной нагрузке в этом узле. Режим максимальной генерации получается, когда $\delta_{km} - \alpha_{km} = \pi/2$, при этом генерируемая мощность будет равна $P_k^{max\ gen} = V_k^2 |Y_{km}| \sin \alpha_{km} + V_k V_m |Y_{km}| = 391.567$ МВт. Режим максимальной нагрузки получается, когда $\delta_{km} - \alpha_{km} = -\pi/2$, при этом максимальная нагрузка в узле k будет равна $P_k^{max\ load} = V_k^2 |Y_{km}| \sin \alpha_{km} - V_k V_m |Y_{km}| = -149.567$ МВт. В «пограничном» режиме (ГР), т.е. когда $\delta_{km} = \alpha_{km}$, узел k генерирует мощность $P_k^{GP} = V_k^2 |Y_{km}| \sin \alpha_{km} = 121$ МВт. Таким образом, ГР оказывается равноудаленным от этих двух ПР.

В исходном режиме узел k генерирует 100 МВт. Поскольку $P_k < P_k^{GP}$, этот режим оказывается ближе ко второму ПР. В исходном режиме $\delta_{km}^0 = 22.115^0$, угол потерь линии $\alpha_{km} = 26.565^0$. Поскольку $\delta_{km} < \alpha_{km}$, то согласно анализа параграфа 4.2, решением системы (4.2.3) должен быть ПР в противоположном заданному направлении утяжеления, т.е. модель (4.2.1)

движет режим ЭС к ближайшему ПР в пространстве мощностей. Более того, матрица системы (4.2.5) плохо обусловлена в исходном режиме. Величина знаменателя (2д) равна $\Delta X_{dy}^T [H] \Delta X_{dy} = -2.885 * 10^{-3}$. Если не использовать (2е) с β , решением системы (4.2.5) будет $\Delta t^1 = -346.595$ и $\Delta \delta_{km}^1 = -736.183^0 = -4\pi - 16.183^0$ на первой итерации, т.е. угол δ_{km} провернется в «неправильном» направлении больше чем два раза. НЛПР-Н метод легко преодолевает эти трудности. Из таблицы 4.1 видно, что на первой итерации $\Delta X_{dy}^T [H] \Delta X_{dy}$ имеет отрицательное значение. Поэтому, согласно (2з), матрица $[H]$ «подправляется» с помощью β . Для того, чтобы улучшить число обусловленности, на каждой итерации значение Δt_{max} находилось из условия, чтобы изменение углов ($\Delta X_{dy} \Delta t$) по линии не превышало 45^0 . Таблица 4.1 показывает, что НЛПР-Н метод обеспечивает «правильное» изменение переменных. На второй итерации значение $\Delta X_{dy}^T [H] \Delta X_{dy}$ стало положительным, и β использовалась для улучшения обусловленности задачи. Всего потребовалось 3 итерации для расчета ПР. После третьей итерации величина небаланса мощности $|\Delta P_k|$ получилась равной $3.189 * 10^{-3}$ МВт, а собственное значение матрицы Якоби потокораспределения достигло практически нулевого значения, а именно $-1.032 * 10^{-5}$. Таким образом, НЛПР-Н метод обеспечил быстрый, надежный и точный расчет ПР. Точность легко подтверждается выражением $\delta_{km}^{ПП} = \pi/2 + \alpha_{km} = 90^0 + 26.565^0 = 116.565^0$, которое должно выполняться в этом ПР. После 3-й итерации угол δ_{km} в точности равен этому значению.

4.4 Учет технологических ограничений

НЛПР-Н модель является частным случаем НЛПР модели, рассмотренной в главе 3. Поэтому представленные в той главе вычислительные подходы учета технологических ограничений также справедливы для НЛПР-Н модели. Однако, НЛПР-Н метод основан на

использовании особенности структуры системы линеаризованных уравнений НЛПР-Н модели. Поэтому проанализируем, какие из рассмотренных подходов учета технологических ограничений могут быть напрямую использованы в НЛПР-Н методе, и какие модификации требуются для эффективной реализации других.

Вначале предположим, что все технологические ограничения реализованы в НЛПР-Н модели точно так же, как в НЛПР модели, и рассмотрим базисную систему, полученную после исключения дополнительных положительных и их двойственных переменных, которая для НЛПР-Н модели будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 & J^{sT} \\ J & dD & dY & 0 \\ 0 & dY^T & 0 & 0 \\ J^s & 0 & 0 & dD^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \\ \Delta \lambda^s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L + d\nabla_x L \\ \nabla_\lambda L + d\nabla_\lambda L \\ \nabla_t L \\ \nabla_{\lambda^s} L + d\nabla_{\lambda^s} L \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $[H] = [\partial^2 \Delta F^T \lambda / \partial X^2] + [dH]$; $[J] = [\partial \Delta F / \partial X] + [dJ]$; $[dD]$ и $[dD^s]$ - диагональные подматрицы; префиксом d указаны компоненты (подматрицы), добавленные в процессе получения базисной системы; $[J^s] = [\partial G(X) / \partial X]$, где, в свою очередь, $G(X)$ представляет собой вектор нелинейных уравнений контролируемых токов в линиях и потоков активных мощностей в сечениях.

Сравнение системы (1) с исходной НЛПР-Н моделью (4.2.5), а также анализ выражений НЛПР-Н метода, представленных в предыдущем параграфе, показывают, что НЛПР-Н метод может вычислительно эффективно использовать только те из представленных в Приложении Г вычислительных процедур учета технологических ограничений, реализация которых не приводит к появлению ненулевых элементов в матрице $[dD]$. В первую очередь, этому требованию отвечает учет ограничений на величину напряжений в узлах, который реализуется в базисной модели только корректировкой диагональных элементов матрицы вторых производных $[H]$ и соответствующих правых частей. Этому соответствуют также

представленные процедуры учета ограничений величин тока в линиях и потоков активных мощностей в контролируемых сечениях. В таком случае базисная система (1) легко приводится к системе (4.2.5), а значит и к (4.3.1), если вектор переменных $\Delta\lambda^g$ выразить из последнего уравнения (1) и подставить в первое. В результате будет скорректирована только матрица $[H]$ на величину

$$-[J^g]^T [D^g]^{-1} [J^g] = -\sum_k D_{kk}^{g-1} [J^g]_k^T [J^g]_k, \quad (2)$$

где $[J^g]_k$ - k -я строка матрицы $[J^g]$, и соответствующая правая часть. Следует отметить, что согласно (4.3.2г)-(4.3.2и) в НЛПР-Н методе матрица $[H]$ умножается только на векторы или строки, конечными результатами которых являются скалярные числа или векторы. Поэтому нет необходимости непосредственной корректировки матрицы $[H]$ выражением (2). Достаточно дополнить выполнение операций с исходной матрицей умножением компонент (2) на соответствующие строки или векторы. Это не требует численной корректировки матрицы $[H]$, что уменьшает как требуемую память, так и объем вычислений.

Учет пределов утяжеляемых мощностей узлов в НЛПР модели вызывает появление ненулевых диагональных элементов матрицы $[dD]$ в базисной системе (1). Поэтому такие процедуры нельзя использовать в НЛПР-Н методе. Вместо этого достаточно применить подход, обычно используемый в методах последовательного утяжеления: если на итерации величина мощности узла превысила допустимый предел, мощность узла фиксируется на этом пределе, и обнуляется соответствующая компонента вектора направления утяжеления dY .

Учет ограничений реактивной мощности PV узлов с помощью комплементарных ограничений также вызывает появление ненулевых элементов в матрице $[dD]$ базисной модели (1). Поэтому такой подход не может быть реализован в НЛПР-Н методе. Выходом из положения является использование процедуры учета пределов реактивной мощности

генераторов, как при обычном расчете УР. Подробное описание такой процедуры представлено в главе 2. Здесь отметим только отличия ее реализации в НЛПР-Н методе. Обычно поиск ПР начинается с рассчитанного исходного УР. Поскольку изменение режима происходит в заданном направлении утяжеления, то, если реактивная мощность генератора увеличивается, она так и будет увеличиваться, пока не достигнет предела, в отличие от обычного расчета УР с гладкого старта [35]. Поэтому в НЛПР-Н методе контроль ограничений реактивной мощности генераторов выполняется на каждой итерации, а не только при достижении определенной точности расчета. Причем, в противоположность обычному расчету УР, на каждой итерации проверяются и учитываются все виды нарушений ограничений системы АРВ генераторов, независимо от присутствия или отсутствия того или иного вида на итерации.

Однако такой учет ограничений реактивной мощности генераторов не позволяет получить решение, если искомый ПР будет соответствовать бифуркации, индуцированной пределом реактивной мощности генератора (ЛІВ). Особенности ЛІВ приводят к тому, что при обычной процедуре учета PV узлов один или несколько генераторов переключают свой тип с PV на PQ и обратно, причем регулярно, мешая сойтись итерационному процессу решения.

Исследование ЛІВ и ее влияние на характеристики сети и на расчет потокораспределения рассмотрены в параграфе 1.6 первой главы, основные результаты которых с учетом [194] и [283] можно представить следующим образом.

ЛІВ возникает, когда какой-то генератор m достигает своего предела максимума вырабатываемой реактивной мощности Q_m^+ . При этом матрица Якоби потокораспределения не вырождена, и если продолжить дальнейшее увеличение коэффициента загрузки t без изменения типа генератора, то его вырабатываемая реактивная мощность Q_m будет увеличиваться, т.е. $dQ_m/dt > 0$. Если же генератор m при достижении предела максимума

вырабатываемой мощности переключится с PV типа на PQ^+ тип, тогда матрица Якоби потокораспределения также будет невырожденной, но ее определитель изменит знак (когда мощности нагрузки имеют положительный знак в уравнениях потокораспределения) и станет отрицательным. Т.е. изменение типа генератора m «мгновенно» перемещает рабочую точку системы на обратную ветвь V -образной характеристики, соответствующей «вторым неустойчивым» решениям уравнений потокораспределения, и при дальнейшем увеличении коэффициента загрузки напряжение на шинах генератора будет возрастать, а не уменьшаться, т.е. $dV_m/dt > 0$. Учет этих особенностей позволяет предложить следующую процедуру выявления и определения ЛИБ.

Проверка ЛИБ активизируется, если определитель матрицы Якоби потокораспределения изменил знак. Используя ΔX (4.3.2а), выявляются генераторы PQ^+ -типа, напряжение которых на этой итерации превысит поддерживаемые АРВ значения. Если такие генераторы не обнаружены, то это не ЛИБ и итерация НЛПР-Н метода продолжается. С другой стороны, выявленные генераторы переключаются с PQ^+ типа в PV тип, и выполняется следующая процедура определения ЛИБ:

Шаг 1. Решить (4.3.2б)-(4.3.2в) и вычислить

$$t = \min_{\substack{k \in PV, \\ \nabla_X Q_k^T \Delta X_{dY} > 0}} \left(- \frac{\Delta Q_k + \nabla_X Q_k^T \Delta X_{\Delta F}}{\nabla_X Q_k^T \Delta X_{dY}} \right),$$

где $\nabla_X Q_k$ - градиент уравнения баланса реактивной мощности узла k по вектору X , а $\Delta Q_k = Q_k - Q_k^+$. Затем вычислить $\Delta X = \Delta X_{\Delta F} + t \Delta X_{dY}$ и модифицировать X .

Шаг 2. Проверить ограничения по реактивной мощности генераторов PQ -типа. Если какие-то ограничения нарушены, переключить тип соответствующих генераторов и возвратиться к Шагу 1; иначе - продолжить.

Шаг 3. Вычислить $\Delta Q_m = \max\{\Delta Q_k\}$, $k \in PV$. Если $\max\{\|\Delta F\|_\infty, |\Delta Q_m|\} > \varepsilon$, возвратиться к Шагу 1; иначе - продолжить.

Шаг 4. Переключить тип генератора m с PV в PQ^+ и решить (4.3.2б). Если $\Delta V_m < 0$, то возвратиться к Шагу 1; иначе - остановиться. LIB определена: предел реактивной мощности узла m индуцирует бифуркацию.

Если принять во внимание процедуру выявления и определения LIB, алгоритм НЛПР-Н метода может быть представлен следующим образом [143]:

Шаг 0. Рассчитать исходный установившийся режим и получить начальное приближение λ обратным степенным методом [173].

Шаг 1. Решить (4.3.2б)-(4.3.2в). Получить Δt_{max} , используя ΔX_{dY} , затем Δt и ΔX согласно (4.3.2з), (4.3.2е), и (4.3.2а).

Шаг 2. Если определитель матрицы Якоби изменил знак, то выполнить процедуру выявления LIB. Если LIB обнаружена, то выполнить процедуру определения LIB и остановиться; иначе - продолжить.

Шаг 3. Решить (4.3.2и), чтобы получить $\Delta \lambda$. Модифицировать t , X , и λ , затем скорректировать t по (4.3.2к). Проверить ограничения реактивной мощности генераторов и изменить тип узлов в случае необходимости.

Шаг 4. Проверить сходимость: если $\|\Delta F\|_\infty < \varepsilon$ и $\sigma = \|\nabla_x L\|_2 / \|\lambda\|_2 < \varepsilon_\sigma$, тогда остановиться, иначе - возвратиться к Шагу 1.

4.5 НЛПР-НП модель и метод

Нахождение ПР в заданном направлении утяжеления является стандартной практикой. Обычно самое вероятное изменение режима ЭС используется как направление изменения мощностей. Однако трудно осуществить точное прогнозирование таких изменений. Именно поэтому оценка ПР с учетом ошибки прогноза мощностей вызывает интерес [282], [371]. Это можно реализовать, если воспользоваться ковариационным эллипсоидом узловых мощностей [116] и на основе НЛПР-Н модели сформировать НЛПР-НП модель:

$$\min -t \tag{1a}$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + \xi Y + tdY) = 0; \quad (1б)$$

$$(\gamma^2 - \xi Y^T [Cov]^{-1} \xi Y) / 2 = 0, \quad (1в)$$

где вектор ξY представляет ошибку предсказания узловых мощностей; $[Cov]^{-1}$ представляет обратную матрицу ковариации вектора ξY ; γ^2 определяет доверительную область ковариационного эллипсоида (рис. 4.1).

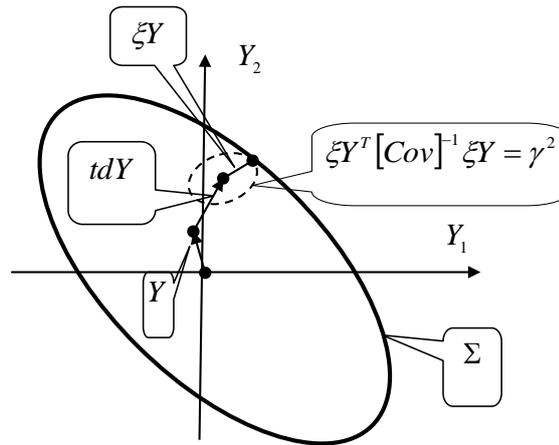


Рисунок 4.1 - Гиперповерхность ПР Σ и ковариационный эллипсоид

Функция Лагранжа задачи (1) может быть представлена как

$$L = -t + \Delta F(X, Y + \xi Y + tdY)^T \lambda + \mu (\gamma^2 - \xi Y^T [Cov]^{-1} \xi Y) / 2.$$

Дифференцирование функции Лагранжа по всем переменным дает условия оптимальности первого порядка:

$$\nabla_x L = [J]^T \lambda = 0; \quad (2а)$$

$$\nabla_\lambda L = \Delta F(X, Y + \xi Y + tdY) = 0; \quad (2б)$$

$$\nabla_t L = -1 + dY^T \lambda = 0; \quad (2в)$$

$$\nabla_\mu L = (\gamma^2 - \xi Y^T [Cov]^{-1} \xi Y) / 2 = 0; \quad (2г)$$

$$\nabla_{\xi Y} L = \lambda - \mu [Cov]^{-1} \xi Y = 0. \quad (2д)$$

Рассмотрим следующее преобразование. Согласно (2д),

$$\xi Y = [Cov] \lambda / \mu, \quad (2е)$$

Подстановка (2е) в (2б) и (2г) дает:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + [Cov]\lambda/\mu + tdY) = 0; \quad (2ж)$$

$$\nabla_{\mu} L = (\gamma^2 - \lambda^T [Cov] \lambda / \mu^2) / 2 = 0. \quad (2з)$$

Тогда система линеаризованных уравнений (2а), (2в) и (2ж) – (2з) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 & 0 \\ J & Cov/\mu & dY & -\xi Y/\mu \\ 0 & dY^T & 0 & 0 \\ 0 & -\xi Y^T/\mu & 0 & \xi Y^T \lambda/\mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_X L \\ \nabla_{\lambda} L \\ \nabla_t L \\ \nabla_{\mu} L \end{bmatrix}. \quad (2и)$$

В отличие от матрицы Якоби потокораспределения и матрицы Гессе, матрица ковариации $[Cov]$ в общем случае является полностью заполненной [37]. Поэтому непосредственная реализация этой модели для больших энергосистем из-за объема вычислений является затруднительной, или вообще невозможной, даже если воспользоваться факторными методами моделирования ковариационного эллипсоида или другими подходами снижения размерности [1]- [3], [17], [20], [21] [88], [108], [120], [123], [125], [150], [181].

Если составляющие вектора ξY рассматриваются как независимые случайные величины, матрица ковариации $[Cov]$ будет диагональной [175], [176]. В этом случае можно непосредственно использовать систему (2и). Однако необходимо учесть свойства системы (2и), аналогичные системе (4.2.5). Структура системы линеаризованных уравнений (2и) позволяет использовать только стандартные процедуры обеспечения положительной определенности матрицы Гессе на нуль-пространстве матрицы Якоби системы нелинейных уравнений (1б)-(1в). Это требует очень большого объема вычислений на итерации [40], [90]. Можно воспользоваться методами приведенного градиента или методами множителей Лагранжа [19]. Однако в этом случае не удастся получить быструю сходимость. Выходом из положения является двухшаговая процедура. На первом шаге погрешность прогноза мощностей не учитывается. С помощью НЛПР-Н метода находится ПР в заданном направлении изменения мощностей узлов.

Результаты первого шага используются в качестве начального приближения переменных на втором шаге, и задача (1) решается с помощью (2и).

Однако более эффективным подходом, является метод, названный НЛПР-НП методом, который итеративно использует НЛПР-Н метод и выражения (1б) и (2е), позволяя реализовать НЛПР-НП модель с полностью заполненной матрицей ковариации для реальных энергосистем.

В НЛПР-НП методе выражение (1б) с вектором ξY как независимой переменной используется в качестве уравнений потокораспределения. В начале пошаговой процедуры ошибка прогноза мощностей не рассматривается, нулевой вектор используется в качестве вектора ξY , и ПР в заданном направлении утяжеления dY определяется НЛПР-Н методом. После нахождения ПР, вектор ξY находится из следующего выражения

$$\xi Y = \gamma [Cov] \lambda / \sqrt{\lambda^T [Cov] \lambda}, \quad (3)$$

где λ является вектором множителей Лагранжа в полученном ПР. Затем для нового $Y + \xi Y$ следующий ПР в заданном направлении утяжеления dY определяется НЛПР-Н методом. При этом в качестве начальных значений переменных используются параметры предыдущего ПР. Это позволяет значительно ускорить расчеты. Такая пошаговая процедура повторяется до тех пор, пока новый вектор ξY (3) не совпадет с предыдущим.

Для демонстрации работы итеративного НЛПР-НП метода воспользуемся 5-узловой системой [247], представленной на рис. 4.2.

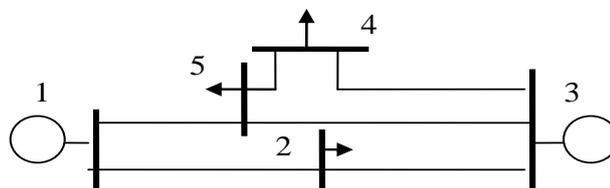


Рисунок 4.2 - 5-узловая система

Эта система имеет генераторы в узлах 1 и 3 (узел 1 является БУ), и нагрузки в узлах 2, 4 и 5. Параметры линий, данные по узлам и исходный режим аналогичны [247]. Рассмотрим поиск ПР в направлении утяжеления

$dY = [P_2, Q_2, 0, P_4, Q_4, P_5, Q_5]^T$, т.е. когда нагрузки ЭС увеличиваются пропорционально их значениям исходного режима. Предположим, что среднеквадратичные ошибки прогноза мощностей составляют 10% величин мощностей исходного режима, и $\gamma = 3$ (правило трех сигм [148]). Результаты итерационных вычислений НЛПР-НП метода (о.е., базисная мощность 100 MVA) для рассматриваемой системы показаны в таблице 4.2. На первом шаге в качестве вектора ξY принят нулевой вектор. В конце каждого шага вектор ξY корректировался согласно (3). Для сходимости НЛПР-НП метода потребовалось 3 шага.

ТАБЛИЦА 4.2 - РЕЗУЛЬТАТЫ НЛПР-НП МЕТОДА ДЛЯ 5 УЗЛОВОЙ СИСТЕМЫ

	P_2	Q_2	P_4	Q_4	P_5	Q_5
Y	1.1500	0.6000	0.7000	0.3000	0.7000	0.4000
ξY_0	0	0	0	0	0	0
$Y+t_1dY$	2.3590	1.2308	1.4359	0.6154	1.4359	0.8205
ξY_1	0.0357	0.0031	0.1874	0.0362	0.0252	0.0154
ξY_2	0.0297	0.0022	0.1884	0.0360	0.0233	0.0149
ξY_3	0.0296	0.0022	0.1884	0.0360	0.0233	0.0149
$Y+t_3dY$	2.1494	1.1214	1.3083	0.5607	1.3083	0.7476

Следует отметить, что в представленной НЛПР-НП модели (1) задается направление утяжеление dY , и рассматривается ошибка прогноза Y . В противоположность этому, в [282] учитывается ошибка прогноза dY . Такой подход также может быть реализован в НЛПР-НП модели, если (1б) представить в виде $\Delta F(Y+tdY+k(t)\xi Y)=0$, где $k(t)$ представляет собой скалярную функцию от коэффициента загрузки t , которая совместно с (1в) определяет доверительную область, отвечающую неопределенности tdY . В этом случае формулы итеративного НЛПР-НП метода изменятся незначительно. В (4.3.1б) вместо dY будет $dY+\xi Ydk/dt$, и в знаменателе (4.3.2е), а также числителе (4.3.2з), появится слагаемое $\xi Y^T \lambda d^2k/dt^2$.

4.6 Вычислительная эффективность НЛПР-Н(П) методов

Для выявления вычислительной эффективности НЛПР-Н(П) методов были проведены вычислительные эксперименты на ряде Российских и IEEE тестовых ЭС с количеством узлов от 14 до более 6000 узлов. При тестировании было принято: $dY=Y$; $\varepsilon=10^{-2}$ МВт (МВАр); $\varepsilon_\sigma=10^{-5}$; среднеквадратичная ошибка прогноза мощностей в PQ узлах принималась равной 10 % значений мощностей в исходном режиме; и использовалось правило трех сигм. Таблицы 4.3 и 4.4 представляют результаты вычислительных экспериментов на Intel i5 с 2 Гб оперативной памяти и частотой 2.9 ГГц, когда ограничения реактивной мощности генераторных узлов игнорируются или учитываются, соответственно. В первом столбце символ ‘Т’ указывает на IEEE тестовые схемы с соответствующим количеством узлов, а символ ‘R’ – на схемы ОЭС России с соответствующим количеством узлов. В столбцах 2, 3 и 4 этих таблиц для НЛПР-Н метода представлены по порядку полученный максимальный коэффициент загрузки t_M , требуемое число итераций ($It.$) и полное время расчета (T) в миллисекундах. В столбцах 5, 6, 7, и 8 для НЛПР-НП метода представлены, по порядку, полученный максимальный коэффициент загрузки t_E , с учетом погрешности прогноза узловых мощностей, требуемое число шагов ($St.$), общее количество итераций, выполненных НЛПР-Н методом, и полное время расчета в миллисекундах.

Во всех тестируемых случаях, кроме IEEE 118-узловой ЭС, получаемые ПР соответствовали бифуркации складки. В IEEE 118-узловой системе предел реактивной мощности генераторного узла 10 индуцировал LVB бифуркацию. Общее количество итераций процедуры определения LVB представлено в столбцах 3 и 7 в таблице 4.4 после символа «+». Вектор нормали LVB, необходимый для (4.5.3) НЛПР-НП метода, определялся следующим образом.

ТАБЛИЦА 4.3 - РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПР, КОГДА ПРОИГНОРИРОВАНЫ ПРЕДЕЛЫ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ

ЭС	НЛПР-Н			НЛПР-НП				PSAT-CPF [298]			UWPFLOW-PoS [214]			NR					
	t_M	It.	$T_{(ms)}$	t_E	St.	It.	$T_{(ms)}$	t_M	St.	$T_{(s)}$	t_M	It.	$T_{(s)}$	НЛПР		[298]		[214]	
														It.	$T_{(ms)}$	It.	$T_{(ms)}$	It.	$T_{(ms)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I 14	3.0603	6	0.58	2.9752	3	9	1.1	3.0598	15	193	3.0603	10	$7.5 \cdot 10^{-3}$	3	0.32	4	16	4	2.0
I 30	1.9588	7	1.2	1.8389	3	10	1.9	1.9588	19	0.741	1.9588	8	0.011	3	0.46	4	15	4	2.4
I 57	0.89209	7	2.2	0.81752	3	10	3.5	0.8904	7	0.183	0.89209	7	0.019	3	0.82	4	15	3	3.2
I 118	2.1871	7	4.1	2.1361	3	10	6.5	2.1870	32	0.529	2.1871	24	0.189	3	1.4	4	31	4	6.7
I 300	0.42841	7	10	0.36699	4	14	22	0.4283	31	3.451	0.42934	63	2.431	5	4.3	5	62	4	1.4
R 195	0.62981	8	7.2	0.54266	5	15	15	0.6297	40	1.199	0.62981	80	1.629	5	3.4	5	31	4	8.3
R 338	3.3986	10	14	3.3555	3	13	20	3.3981	149	9.005	3.3984	25	0.697	4	4.2	5	32	4	14
R 347	1.5057	8	13	1.4616	3	11	19	1.5050	22	1.628	1.5057	29	0.673	3	4.6	7	47	6	22
R 594	0.93473	8	22	0.87302	3	11	33	0.9096	40	8.707	Ошибка ^a			6	11	7	78	5	63
R 878	0.51291	7	34	0.42896	4	12	65	0.5122	16	9.571	0.51152	35	5.610	4	16	5	78	5	77
R 904	0.41894	5	23	0.27219	3	8	40	0.4180	18	15.56	0.38084	23	2.065	4	15	5	78	4	49
R 1834	0.64490	8	60	0.52874	3	12	97	0.6353	53	91.97	Ошибка ^a			4	26	5	110	4	75
R 6223	0.21942	5	214	0.10617	3	9	407	Ошибка ^b			-1	36	226.2	5	178	5	391	4	1786

Сообщение об ошибке: (a) PoS не получил решение (возможна проблема начального приближения, или AC/DC/FACTS проблема, или превышено допустимое число итераций); (b) Ошибка использования `luinc`.
Обращение за пределы памяти.

Таблица 4.4 - Результаты вычислений ПР, когда учитываются пределы реактивной мощности

ЭС	НЛПР-Н			НЛПР-НП				PSAT-CPF [298]			UWPFLOW-PoC [214]			NR					
	t_M	It.	$T_{(ms)}$	t_E	St.	It.	$T_{(ms)}$	t_M	St.	$T_{(s)}$	t_M	It.	$T_{(s)}$	НЛПР		[298]		[214]	
														It.	$T_{(ms)}$	It.	$T_{(ms)}$	It.	$T_{(ms)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I 14	0.77801	6	0.64	0.71146	3	9	1.2	0.7769	13	0.337	0.77800	11	0.034	3	0.39	4	16	4	4.1
I 30	0.54675	6	1.1	0.50362	4	10	2.2	0.5455	14	0.378	0.54675	17	0.096	4	0.53	4	16	6	5.0
I 57	0.61685	6	2.1	0.57916	4	10	3.9	0.6131	27	0.896	0.61685	24	0.237	3	0.81	4	15	3	3.3
I 118	1.0809	4+6	6.1	1.0633	3	6+9	9.8	1.0774	63	2.838	Ошибка ^a		5	1.9	9	47	5	13	
I 300	0.05888	10	15	-0.12361	5	20	33	0.0581	28	7.710	0.05883	17	0.752	6	5.2	17	125	6	27
R 195	0.24698	12	12	0.20609	5	20	21	0.3002	70	4.982	0.24698	70	2.900	15	6.9	Ошибка ^c		9	52
R 338	1.3669	10	16	1.3210	3	13	22	1.3674	83	9.417	1.3678	61	3.307	10	8.3	12	94	12	62
R 347	0.91534	7	12	0.88067	3	10	19	0.9233	89	15.91	0.91534	70	4.406	13	12	Ошибка ^d		17	97
R 594	0.21783	11	31	0.1578	3	16	48	0.2182	81	47.95	0.21783	35	4.410	14	22	52	547	Ошибка ^e	
R 878	0.08334	5	28	0.04723	3	9	53	0.0826	24	35.13	0.08334	30	8.113	18	48	93	1313	23	621
R 904	0.41778	8	36	0.27177	3	17	88	0.4167	101	153.4	Ошибка ^a		18	42	72	984	25	446	
R 1834	0.27043	11	102	0.24956	3	17	166	0.2750	119	403.4	0.27043	62	33.58	9	44	56	1219	Ошибка ^e	
R 6223	0.01389	4	213	-0.02180	3	8	411	Ошибка ^b			0.01388	20	207.3	22	551	Ошибка ^c		22	8928

Сообщение об ошибке: (a)-(b) – см. под Таблицей 4.3; (c) Достигнуто максимальное количество итераций без сходимости; (d) Небалансы увеличиваются слишком быстро. Сходимость вероятно недостижима; (e) Решение не получено (возможно коллапс напряжения, проблема управления AC/DC/FACTS, или превышено допустимое число итераций).

Предположим, что в результате работы процедуры определения ЛВБ, представленной в параграфе 4.4, определен узел, скажем m , предел реактивной мощности которого индуцирует ЛВБ бифуркацию. Тогда после смены типа узла m с PV на PQ^+ , уравнения потокораспределения в точке ЛВБ могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta P(P, \delta, V) = 0; \quad (1a)$$

$$\Delta Q(Q, \delta, V) = 0; \quad (1б)$$

$$\Delta Q_m(Q_m, \delta, V) = 0; \quad (1в)$$

$$V_m - V_m^{APB} = 0, \quad (1г)$$

где V_m^{APB} - величина модуля напряжения генератора m , который поддерживался его системой APB.

Линеаризация (1) дает:

$$\left[\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \right] \Delta \delta + \left[\frac{\partial \Delta P}{\partial V} \right] \Delta V + \frac{\partial \Delta P}{\partial V_m} \Delta V_m + \Delta P = 0; \quad (2a)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} \right] \Delta \delta + \left[\frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \right] \Delta V + \frac{\partial \Delta Q}{\partial V_m} \Delta V_m + \Delta Q = 0; \quad (2б)$$

$$\left[\frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta} \right] \Delta \delta + \left[\frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V} \right] \Delta V + \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \Delta Q_m = 0; \quad (2в)$$

$$\Delta V_m = 0. \quad (2г)$$

Используя (2г), СЛУ (2а)-(2в) можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta Q_m \end{bmatrix} = 0. \quad (3)$$

Матрица системы (3) является прямоугольной, число ее строк на единицу больше числа столбцов. Поэтому всегда найдется ненулевой вектор $\begin{bmatrix} N_P^T & N_Q^T & N_{Q_m}^T \end{bmatrix}^T$, удовлетворяющий соотношению

$$\begin{bmatrix} N_P \\ N_Q \\ N_{Q_m} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4)$$

Поэтому умножение (3) слева на вектор строку $[N_P^T, N_Q^T, N_{Q_m}^T]$ дает

$$N_P^T \Delta P + N_Q^T \Delta Q + N_{Q_m}^T \Delta Q_m = 0. \quad (5)$$

Следовательно, этот вектор является вектором нормали ЛІВ в пространстве мощностей. Так как матрица Якоби в ЛІВ является невырожденной, этот вектор, согласно (4), получается решением следующей СЛУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_P \\ N_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V} \end{bmatrix}^T N_{Q_m}. \quad (6)$$

Для оценки сравнительной вычислительной эффективности НЛПР-Н(П) методов в столбцах 9-14 таблиц 4.3-4.4 представлены результаты тестирования, полученные следующими свободно распространяемыми в интернете программными комплексами: 1) метод продолжения потокораспределения программного комплекса PSAT [298] (PSAT-CPF); 2) PoC метод программного комплекса UWPFLOW [214] (UWPFLOW-PoC). Для каждого из этих методов в таблицах, слева направо, представлены полученный максимальный коэффициент загрузки, число требуемых шагов (CPF) или итераций (PoC), и полное время расчета в секундах. Сравнение представленных результатов показывает, что НЛПР-Н метод значительно выигрывает у CPF и PoC методов по количеству итераций, полному времени расчета, точности и надежности. Представленные в предыдущих параграфах выражения НЛПР-Н метода показывают, что он использует только стандартные блоки расчета потокораспределения методом Ньютона. Поэтому НЛПР-Н метод может быть легко реализован в существующих программах расчета УР.

Следует отметить, что время расчета в большой степени зависит от того, как профессионально написана программа, от используемой технологии решения разреженных систем и других вещей. Исследовательский программный комплекс НЛПР-Н метода написан на C++ и использует инструментарий разреженных матриц, развитый в [35]. В свою очередь, PSAT написан на Matlab, и UWPFLOW на C. Поэтому чтобы сравнить быстродействие тестируемых методов, лучше использовать другой показатель, например, количество расчетов потокораспределения исходного режима, суммарное время которых соответствует времени расчета тестируемого метода [189]. В столбцах 15-20 таблиц 4.3-4.4 представлены результаты расчетов исходных режимов методом Ньютона (NR) тестируемых программных комплексов при использовании гладкого старта. Слева направо в этих столбцах представлено требуемое количество итераций и полное время расчета в миллисекундах каждого тестируемого программного комплекса. Анализ представленных результатов вычислительных экспериментов подтверждает, что НЛПР-Н метод также значительно выигрывает у CPF и PoC методов в быстродействии: время расчета ПР в заданном направлении утяжеления НЛПР-Н методом приблизительно соответствует 2 расчетам потокораспределения в среднем. НЛПР-Н метод является «прямым» методом. В противоположность ему CPF метод представляет собой пошаговый метод, который использует расширенную матрицу Якоби потокораспределения на каждом шаге. Согласно результатам тестирования, представленным в таблицах 4.3-4.4, определение ПР с помощью CPF метода сопоставимо с более чем 45 расчетами потокораспределения. Авторы [189] дают следующую оценку своего программного обеспечения CPF: время расчета примерно эквивалентно 10 расчетам потокораспределения. Другой более быстрый метод последовательного утяжеления, который использует двоичный поиск и метод Ньютона по параметру, требует в среднем 9 расчетов потокораспределения [268]. В PoC методе система линейных уравнений, структурно похожая на

(4.2.5), но с несимметричной матрицей, решается обычным прямым методом [347]. Эта система включает удвоенное число переменных и уравнений по сравнению со стандартной задачей расчета потокораспределения. Ее матрица является разреженной, поэтому итерация PoC метода приблизительно эквивалентна 8 итерациям расчета потокораспределения. В то же самое время, PoC метод требует меньше итераций и поэтому выполняется быстрее, чем CPF метод. Согласно результатам тестирования, представленным в таблицах 4.3-4.4, время расчета ПР PoC методом сопоставимо с немногим более чем 32 расчетами потокораспределения в среднем. В случае модификации PoC метода с симметричной матрицей, время расчета может быть уменьшено приблизительно в два раза. В этом случае время расчета ПР модифицированным PoC методом будет сопоставимо с немногим более чем 16 расчетами потокораспределения в среднем.

НЛПР-НП метод итеративно использует НЛПР-Н метод. Согласно результатам тестирования, представленным в таблицах 4.3-4.4, определение НЛПР-НП методом ПР в заданном направлении утяжеления с учетом погрешности прогноза узловых мощностей в среднем приблизительно соответствует 3.5 расчетам потокораспределения. Следует отметить, что в [371] предложен альтернативный подход, который неопределенность нагрузки транслирует в неопределенность коэффициента запаса статической устойчивости. Этот подход основывается на использовании коэффициентов чувствительности запаса статической устойчивости, которые, в свою очередь, определяются на основе матрицы Якоби и вектора нормали в ПР. Таким образом, альтернативный подход неявно предполагает неизменность структуры матрицы Якоби и нормального вектора ГПР в доверительной области, отвечающей неопределенности узловых мощностей. Однако расчеты ПР с учетом погрешности прогноза мощностей показали, что в ряде случаев некоторые генераторы изменяют свой тип на втором шаге НЛПР-НП метода, когда учитывается погрешность прогноза. Это было обнаружено для IEEE 300-узловой системы и всех Российских ЭС, представленных в таблице

4.4. Изменение структуры переменных изменяет структуру матрицы Якоби и вектора нормали ГПР. В таких случаях альтернативный подход не способен работать должным образом, в отличие от НЛПР-НП метода.

4.7 Определение критических сечений электрических систем в предельных режимах

Одним из существенных аспектов проблемы управления режимами энергосистем является обеспечение статической устойчивости ЭС. В настоящее время, из-за исключительной сложности и трудоемкости решения полной задачи статической устойчивости, выбор тех или иных мероприятий для обеспечения статической устойчивости ЭС осуществляют исходя из близости текущего режима ЭС к предельному. В существующих методах расчета ПР и анализа используются узловые модели сети. Однако особенности развития и функционирования ЭС привели к тому, что оценка тяжести режима, выбор мест и интенсивности приложения управляющих воздействий выполняются, как правило, на основе измерения параметров режима в сечениях ЭС [41], [157]-[162]. В связи с этим возникает потребность перехода от узловых параметров к параметрам режима в сечениях ЭС [195], в частности, определения критических сечений ЭС по известным параметрам ПР. Здесь и далее под критическим понимается сечение ЭС, по которому наступает нарушение статической апериодической устойчивости («развал») ЭС при переходе через ПР. Знание критического сечения, возможность его идентификации очень важны для диспетчерского персонала при наладке и работе устройств системной противоаварийной автоматики, а также имеет много других полезных приложений. В настоящее время задача выделения критических сечений в аналитическом виде решена только для трехмашинной ЭС [133]. В случае систем большей размерности выделение таких сечений проводится или на основе выполнения многочисленных расчетов ПР, или используя итеративную процедуру определения наиболее загруженных линий по эвристическим критериям с

последующим отключением этих линий до разделения ЭС на две несвязанные части [132], [291], [330], или на основе упрощенных моделей ЭС [138]. Основным недостатком таких подходов состоит в том, что результаты получаются только в численном виде без формирования полезных аналитических соотношений, позволяющих дать качественный анализ решения.

Для анализа предельных режимов и определения критических сечений предложено использовать собственные значения и векторы матрицы Якоби УУР [75], [85]. В качестве исходной математической модели, описывающей поведение ЭС, воспользуемся системой дифференциальных уравнений с ограничениями:

$$[T] \frac{d^2 \delta}{dt^2} = f_1(\delta, X); \quad (1a)$$

$$0 = f_2(\delta, X), \quad (1б)$$

где δ - вектор углов генераторов (инерционные переменные); X - вектор углов и модулей напряжения узлов нагрузки (неинерционные переменные); $[T]$ - диагональная матрица постоянных инерции генераторов.

Выбор такой модели позволяет, с одной стороны, ограничиться только информацией, используемой при расчете установившихся режимов (в стационарном режиме $d^2 \delta / dt^2 = 0$ и система (1) при принятых условиях переходит в УУР [202], [226]), а с другой — применить хорошо разработанный аппарат анализа устойчивости системы (1).

Воспользуемся первым методом Ляпунова, для чего линеаризуем систему (1):

$$[T] \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \delta} \right] \Delta \delta + \left[\frac{\partial f_1}{\partial X} \right] \Delta X; \quad (2a)$$

$$0 = \left[\frac{\partial f_2}{\partial \delta} \right] \Delta \delta + \left[\frac{\partial f_2}{\partial X} \right] \Delta X. \quad (2б)$$

Исключив из (2) вектор неинерционных переменных ΔX , получим известное уравнение малых колебаний:

$$[T] \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} = [A] \Delta \delta, \quad (3)$$

где

$$[A] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \delta} \right] - \left[\frac{\partial f_1}{\partial X} \right] \left[\frac{\partial f_2}{\partial X} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f_2}{\partial \delta} \right].$$

Поскольку приведение системы к виду (3) возможно при невырожденности матрицы $[\partial f_2 / \partial X]$, в дальнейшем подразумевается, что $\det[\partial f_2 / \partial X] \neq 0$. Случай вырожденности матрицы был рассмотрен в параграфе 1.7 первой главы.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений (3) описывает свободные колебания углов генераторов ЭС в окрестности установившегося режима:

$$\Delta \delta = 0,5 \sum_k R_k L_k^T \left\{ (\Delta \delta_0 + \gamma_k^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_k^{0,5} t} + (\Delta \delta_0 - \gamma_k^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_k^{-0,5} t} \right\}, \quad (4)$$

где L_k , R_k - соответственно левый и правый собственные векторы матрицы $[T]^{-1}[A]$, отвечающие собственному значению γ_k ; $\Delta \delta_0$, $\Delta \omega_0$ - соответственно векторы начальных значений отклонений углов и их скоростей.

Очевидно, условием статической устойчивости системы (1) по Ляпунову является вещественность и отрицательность собственных значений матрицы $[T]^{-1}[A]$. Если хоть одно собственное значение перейдет в правую комплексную полуплоскость, то система становится неустойчивой [288], [303]. В предельном режиме через нуль переходит вещественное собственное значение, что вызывает апериодическое нарушение устойчивости. Обозначим это число через γ_1 и представим (4) в виде

$$\begin{aligned} \Delta \delta = & 0,5 R_1 L_1^T (\Delta \delta_0 + \gamma_1^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_1^{0,5} t} + 0,5 R_1 L_1^T (\Delta \delta_0 - \gamma_1^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_1^{-0,5} t} + \\ & + 0,5 \sum_{k \neq 1} R_k L_k^T \left\{ (\Delta \delta_0 + \gamma_k^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_k^{0,5} t} + (\Delta \delta_0 - \gamma_k^{-0,5} \Delta \omega_0) e^{\gamma_k^{-0,5} t} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Причиной неограниченного возрастания $\Delta \delta$, а следовательно, и апериодической неустойчивости является первое слагаемое [188], [244]. Поэтому систему (5) можно приближенно представить в виде

$$\Delta \delta = R_1 \eta_1 e^{\gamma_1^{0,5} t}, \quad (6)$$

где

$$\eta_1 = 0,5L_1^T(\Delta\delta_0 + \gamma_1^{-0,5}\Delta\omega_0).$$

«Развал» ЭС начинается одновременно с переходом предельного режима. Поэтому для выделения критического сечения выполним анализ (6) для ближайшего к предельному апериодически неустойчивому режиму. Пользуясь теоремой линейной алгебры о малом изменении собственных векторов и чисел при малом изменении коэффициентов матрицы [39] считаем, что собственные векторы R_l , L_l близки к соответствующим векторам матрицы в предельном режиме $\gamma_1=0$ [241].

Из системы (6) видно, что направление изменения вектора $\Delta\delta$ определяется направлением правого собственного вектора R_l матрицы коэффициентов системы малых колебаний, отвечающего нулевому собственному значению [208]. Поэтому с помощью вектора R_l можно оценить тенденцию изменения взаимных углов по линии связи:

$$\Delta\delta_{line} = [C]\Delta\delta \approx [C]R_l\eta_1 e^{\gamma_1^{0,5}t}, \quad (7)$$

где $[C]$ - матрица связности, а следовательно, выявить критические сечения ЭС.

Переход от предельного к неустойчивому режиму сопровождается неограниченным возрастанием взаимных углов по линиям связи, входящих в критические сечения. В соответствии с (7) такие сечения будут состоять из связей с наибольшими разностями компонент вектора R_l . Таким образом, критические сечения ЭС разделяют компоненты правого собственного вектора R_l матрицы коэффициентов малых колебаний, отвечающего нулевому собственному значению.

Аналогичный результат получается при использовании алгебраического подхода [201], [258] для выделения критических сечений ЭС, когда в предельном режиме исследуется система линеаризованных уравнений УР

$$[A]\Delta\delta = -\Delta P, \quad (8)$$

где ΔP - вектор невязок активных мощностей генераторных узлов, а $[A]$ матрица системы (3):

$$\Delta \delta = -[A]^{-1} \Delta P \approx -\gamma_i'^{-1} R_i L_1'^T \Delta P = R_i \eta_1' \gamma_i'^{-1}, \quad (9)$$

где

$$\eta_1' = -L_1'^T \Delta P,$$

а L_1' - левый собственный вектор матрицы $[A]$, отвечающий собственному значению γ_1' . Если $\gamma_1 \rightarrow 0$ в (6), а в (9) $\gamma_1' \rightarrow 0$, тогда (6) и (9) дают фактически один и тот же результат.

Следует отметить, что для определения вектора R_i нет необходимости преобразовывать систему (2) к виду (3), или (8), вычислять эквивалентную матрицу $[A]$ и использовать матрицу $[T]$, а достаточно ограничиться только рассмотрением матрицы коэффициентов правой части системы (2), которая обычно совпадает с матрицей Якоби, используемой при расчете УР методом Ньютона [211]. Компоненты вектора R_i могут быть получены из правого собственного вектора матрицы правой части (2), отвечающему нулевому собственному значению. В этом можно убедиться, если вспомнить, что в предельных режимах указанная матрица вырождена и ее умножение слева на невырожденные квадратные матрицы (нижнюю треугольную, соответствующую приведению системы (2) к виду (3), и $[T]$) не изменяет компонент ее правого собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению. Это позволяет организовать эффективный алгоритм выделения критических сечений ЭС по заданным параметрам предельного режима, используя только данные расчета УР для полной схемы ЭС.

В предельном режиме одно из собственных значений матрицы Якоби (2), а также ее определитель должны быть равны нулю. Однако практически из-за ограниченности разрядной сетки ЭВМ и по ряду других причин получить такой режим довольно трудно и в качестве предельного выступает режим с достаточно малыми, но, как правило, ненулевыми значениями собственного значения и определителя. Поэтому для определения

собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению, предложено использовать алгоритм обратных итераций [142], который учитывает это обстоятельство. Алгоритм заключается в следующем:

1. задается начальное приближение вектора $R_k^0 = 1, \forall k$;
2. организуется итерационный цикл, состоящий из решения системы линейных уравнений вида

$$[A]R^i = R^{i-1} \quad (10)$$

и последующей нормировки вектора

$$R^i = R^i / R_{\max}^i, \quad (11)$$

где R_{\max}^i - максимальная по модулю компонента вектора R^i ;

3. окончание итерационного процесса проводится в случае достаточно малого межитерационного изменения R_{\max}^i . При этом $(R_{\max}^i)^{-1} = \gamma_{\min}$ матрицы $[A]$, а R^i совпадает с искомым правым собственным вектором.

Экспериментальные исследования показали, что для нахождения минимального собственного значения и соответствующего собственного вектора обычно требуется всего четыре - шесть итераций.

Для определения критического сечения разработан алгоритм [75], основанный на теории графов и заключающийся в следующем (рис. 4.3):

1. каждой линии электрической сети ставится в соответствие число S_j , представляющее собой разность соответствующих компонент вектора R_j (рис. 4.3.а);
2. отыскивается линия с максимальной S_j (линия $a-b$ с $S_1 = \max(S_j)$ на рис. 4.3.а); проводится ее разрезание;
3. по [153] выполняется поиск кратчайшего пути, соединяющего точки a и b (S_0, S_2, S_3, S_{11} на рис. 4.3.б). На этом пути отыскивается линия с максимальной S_j и также разрезается. Процесс повторяется до тех пор, пока между точками a и b имеется связь.

Разрезанные линии ($a-b$, $c-d$, $c-f$ на рис. 4.3.в) образуют критическое сечение.

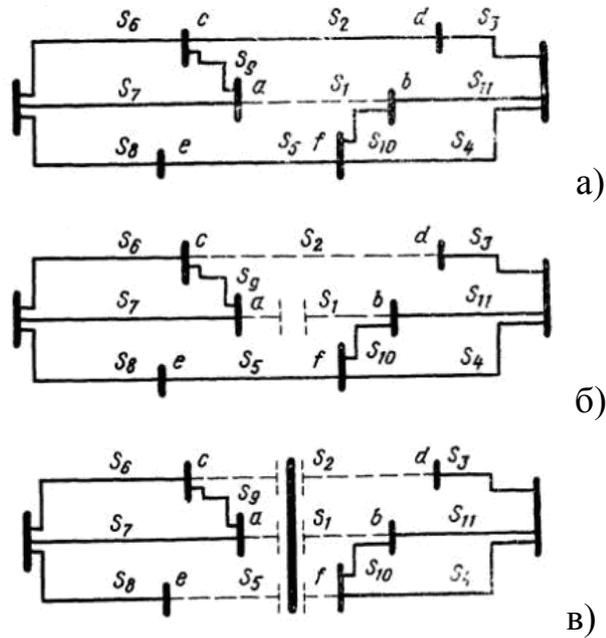


Рисунок 4.3 - Определение критического сечения

Для иллюстрации представленных положений рассмотрим простейшую трехмашинную консервативную ЭС, данную на рис. 4.4.а. Здесь арабскими цифрами обозначены узлы, а римскими — соответствующие сечения. На рис. 4.4.б показана область устойчивости этой системы из [22].

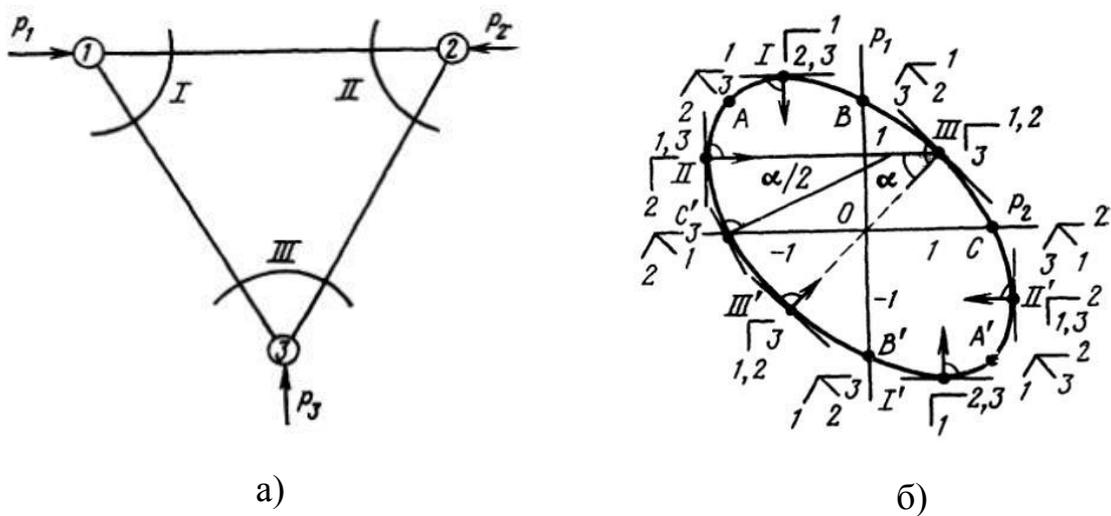


Рисунок 4.4 - Трехмашинная ЭС (а) и ее область устойчивости (б)

Поскольку для сети без потерь активной мощности матрица Якоби является симметричной, ее левый и правый собственные векторы совпадают, т. е. правый собственный вектор, который используется для выделения критических сечений, также является нормалью гиперповерхности предельных режимов, что и показано на рис. 4.4.б. Это позволяет наглядно представить результаты выделения критических сечений.

На рис. 4.4.б римскими цифрами обозначены точки предельной поверхности, в которых достигается максимальное значение мощности по соответствующим критическим сечениям, а буквами — точки, разделяющие эти сечения. При переходе предельного режима на участке А—В или А'—В' критическим является сечение I, А—С' или А'—С сечение II, а при переходе через В—С или В'—С' — сечение III. Точки разделения критических сечений можно получить, например, с помощью геометрических построений, как это выполнено для точки С' на рис. 4.4.б. Сравнение полученных результатов с подобными построениями, выполненными в [133] для трехмашинной системы, подтвердило тождественность полученных результатов. Следует отметить, что зоны, соответствующие критическим сечениям на поверхности предельных режимов, определяют возможность эквивалентирования трехмашинной ЭС к двухмашинной и структуру двухмашинного эквивалента, как это показано на рис. 4.4.б с помощью угольников. Наименьшая погрешность определения предельного режима и критического сечения по двухмашинному эквиваленту соответствует режимам, близким к точкам I, II и III. В точках А, В и С, разделяющих критические сечения, погрешность наибольшая. В окрестностях этих точек вообще-то нельзя эквивалентировать трехмашинную систему к двухмашинной, поскольку выделяется два критических сечения, что соответствует трехузловой схеме.

Аналогичный подход, основанный на собственных числах и векторах матрицы Якоби уравнений УР [45]-[47], [58]-[59], [68] может быть использован не только для выделения критических, но и слабых сечений ЭС.

Здесь под слабыми понимаются сечения ЭС, являющиеся определяющими для управления рассматриваемой динамической системы с учетом многорежимности ее функционирования. Это позволяет формировать эффективные эквивалентные модели ЭС, адекватно описывающие слабые сечения для заданной совокупности режимов ЭС [73], [74], [82]-[87], выделять слабые (сенсорные) узлы [38], [202].

Дальнейшие экспериментальные исследования выполнялись на основе опытной программы, написанной на C++. Использовались IEEE тестовые схемы, полные схемы ряда ЭС России, применяемые при планировании режимов, а также при оперативном управлении с меньшим числом узлов. Проводились исследования изменения минимальных собственных чисел и соответствующих собственных векторов в ходе утяжеления режима, а также анализировались предельные режимы при использовании полной и эквивалентной (3) матриц. Были получены следующие результаты.

1. В ходе утяжеления режимов наблюдается незначительное изменение минимального собственного числа, сменяющееся резким изменением в непосредственной близости к предельному режиму. В этой области резкому изменению подвергаются все характеристики режима.

2. Левый собственный вектор L_1 , определяющий вектор нормали ГПР, может быть использован для выбора управляющих воздействий, позволяющих выйти из зоны опасной близости к предельному режиму. Такие управляющие воздействия носят локальный характер и наиболее эффективны вблизи предельного режима.

3. Выделенное критическое сечение часто связано с дефицитом реактивной мощности и определяет локальный район со значительным снижением напряжения. Такая ситуация характерна для IEEE тестовых схем, наиболее часто встречается при расчетах по полной схеме ЭС и редко при расчетах на схеме, используемой при оперативном управлении. Для последней выделенное сечение определяется пропускной способностью

системообразующей сети и приводит к разбиению ЭС на дефицитную и избыточную по активной мощности части.

4. Предложенный подход может быть использован для выделения слабых сечений ЭС и формирования удобных для анализа статической устойчивости эквивалентных моделей ЭС.

Выводы по главе 4

1. Исследование особенностей модели нелинейного программирования предельных режимов электрических систем в заданном направлении изменения мощностей, ее структуры и рассмотрение условий оптимальности второго порядка НЛПР-Н модели, позволили разработать простой, точный, быстрый и надежный НЛПР-Н метод расчета ПР в заданном направлении утяжеления. Вычислительные эксперименты на схемах ряда ЭС России и IEEE тестовых ЭС показали, что НЛПР-Н метод значительно превосходит существующие методы и алгоритмы расчета ПР в заданном направлении утяжеления. В среднем, определение ПР в заданном направлении НЛПР-Н методом по времени расчета сопоставимо с двумя обычными расчетами потокораспределения. НЛПР-Н метод является надежным и использует только стандартные блоки расчета УР, поэтому может быть легко реализован в существующих программных комплексах расчета УР. Это позволит повысить быстродействие и точность расчетов, расширить спектр задач ПР, решаемых в темпе процесса.

2. НЛПР-Н метод относится к методам нелинейного программирования, поэтому позволяет достаточно легко учитывать различные технологические ограничения на параметры режима. В отличие от существующих методов расчета ПР в заданном направлении утяжеления он может не только рассчитывать ПР, соответствующие бифуркации, индуцированные пределом реактивной мощности, но также идентифицировать конкретные генераторы, чьи пределы реактивной мощности индуцировали эти бифуркации.

3. НЛПР-Н модель и метод являются универсальными, позволяют расширить спектр решаемых задач ПР. Так, например, разработанные на их основе НЛПР-НП модель и метод позволяют определять ПР и коэффициент запаса статической устойчивости ЭС в заданном направлении утяжеления с учетом ошибок прогноза узловых мощностей исходного режима или направления изменения мощностей. Вычислительные эксперименты на ряде схем ЭС России и IEEE тестовых ЭС показали, что НЛПР-НП метод, итеративно использующий НЛПР-Н, обладает достаточно высоким быстродействием. Время расчета ПР в заданном направлении утяжеления с учетом ошибок прогноза узловых мощностей исходного режима НЛПР-НП методом в среднем сопоставимо с 3.5 обычными расчетами потокораспределения.

4. В существующих методах расчета и анализа ПР используются узловые модели. Однако при планировании и оперативном управлении оценка тяжести режима, выбор мест и интенсивности приложения управляющих воздействий выполняется, как правило, на основе измерения параметров режима в сечениях ЭС. Учет особенностей уравнений малых колебаний в ПР позволил предложить подход и разработать вычислительно эффективный алгоритм определения критических сечений ЭС в ПР, т.е. сечений, по которым наступает нарушение статической апериодической устойчивости («развал») ЭС при переходе через ПР. Результаты вычислительных экспериментов показали, что выделенное критическое сечение часто связано с дефицитом реактивной мощности и определяет локальный район со значительным снижением напряжения. Такая ситуация характерна для IEEE тестовых схем, наиболее часто встречается при расчетах по полным схемам ЭС России, и редка при расчетах на схемах, используемых при оперативном управлении. Для последних выделенное сечение определяется пропускной способностью системообразующей сети и приводит к разбиению ЭС на дефицитную и избыточную по активной мощности части. Предложенный подход идентификации критических

сечений ЭС в ПР использует только анализ графа сети, взвешенного компонентами правого собственного вектора матрицы Якоби потокораспределения, отвечающего нулевому собственному значению, не требует никаких динамических моделей (параметры которых, как правило, не известны на практике) и может быть легко реализован в существующих программах расчета УР. Разработанный алгоритм может быть использован также для выделения слабых сечений ЭС, сенсорных узлов и формирования удобных для анализа статической устойчивости эквивалентных моделей ЭС.

Глава 5 Вычислительные модели нелинейного программирования ближайших предельных режимов электрических систем

5.1 Введение

Оценка предельных режимов играет ключевую роль в анализе, планировании и управлении режимами энергосистем [238]. Обычной практикой является поиск ПР в заданном направлении утяжеления (изменения мощности) [329]. Поскольку направления утяжеления режима определяются специалистами системного оператора (СО), безопасность всей ЭС зависит от их опыта и квалификации. Знание ближайшего ПР (БПР) позволяет повысить надежность и безопасность работы энергосистемы.

Чтобы найти БПР, сначала необходимо определить критерий "близости". В теории и практике ЭС близость текущего режима к ПР определяется с точки зрения коэффициента запаса статической устойчивости. Согласно результатам главы 1, ПР характеризуется неспособностью БУ поддержать режим одного или ряда узлов. Следовательно, в ПР в одном из сечений энергосистемы (называемым критическим сечением [75]) между БУ и этой группой узлов будет достигнут предельный переток мощности. В России, так же, как ряде других стран, коэффициент запаса статической устойчивости количественно определяется дополнительной величиной мощности, которая может быть передана с одной стороны сечения на другую сторону, без нарушения статической устойчивости [157]-[162]. Причем такие сечения, более известные за рубежом как ограниченные статической устойчивостью передающие коридоры, определяются заранее на основе проведения многочисленных offline расчетов. В других странах коэффициент запаса статической устойчивости численно определяется как процент от предела статической устойчивости в масштабе всей системы, который, в свою очередь, количественно находится как максимально возможное использование пропускной способности сети (в МВт) энергосистемы, учитывая, как внутреннюю генерацию, так и импорт по линиям связи,

непосредственно перед возникновением статической неустойчивости [232], [329]. Максимальная величина мощности, которая может быть передана по сечениям, так же, как максимальная пропускная способность сети в МВт, не остаются постоянными. Они изменяются в зависимости от состава нагрузки, размера и размещения резерва мощности, запланированного и незапланированного состава генерации, включенных и отключенных линий электропередачи, потоков мощности в электрооборудовании, уровней напряжения, размера и размещения компенсирующих устройств и т.д. Поэтому для СО очень важно знание действительных пределов для оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС [49].

Потоки мощности в сечениях, а также пропускная способность сети в МВт, являются функциями узловых параметров. Поэтому близость режима к предельному может быть оценена в терминах расстояния от текущего (желаемого) режима до ПР в пространстве узловых мощностей [247]. Для количественной оценки расстояния обычно используется Евклидова [189], [209], [210], [246], [247], [307], [308], [314] или l_1 -норма [259], [361], [365].

В ЭС параметры ПР используются как для оценки коэффициента запаса статической устойчивости, так для превентивного или противоаварийного управления. Согласно [356], “превентивное управление имеет дело с управляющими воздействиями, которые должны быть выполнены до возникновения возможных опасных инцидентов для того, чтобы обеспечить надлежащий коэффициент запаса статической устойчивости ЭС ... Противоаварийное управление, с другой стороны, имеет дело с управляющими воздействиями, которые реализуются при возникновении конкретного инцидента, чтобы восстановить статическую устойчивость ЭС”. Наиболее часто подходы, предложенные для превентивного управления, используют параметры ПР, полученного в заданном направлении изменения мощности узлов [217], [219], [220], [252], [260], [261], [301], [322], [323], [336], [327], [362]. Так, в [219], [252] и [356] авторы используют вектор нормали гиперповерхности ПР для получения коэффициентов влияния

управляющих воздействий превентивного управления на коэффициент запаса статической устойчивости ЭС. В [209], [217], [237], [301], [322], [323], [336], [361], чтобы обеспечить коэффициент запаса статической устойчивости ЭС не ниже требуемого, в решаемых задачах оптимального потокораспределения система нелинейных УУР дополняется системой уравнений потокораспределения в заданном направлении изменения мощностей узлов. Также в [217], для превентивного управления используется минимальное сингулярное значение матрицы Якоби потокораспределения. В [189], [209], [210] и [246] параметры ближайшего ПР в евклидовой норме, а в [365] - в l_1 -норме, используются для такого управления. Противоаварийное управление обычно связано с вводом режима ЭС в область существования. Для этой цели автор [307]-[308] использует параметры ближайшего ПР в евклидовой норме и, неявно, в l_1 -норме. Ближайшие ПР в l_1 -норме также используются неявно в [253] и явно в [259]. В [362] ближайший ПР в взвешенной евклидовой норме используется для противоаварийного управления.

К настоящему времени для поиска БПР в многомерном пространстве предложено несколько моделей. Одной из первых является модель БПР в евклидовой норме [60]-[65], [247]. Модель, предложенную в [246]-[247], можно рассматривать как обобщение уравнений метода точки коллапса (PoC) на многомерное параметрическое пространство. Для направления утяжеления в ней используется геометрическая интерпретация левого собственного вектора вырожденной матрицы Якоби потокораспределения, как вектора нормали гиперповерхности ПР. Однако эта модель, так же, как и PoC метод, имеет довольно плохие вычислительные характеристики при решении методом Ньютона. Кроме этого, такая модель не сформулирована как задача оптимизации, поэтому довольно трудно учесть ограничения типа неравенств. Вот почему для реализации этой модели в [189] была предложена итеративная процедура расчета ПР, причем в качестве очередного направления утяжелений использовался левый собственный

вектор вырожденной матрицы Якоби потокораспределения предыдущего ПР. В этом случае, согласно [189], полное время расчёта БПР (в евклидовой норме) в среднем примерно соответствует 100 расчетам потокораспределения. В [247] также другая модель БПР в евклидовой норме сформирована как задача оптимизации, в которой система УУР вместе с уравнениями линейной зависимости строк матрицы Якоби потокораспределения используются, как уравнения ограничений в форме равенства. Однако такая оптимизационная модель, которая использует уравнения вырожденной матрицы Якоби в качестве уравнений ограничений в форме равенства, не может учесть пределы по нагреву электрооборудования, индуцированную пределом бифуркацию, и т.д., поскольку явное использование таких уравнений вынуждает решение быть предельным с точки зрения существования режима. Кроме этого, такая оптимизационная модель имеет больше нелинейных уравнений и трудоемка для численной реализации. Поэтому, чтобы применить похожую модель, автор [210] предложил использовать обобщенный метод приведенного градиента. В [361] похожая оптимизационная модель, но с максимизацией l_1 -нормы, реализуется, итеративно используя метод последовательного утяжеления. В [365] предложена двухуровневая модель нелинейного программирования, которая итеративно сочетает поиск ПР в заданном направлении утяжеления с нахождением БПР в l_1 -норме. Для поиска БПР, когда УУР не имеют реального решения для желаемого режима ЭС, предложены более простые модели без явной записи уравнений вырожденности матрицы Якоби потокораспределения, которые используют особенность такого случая. В [307]-[308] такая модель БПР в евклидовой норме сформирована как оптимизационная задача, для решения которой используется метод Ньютона по параметру. В [259] для нахождения БПР в l_1 -норме используется метод внутренней точки нелинейного программирования.

Таким образом, к настоящему времени модели ближайших ПР используются только в евклидовой или l_1 -норме. В [99] было предложено

использовать l_∞ -норму, однако, кроме формулировки модели, других результатов не представлено. До настоящего времени, по сведениям автора, теоретическое исследование и сравнение моделей БПР в различных нормах еще не представлено в технической литературе, кроме работ автора [11], [198]. В [338] сделано предположение, что, хотя выбор нормы влияет на получаемый БПР, рекомендуемые управляющие воздействия для ввода режима в область существования вероятно не будут сильно зависеть от используемой нормы. В [219] анализ численных результатов иллюстративных примеров обнаружил, что l_1 -норма дает разреженное решение в отличие от евклидовой нормы.

Напомним, что любая функция, которая удовлетворяет трем аксиомам для нормы, а именно: любая 1) неотрицательная, 2) однородная, и 3) выпуклая функция является векторной нормой [36]. Существует большое число функций, удовлетворяющих аксиомам для нормы, а значит и векторных норм. В математическом анализе векторные нормы широко используются для оценки сходимости последовательности векторов. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны в том смысле, что если последовательность сходится к вектору по какой-то норме, то она будет сходиться к тому же вектору по любой другой векторной норме [178]. Выбор нормы не влияет на конечную сходимость метода, хотя может иметь серьезные воздействия на объем вычислений [235]. Поэтому обычно предпочитают норму, которую легко применить в конкретной ситуации.

В противоположность этому, выбор нормы влияет на получаемый БПР [11]. В математике и практике большинство предпочитают один (l_1), Евклидову (l_2) или бесконечность (l_∞) векторные нормы:

$$\|Y\|_1 = \sum_k |Y_k|; \quad \|Y\|_2 = \sqrt{\sum_k |Y_k|^2}; \quad \|Y\|_\infty = \max_k \{ |Y_k| \},$$

которые являются частными случаями l_p -нормы ($p \geq 1$):

$$\|Y\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |Y_k|^p}. \quad (1a)$$

Семейство l_p -норм является бесконечным множеством и представительным семейством всех норм. В свою очередь, согласно Приложения Д, l_p -нормы удовлетворяют следующему неравенству

$$\|Y\|_{p_k} \leq \|Y\|_{p_m} \text{ для всех } p_k > p_m. \quad (1б)$$

Поэтому

$$\|Y\|_{\infty} \leq \dots \leq \|Y\|_{p+1} \leq \|Y\|_p \leq \|Y\|_{p-1} \leq \dots \leq \|Y\|_1, \quad (1в)$$

и

$$S_{\infty} \supset \dots \supset S_{p+1} \supset S_p \supset S_{p-1} \supset \dots \supset S_1, \quad (1г)$$

где $S_p = \{Y \mid \|Y\|_p \leq 1\}$, Поэтому l_1 и l_{∞} -нормы могут рассматриваться как «крайние» представители, а Евклидова норма - как более или менее «характерный» представитель семейства l_p -норм. Поэтому модели БПР в этих нормах позволяют оценить адекватность использования всего семейства l_p -норм, а значит и всех норм, для превентивного и противоаварийного управления ЭС.

Цель настоящей главы состоит в том, чтобы предложить, теоретически исследовать и сравнить модели нелинейного программирования ближайших ПР в l_p -нормах (НЛПР- B_p модели), и выбрать модели, которые больше всего подходят для оценки коэффициента запаса статической устойчивости, ввода режима ЭС в область существования режима и в допустимую область.

Далее глава организована следующим образом. В параграфах 5.2-5.5 предложены и исследованы НЛПР- B_p модели ближайших ПР в Евклидовой, l_{∞} , l_1 и l_p -нормах в их общей форме. В параграфе 5.6. полученные теоретические результаты численно проиллюстрированы на 5-узловой тестовой системе. В параграфе 5.7 исследуется применение НЛПР- B_p моделей ближайших ПР в l_p -нормах для оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС и ввода режима в область существования; определяются наиболее полезные модели для СО. В параграфе 5.8 представлено теоретическое исследование влияния технологических ограничений параметров ЭС на ближайшие ПР. В параграфе 5.9 представлен

подход учета ограничений реактивной мощности в НЛПР- B_p моделях, повышающий быстродействие вычислительных моделей. Результаты вычислительных экспериментов представлены в параграфе 5.10. Наконец, в параграфе 5.11 даны выводы по главе.

5.2 НЛПР- B_2 модель

Евклидова норма тесно связана с задачей наименьших квадратов [121] и имеет давнюю историю применения для решения задач анализа и управления режимами ЭС, таких как оценка состояния электрической системы, расчет потокораспределения, ввод режима ЭС в область существования т.д. Наиболее часто БПР ассоциируется с кратчайшим расстоянием (наименьшей длиной вектора) к гиперповерхности ПР [247]. Т.к. минимум Евклидовой нормы соответствует минимуму ее квадрата, НЛПР- B_2 модель ближайших ПР в Евклидовой норме может быть представлена следующим образом:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{k \in SC} dY_k^2 \quad (1a)$$

при условии

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0. \quad (1б)$$

Здесь (1б) есть система уравнений потокораспределения; вектор X представляет углы напряжения узлов, кроме БУ, и модули напряжения PQ узлов; вектор Y задает активные мощности узлов, кроме балансирующего узла, и реактивные мощности PQ узлов; вектор dY представляет увеличение Y , чтобы достичь ПР. Подмножество управляемых (SC) переменных dY_k , $k \in SC$, используемых для нахождения БПР, определяется СО в зависимости от решаемой задачи: оценка коэффициента запаса статической устойчивости, ввод режима в область существования и т.д. Все остальные элементы вектора dY принимаются равными нулю $dY_k = 0, k \notin SC$. Учет технологических ограничений в задаче (1) будет рассмотрен позже.

Согласно результатам исследований, представленным в главе 3, для того, чтобы решением задачи (1) был ПР, необходимо, чтобы ее состав

зависимых и независимых переменных соответствовал стандартной задаче расчета потокораспределения. В дальнейшем, чтобы упростить систему обозначений, предположим, что уравнения потокораспределения даны в форме баланса мощностей в полярной системе координат [35] и $k \in SC$.

Модель (1) имеет важную особенность. Если уравнения потокораспределения $\Delta F(X, Y) = 0$ имеют решение и начальное приближение X переменных находится вблизи этого решения, тогда решением задачи (1) будет $dY = 0$ [11]. Так как тривиальное решение находится вне области рассмотрения, вначале исследуем случай, когда уравнения потокораспределения $\Delta F(X, Y) = 0$ не имеют реального решения, например, как показано на рис. 5.1 для 3-х узловой консервативной ЭС с PV узлами – область существования УР находится внутри эллипса; вне эллипса уравнения потокораспределения не имеют реального решения.

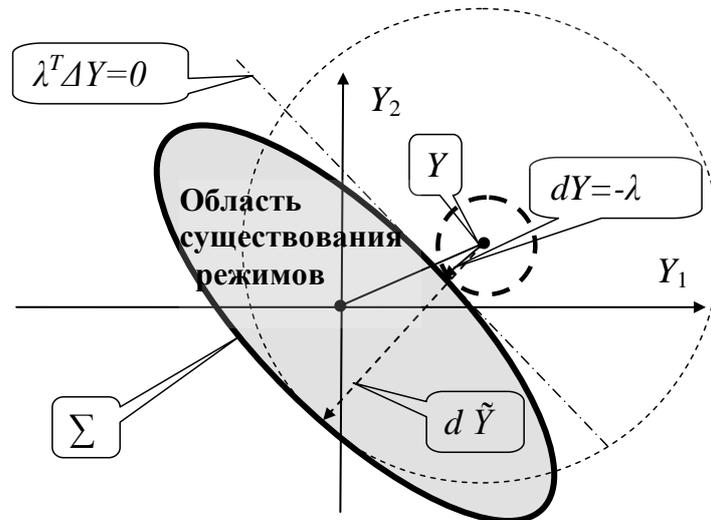


Рисунок 5.1 - Гиперповерхность ПР Σ 3-х узловой консервативной ЭС и ближайший ПР в евклидовой норме, когда уравнения потокораспределения не имеют решения

Функция Лагранжа задачи (1) может быть представлена как

$$L = \frac{1}{2} \sum dY_k^2 / 2 + \Delta F(X, Y + dY)^T \lambda, \quad (2)$$

где λ является вектором вспомогательных переменных, называемых множителями Лагранжа.

Дифференцирование функции Лагранжа относительно всех переменных дает условия оптимальности первого порядка:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + dY) = 0; \quad (3a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (3б)$$

$$\nabla_{dY_k} L = dY_k + \lambda_k = 0, \quad (3в)$$

где $[J] = [\partial \Delta F / \partial X]$ представляет собой матрицу Якоби потокораспределения.

Согласно принятому предположению уравнения потокораспределения $\Delta F(X, Y) = 0$ не имеют реального решения, поэтому условию (3а) будет соответствовать вектор $dY \neq 0$. В этом случае $\lambda \neq 0$ немедленно следует из (3в). Поэтому (3б) определяет вырожденность матрицы Якоби потокораспределения, т.е. ПР [196], [207].

Известно, что вектор множителей Лагранжа λ в (3б) является вектором нормали гиперповерхности ПР [112]. Действительно, скалярное произведение вектора множителей Лагранжа λ и вектора линеаризованных уравнений потокораспределения $[J] \Delta X + \Delta Y = 0$ с учетом (3б) в ПР дает

$$\lambda^T \Delta Y = 0. \quad (3г)$$

Уравнение (3г) есть уравнение гиперплоскости к гиперповерхности ПР в пространстве узловых мощностей. Это уравнение определяет вектор λ как вектор нормали гиперповерхности ПР. Поэтому согласно условию (3в) этот ПР есть БПР в Евклидовой норме в подпространстве управляемых переменных dY_k (рис. 5.1)

Необходимо отметить, что начальное приближение вектора X играет важную роль, когда режим ЭС вводится в область существования. Например, если начальное приближение будет выбрано в противоположном квадранте близко к гиперповерхности ПР, то решением (см. рис. 5.1) будет вектор $d\tilde{Y}$ [131]. Это можно объяснить, если заметить, что условие (3б) явно включает только X переменные, поэтому расчетная модель (3) ведет к ПР, ближайшему к начальному приближению углов и модулей напряжений в подпространстве мощностей узлов управления dY_k . Чтобы получить

глобальный минимум, необходимо использовать хорошее начальное приближение. Один из способов сделать это состоит в том, чтобы воспользоваться методом Ньютона по параметру. Известно, что, если система уравнений потокораспределения не имеет решения, метод Ньютона по параметру будет сходиться к гиперповерхности ПР [35], [308]. Метод Ньютона по параметру не использует условие (3б) явно, поэтому он обеспечивает адекватное и быстрое начальное приближение X переменных для поиска БПР. Например, чтобы найти БПР, соответствующий глобальному минимуму, 4 итерации метода Ньютона по параметру и 3 итерации модели (1) потребовалось для системы [131].

Компоненты вектора dY задачи (1) - (3) могут быть интерпретированы как компоненты вектора невязок мощностей узлов, а сама задача - как модель наименьших квадратов потокораспределения [35]. Вычислительные характеристики модели наименьших квадратов заметно хуже, чем для стандартной модели потокораспределения [33]. Поэтому модель наименьших квадратов потокораспределения не нашла применения для расчета потокораспределения. Однако эта модель дает возможность поиска БПР. Для этого необходимо задать начальное приближение углов и модулей напряжения вблизи гиперповерхности ПР [139]. В этом случае, так же, как при вводе режима в область существования, ПР будет ближайшим к начальному приближению углов и модулей напряжения узлов в подпространстве узловых мощностей [131], [139].

Чтобы получить ПР всегда, а не только, когда система $\Delta F(X, Y) = 0$ не имеет решения, необходимо обеспечить $\lambda \neq 0$ в (3). Это можно сделать несколькими путями, например, если нормировать вектор множителей Лагранжа λ :

$$\sum \lambda_k^2 - 1 = 0, \quad (4a)$$

ввести новые переменные t (скаляр) и $dY = td\hat{Y}$ (см. рис. 5.2), представить (3а) в виде

$$\Delta F(X, Y + t d\hat{Y}) = 0, \quad (4б)$$

и использовать $d\hat{Y}$ вместо dY в (3в).

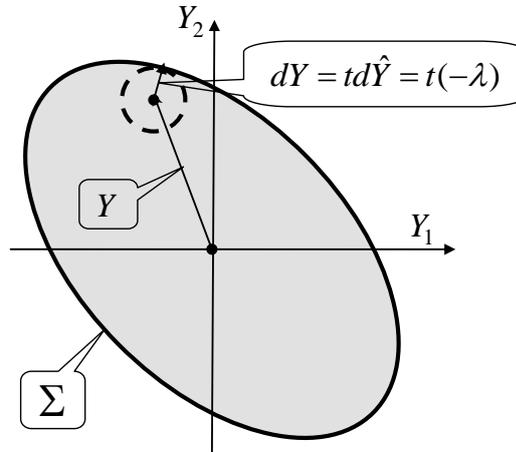


Рисунок 5.2 - Ближайший ПР в евклидовой норме

Однако в этом случае полученная система нелинейных уравнений (3б)-(3в), (4) больше не будет системой условий оптимальности первого порядка для задачи (1), т.к. запрещено накладывать искусственные ограничения на вектор множителей Лагранжа, например, (4а), в задаче нелинейного программирования. Эта система будет подобна модели, предложенной в [247], и имеет все ее недостатки, отмеченные ранее: невозможность применить мощные методы нелинейного программирования, трудность или невозможность учесть технологические ограничения и пределы. Лучшим решением является применение эпиграф-формы [206] для задачи (1).

Рассмотрим эпиграф-форму задачи нелинейного программирования (1):

$$\min t \quad (5а)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0; \quad (5б)$$

$$\sqrt{\sum dY_k^2} - t \leq 0, \quad (5в)$$

со скалярной переменной t .

Модель (5) также имеет тривиальное решение $dY = 0$, что соответствует исходному режиму. Чтобы исключить такое тривиальное решение,

воспользуемся новыми переменными $dY = td\hat{Y}$. Тогда модель (5) может быть представлена в следующем виде:

$$\min t \quad (6a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + td\hat{Y}) = 0; \quad (6б)$$

$$\sum d\hat{Y}_k^2 - 1 \leq 0. \quad (6в)$$

Функцию Лагранжа для (6) можно представить следующим образом

$$L = t + \Delta F(X, Y + td\hat{Y})^T \lambda + \rho(\sum d\hat{Y}_k^2 - 1)/2, \quad (7)$$

где ρ является множителем Лагранжа для (6в).

Условия оптимальности первого порядка этой задачи будут:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + td\hat{Y}) = 0; \quad (8a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (8б)$$

$$\nabla_{d\hat{Y}_k} L = t\lambda_k + \rho d\hat{Y}_k = 0; \quad (8в)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum d\hat{Y}_k \lambda_k = 0; \quad (8г)$$

$$\rho(\sum d\hat{Y}_k^2 - 1)/2 = 0; \rho \geq 0. \quad (8д)$$

Условие (8г) гарантирует $\lambda \neq 0$. Поэтому согласно (8б) установившийся режим будет ПР.

Умножение (8в) на $d\hat{Y}_k$ и дальнейшее суммирование по k с учетом (8г)–(8д) дает $t = \rho \geq 0$. Если исходный режим не является ПР, тогда

$$t = \rho > 0, \quad (9a)$$

и (8в) может быть представлено как

$$\lambda_k + d\hat{Y}_k = 0. \quad (9б)$$

Отсюда следует, что решению (8) соответствует БПР. Используя (9б), система линеаризованных уравнений (8а), (8б), и (8г) может быть представлена как

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 \\ J & -tE^{dY} & d\hat{Y} \\ 0 & d\hat{Y}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x L \\ \Delta F \\ \nabla_t L/2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $[H] = [\partial^2 \Delta F^T \lambda / \partial X^2]$ есть матрица Гессе; E^{dY} является диагональной матрицей с элементами $E_{kk}^{dY} = 1, \forall k; E_{ll}^{dY} = 0, \forall l \notin SC$.

Сравнение (6а)-(6б) с [355, (11)-(12)] показывает, что эти модели имеют некоторое сходство, и модель (6) может рассматриваться в определенном смысле как обобщение модели [355] на многомерное параметрическое пространство, несмотря на то, что в [355] целевая функция максимизируется в отличие от модели (6). Использование максимума вместо минимума можно объяснить, если заметить что в [355] все компоненты $d\hat{Y}_k$ фиксируются и оптимизация выполняется в одномерном параметрическом пространстве. Если бы [355] использовал минимизацию вместо максимизации, тогда был бы получен ПР в противоположном заданному направлении утяжеления. В (6) вектор $d\hat{Y}$ не фиксируется, всем его компонентам $d\hat{Y}_k; k \in SC$ разрешено изменяться в соответствии с (6в) и оптимизация выполняется в многомерном параметрическом пространстве. Рис.5.2 иллюстрирует необходимость использования минимума в (6). Точка решения, представленная на рис.5.2, соответствует минимуму (6). Если бы (6) использовал максимум вместо минимума, вводящая в заблуждения точка на эллипсе в IV квадранте была бы получена как решение.

5.3 НЛПР- B_∞ модель

НЛПР- B_∞ модель ближайших ПР в l_∞ -норме может быть представлена как:

$$\min \max |dY_k| \quad (1a)$$

при условии

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0. \quad (1б)$$

Функция цели (1а) не дифференцируемая. Для того чтобы воспользоваться техникой нелинейного программирования, задачу (1) следует сформировать в эпиграф-форме [199]:

$$\min t \quad (2a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0; \quad (2б)$$

$$dY_k - t \leq 0, \quad -dY_k - t \leq 0. \quad (2в)$$

Согласно (2в) $t \geq 0$. Поэтому, используя $dY = td\hat{Y}$, задача (2) может быть представлена как:

$$\min t \quad (3a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + td\hat{Y}) = 0; \quad (3б)$$

$$d\hat{Y}_k - 1 \leq 0, \quad -d\hat{Y}_k - 1 \leq 0. \quad (3в)$$

Функцией Лагранжа для этой задачи является

$$L = t + \Delta F(X, Y + td\hat{Y})^T \lambda + \sum \gamma_k^+ (d\hat{Y}_k - 1) + \sum \gamma_k^- (-d\hat{Y}_k - 1),$$

где γ_k^+ , γ_k^- - множители Лагранжа для уравнений ограничений (3в). Поэтому условия оптимальности первого порядка для (3) можно представить в виде:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + td\hat{Y}) = 0; \quad (4a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (4б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum \lambda_k d\hat{Y}_k = 0; \quad (4в)$$

$$\nabla_{dY_k} L = t\lambda_k + \gamma_k^+ - \gamma_k^- = 0; \quad (4г)$$

$$\gamma_k^+ (d\hat{Y}_k - 1) = 0, \quad \gamma_k^+ \geq 0; \quad (4д)$$

$$\gamma_k^- (-d\hat{Y}_k - 1) = 0, \quad \gamma_k^- \geq 0. \quad (4е)$$

Условие (4в) гарантирует $\lambda \neq 0$. Поэтому, согласно (4б), установившийся режим будет ПР [264]. Умножение (4г) на $d\hat{Y}_k$ и последующее суммирование по k с учетом (4в) и (4д)-(4е) дает $t = \sum (\gamma_k^+ + \gamma_k^-) \geq 0$. Поэтому, если исходный режим не является ПР, тогда

$$t = \sum (\gamma_k^+ + \gamma_k^-) > 0. \quad (4ж)$$

Рассмотрение (4д)-(4е) с (4ж) дает, что по крайней мере одна из компонент $|d\hat{Y}_m| = 1$. Согласно (4д)-(4е), множители Лагранжа $\gamma_k^+ = \gamma_k^- = 0$ для других $|d\hat{Y}_k| < 1$. В этом случае $\lambda_k = 0$ следует из (4г). Такая комбинация компонент вектора нормали λ гиперповерхности ПР является конечным числом и поэтому имеет меру ноль на гиперповерхности ПР. Например, кривая ПР классической 3-х узловых консервативной системы имеет только 4 таких точки с $\lambda_k = 0$, а именно, A, B, C , и D на рис. 5.3.

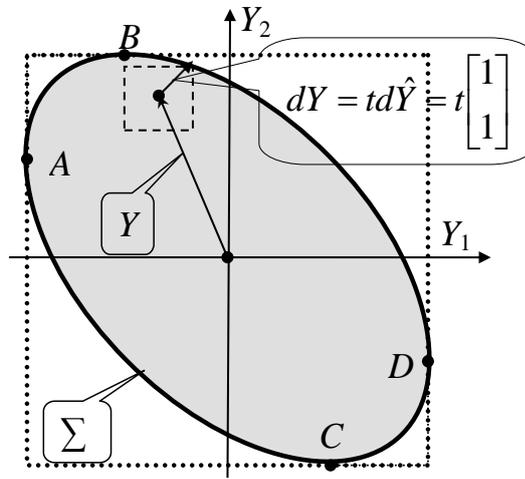


Рисунок 5.3 - Ближайший ПР в l_∞ -норме

С точки зрения теории вероятности, шанс таких событий с $\gamma_k^+ = \gamma_k^- = 0$ равен нулю. Поэтому только равные по модулю величины $|d\hat{Y}_k| = 1$ для всех k соответствуют решению задачи (3). В самом деле, параметры каждого узла влияют на режим ЭС. Однако только максимальная величина $|d\hat{Y}_m| = 1$ учитывается в l_∞ -норме. Другие переменные $|d\hat{Y}_l| < 1, l \in SC$ не влияют на (1а), но должным образом измененные, ухудшают режим системы. Поэтому, с точки зрения функции цели (1а), оптимальным решением будет $|d\hat{Y}_k| = 1$ для всех k . Таким образом, БПР в l_∞ -норме соответствует ПР в направлении изменения мощностей $d\hat{Y}_k = \pm 1$, т.е., равной загрузке или разгрузке всех узлов.

5.4 НЛПР- B_1 модель

НЛПР- B_1 модель ближайших ПР в l_1 -норме может быть представлена как

$$\min \sum |dY_k| \quad (1a)$$

при условии

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0. \quad (1б)$$

В (1a) частные производные для нулевых значений dY_k не определены. Для того, чтобы воспользоваться средствами нелинейного программирования, удобно ввести дополнительные неотрицательные переменные [304]:

$$dY_k = dY_k^+ - dY_k^-; \quad dY_k^+, dY_k^- \geq 0. \quad (1в)$$

Тогда, используя эпиграф-форму и $dY = t d\hat{Y}$, задача (1) может быть представлена следующим образом:

$$\min t \quad (2a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-)) = 0; \quad (2б)$$

$$\sum (d\hat{Y}_k^+ + d\hat{Y}_k^-) - 1 \leq 0; \quad (2в)$$

$$-d\hat{Y}_k^+ \leq 0, \quad -d\hat{Y}_k^- \leq 0. \quad (2г)$$

Функцию Лагранжа для (2) можно представить в виде

$$L = t + \Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-))^T \lambda + \rho (\sum (d\hat{Y}_k^+ + d\hat{Y}_k^-) - 1) - \sum (\gamma_k^+ d\hat{Y}_k^+ + \gamma_k^- d\hat{Y}_k^-). \quad (3)$$

Соответственно, условия оптимальности первого порядка для этой задачи будут:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-)) = 0; \quad (4a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (4б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum \lambda_k (d\hat{Y}_k^+ - d\hat{Y}_k^-) = 0; \quad (4в)$$

$$\nabla_{dY_k^+} L = t\lambda_k - \gamma_k^+ + \rho = 0; \quad (4г)$$

$$\nabla_{dY_k^-} L = -t\lambda_k - \gamma_k^- + \rho = 0; \quad (4д)$$

$$\rho (\sum (d\hat{Y}_k^+ + d\hat{Y}_k^-) - 1) = 0; \quad \rho \geq 0; \quad (4е)$$

$$\gamma_k^+ d\hat{Y}_k^+ = 0, \gamma_k^+ \geq 0; \quad (4ж)$$

$$\gamma_k^- d\hat{Y}_k^- = 0, \gamma_k^- \geq 0. \quad (4з)$$

Условие (4в) гарантирует $\lambda \neq 0$, поэтому, согласно (4б), установившийся режим будет ПР. Умножение (4г) и (4д) на $d\hat{Y}_k^+$ и $d\hat{Y}_k^-$ соответственно и последующее суммирование по k с учетом (4в) и (4е)-(4з) дает $t = \rho = (\gamma_k^+ + \gamma_k^-)/2 \geq 0$. Поэтому, если исходный режим не является ПР, то

$$t = \rho = (\gamma_k^+ + \gamma_k^-)/2 > 0. \quad (4и)$$

Согласно (4ж)-(4з), $\gamma_k^+ = 0$ или $\gamma_k^- = 0$ когда $d\hat{Y}_k^+ \neq 0$ или $d\hat{Y}_k^- \neq 0$. В этом случае уравнения (4г)-(4д) с (4и) позволяют обнаружить следующие соотношения для соответствующих множителей Лагранжа в ПР: $\lambda_k = -1$ для всех $d\hat{Y}_k^+ \neq 0$ и $\lambda_k = 1$ для всех $d\hat{Y}_k^- \neq 0$. Так же, как в случае l_∞ -нормы, такая комбинация компонент вектора нормали λ гиперповерхности ПР имеет меру ноль. Так, например, кривая ПР 3-х узловой системы имеет только 4 такие точки, а именно, $A, B, C,$ и D на рис. 5.4.

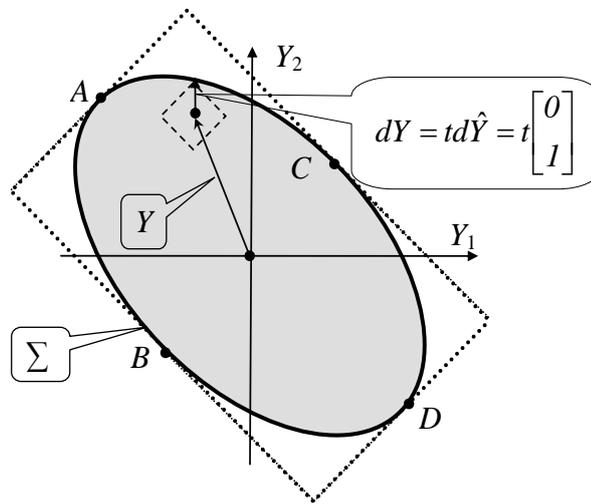


Рисунок 5.4 - Ближайший ПР в l_1 -норме

Поэтому, только одна ненулевая компонента $d\hat{Y}_k$ соответствует решению (1), все другие равны нулю. Это отвечает обычной практике определения ПР в заданном направлении утяжеления, когда мощность изменяется только в одном узле. В этом случае, наиболее “критический” (слабый) узел $t \in SC$ для режима ЭС будет загружаться. Множитель

Лагранжа с максимальной абсолютной величиной $|\lambda_m| = \max |\lambda_k| = 1$ соответствует такому узлу. Действительно, $t\lambda_k = \gamma_k^+ - \rho > -\rho$ и $t\lambda_k = \rho - \gamma_k^- < \rho$ следуют из (4г) – (4д) для нулевых значений dY_k , что вместе с (4и) дает $|\lambda_k| < 1 = |\lambda_m|$. Если мощности этого узла будет недостаточно, тогда следующий наиболее критичный узел будет загружен, и т.д.

5.5 НЛПР-Б_p модель

НЛПР-Б_p модель ближайших ПР в l_p -норме в ее общей форме может быть представлена как:

$$\min (\sum |dY_k|^p)^{1/p} \quad (1a)$$

при условии

$$\Delta F(X, Y + dY) = 0. \quad (1б)$$

В (1a) частные производные для нулевых значений dY_k неопределенны, когда $p < \aleph$. Поэтому, чтобы воспользоваться средствами нелинейного программирования, удобно ввести дополнительные неотрицательные переменные (5.4.1в). Тогда используя эпиграф-форму и $dY = t\hat{dY}$, задача (1) может быть представлена в следующем виде:

$$\min t \quad (2a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-)) = 0; \quad (2б)$$

$$\sum (d\hat{Y}_k^{+p} + d\hat{Y}_k^{-p}) - 1 \leq 0; \quad (2в)$$

$$-d\hat{Y}_k^+ \leq 0, \quad -d\hat{Y}_k^- \leq 0. \quad (2г)$$

Функцией Лагранжа для (2) является

$$L = t + \Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-))^T \lambda + \rho (\sum (d\hat{Y}_k^{+p} + d\hat{Y}_k^{-p}) - 1) / p - \sum (\gamma_k^+ d\hat{Y}_k^+ + \gamma_k^- d\hat{Y}_k^-). \quad (3)$$

Соответственно, условия оптимальности первого порядка будут:

$$\nabla_\lambda L = \Delta F(X, Y + t(d\hat{Y}^+ - d\hat{Y}^-)) = 0; \quad (4a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (4б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum \lambda_k (d\hat{Y}_k^+ - d\hat{Y}_k^-) = 0; \quad (4в)$$

$$\nabla_{d\hat{Y}_k^+} L = t\lambda_k - \gamma_k^+ + \rho d\hat{Y}_k^{+p-1} = 0; \quad (4г)$$

$$\nabla_{d\hat{Y}_k^-} L = -t\lambda_k - \gamma_k^- + \rho d\hat{Y}_k^{-p-1} = 0; \quad (4д)$$

$$\rho(\sum (d\hat{Y}_k^{+p} + d\hat{Y}_k^{-p}) - 1) = 0, \quad \rho \geq 0; \quad (4е)$$

$$\gamma_k^+ d\hat{Y}_k^+ = 0, \quad \gamma_k^+ \geq 0; \quad (4ж)$$

$$\gamma_k^- d\hat{Y}_k^- = 0, \quad \gamma_k^- \geq 0. \quad (4з)$$

Условие (4в) гарантирует $\lambda \neq 0$. Поэтому, согласно (4б), установившийся режим будет ПР. Умножение (4г) и (4д) на $d\hat{Y}_k^+$ и $d\hat{Y}_k^-$ соответственно и затем суммирование по k с учетом (4в) и (4е)-(4з) дает $t = \rho \geq 0$. Поэтому, если исходный режим не является ПР, тогда

$$t = \rho > 0. \quad (5а)$$

Согласно (4ж)-(4з), $\gamma_k^+ = 0$ или $\gamma_k^- = 0$ когда $d\hat{Y}_k^+ \neq 0$ или $d\hat{Y}_k^- \neq 0$. В этом случае (4г)-(4д) с (5а) позволяют получить следующие выражения $d\hat{Y}_k^{+p-1} = -\lambda_k$ для $d\hat{Y}_k^+ \neq 0$ и $d\hat{Y}_k^{-p-1} = \lambda_k$ для $d\hat{Y}_k^- \neq 0$. Поэтому, по крайней мере, одна из переменных $d\hat{Y}_k^+$ и $d\hat{Y}_k^-$ должна быть равна нулю и

$$d\hat{Y}_k = -\text{sign}(\lambda_k) |\lambda_k|^{1/(p-1)}. \quad (5б)$$

Подстановка (5б) в (4в) дает

$$\nabla_t L = 1 - \sum |\lambda_k| |d\hat{Y}_k| = 0; \quad (5в)$$

и

$$\sum |\lambda_k|^q = 1, \quad (5г)$$

где

$$q = \frac{p}{p-1}. \quad (5д)$$

Поэтому, согласно (5г),

$$|\lambda_k| \leq 1, \quad \forall k \in SC. \quad (5е)$$

Уравнение (5г) может быть также представлено как

$$\left(\sum |\lambda_k|^q\right)^{1/q} = 1. \quad (5ж)$$

Поэтому вектор λ нормируется l_q -нормой. Эта норма является двойственной по отношению к l_p -норме [235], потому что, согласно (5д),

$$1/p + 1/q = 1.$$

l_1 и l_∞ -нормы являются дуальными, поэтому вектор λ нормируется l_∞ -нормой в НЛПР- B_1 модели и l_1 -нормой в НЛПР- B_∞ модели. Евклидова норма является самодвойственной. Поэтому в НЛПР- B_2 модели вектор λ нормируется также евклидовой нормой.

Согласно (5б), каждая компонента $d\hat{Y}_k$ определяется только соответствующей компонентой λ_k вектора нормали гиперповерхности ПР и непрерывно зависит от параметра p . Рассмотрим, как компоненты $d\hat{Y}_k$ будут изменяться при увеличении p .

Для l_1 -нормы, устремив $p \rightarrow 1^+$ в (5б) и учитывая (5е), можно получить

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} |d\hat{Y}_k| = \lim_{p \rightarrow 1^+} |\lambda_k|^{1/(p-1)} = |\lambda_k|^{\rightarrow \infty} = \begin{cases} 0, & \text{если } |\lambda_k| < 1; \\ 1, & \text{если } |\lambda_k| = 1. \end{cases} \quad (5з)$$

В свою очередь, учет (5з) в (5в) дает, что только одна ненулевая компонента $|d\hat{Y}_m|=1$, $m \in SC$ соответствует решению НЛПР- B_1 модели. Множитель Лагранжа с максимальным абсолютным значением $|\lambda_m| = \max |\lambda_k| = 1$ соответствует этому $|d\hat{Y}_m|=1$. Все другие $d\hat{Y}_k$ равны нулю. Поэтому, решением НЛПР- B_1 модели в l_1 -норме будет разреженный вектор $d\hat{Y}$.

Если p будет немного больше единицы, тогда вектор $d\hat{Y}$ больше не будет разреженным, хотя большинство его элементов будут очень малы. Когда величина p будет увеличиваться, элементы вектора $d\hat{Y}$ будут постепенно выравниваться и для $p=2$ (евклидова норма) станут равными, по абсолютной величине, соответствующими элементам вектора λ . Если величина p продолжит увеличиваться, выравнивание элементов вектора $d\hat{Y}$

также продолжится и согласно (5б), когда $p \rightarrow \infty$, они станут почти равными по абсолютной величине:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\hat{Y}_k| = \lim_{p \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{1/(p-1)} = 1. \quad (5и)$$

Таким образом, теоретическое исследование НЛПР-Б_p модели в ее общей форме подтверждает полученные ранее результаты для моделей ближайших ПР в l_1 , евклидовой и l_∞ - нормах.

5.6 Численные примеры

Для численной иллюстрации полученных теоретических результатов воспользуемся 5-узловой тестовой ЭС из [247], представленной на рис. 4.2. Структура вектора управляющих воздействий принята такой же, как в [247] $dY = [dP_2, dQ_2, 0, dP_4, dQ_4, dP_5, dQ_5]^T$. Вектор $X = [\delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, V_2, V_4, V_5]^T$ (δ в радианах, V в о.е.), также как левый N и правый R собственные векторы, соответствующие минимальному собственному значению матрицы Якоби потокораспределения, для исходного режима представлены в верхней части таблицы 5.1. Вектор Y (о.е., базисная мощность 100 MVA) представлен в верхней части таблицы 5.2. Векторы, соответствующие ближайшим ПР в трех рассмотренных нормах, представлены в средней части этих таблиц ($N = \lambda / \|\lambda\|_2$). Ближайший ПР в евклидовой норме получился почти таким же, как в [247].

В НЛПР-Б_p моделях, представленных в предыдущих параграфах, все переменные $d\hat{Y}_k$ рассматривались как равноправные. Такое рассмотрение является полезным для анализа чувствительностей, но не для практического использования. Так, например, согласно таблице 5.2, единственной ненулевой компонентой $td\hat{Y}_{\|1\|}$ НЛПР-Б₁ модели является увеличение реактивной мощности в узле 4. Однако в действительности реактивная мощность изменяется вместе с активной в PQ узлах. Поэтому более вероятным сценарием является согласованное изменение активной и

ТАБЛИЦА 5.1-НАПРЯЖЕНИЯ, УГЛЫ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ДЛЯ БПР
В L_p -НОРМЕ

	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	V_2	V_4	V_5
<i>Исходный режим</i>							
X	-.1049	-.0560	-.1796	-.0911	.9589	.9039	.9647
N	.3445	.4776	.7287	.3479	.0062	-.0313	.0110
R	.3340	.4868	.6667	.3207	.0343	.2988	.1170
<i>БПР в l_p-норме</i>							
$X_{ 1 }$	-1.288	-.0979	-.2213	-.1073	.9580	.5069	.8712
$N_{ 1 }$.0050	.0083	.3775	.0437	.0004	.9157	.1300
$R_{ 1 }$.0946	.1657	.3487	.0874	.0046	.8877	.2152
$X_{ 2 }$	-1.654	-.1607	-.4354	-.1568	.9554	.5228	.8587
$N_{ 2 }$.0096	.0159	.5310	.0502	.0009	.8345	.1374
$R_{ 2 }$.0942	.1641	.5745	.0873	.0074	.7661	.1989
$X_{ \infty }$	-.2780	-.2932	-.6055	-.2566	.8860	.5208	.8016
$N_{ \infty }$.0218	.0341	.5911	.0697	.0045	.7870	.1571
$R_{ \infty }$.1163	.1978	.6511	.1113	.0176	.6848	.2044
<i>БПР в l_p-норме с $tg\varphi_k=const$</i>							
$X_{ 1 }$	-.1969	-.2165	-.6276	-.2008	.9528	.5587	.8658
$N_{ 1 }$.0146	.0242	.6566	.0566	.0018	.7377	.1435
$R_{ 1 }$.0934	.1620	.6988	.0864	.0098	.6599	.1836
$X_{ 2 }$	-.2044	-.2278	-.6399	-.2149	.9511	.5561	.8559
$N_{ 2 }$.0153	.0252	.6573	.0596	.0020	.7364	.1459
$R_{ 2 }$.0949	.1645	.7010	.0902	.0104	.6557	.1853
$X_{ \infty }$	-.3502	-.3800	-.7683	-.3304	.8813	.5415	.7931
$N_{ \infty }$.0321	.0485	.6674	.0845	.0077	.7187	.1656
$R_{ \infty }$.1259	.2099	.7168	.1239	.0242	.6091	.1982

ТАБЛИЦА 5.2 -МОЩНОСТИ УЗЛОВ ДЛЯ БПР В L_p -НОРМЕ

	P_2	Q_2	P_4	Q_4	P_5	Q_5
<i>Исходный режим</i>						
Y	1.1500	0.6000	0.7000	0.3000	0.7000	0.4000
<i>БПР в l_p-норме</i>						
$td\hat{Y}_{ 1 }$	0	0	0	<u>0.9505</u>	0	0
$Y+td\hat{Y}_{ 1 }$	1.1500	0.6000	0.7000	1.2505	0.7000	0.4000
$td\hat{Y}_{ 2 }$	0.0080	0.0008	0.4450	0.6993	0.0421	0.1151
$Y+td\hat{Y}_{ 2 }$	1.1580	0.6008	1.1450	0.9993	0.7421	0.5151
$td\hat{Y}_{ \infty }$	<u>0.5246</u>	<u>0.5246</u>	<u>0.5246</u>	<u>0.5246</u>	<u>0.5246</u>	<u>0.5246</u>
$Y+td\hat{Y}_{ \infty }$	1.6746	1.1246	1.2246	0.8246	1.2246	0.9246
<i>БПР в l_p-норме с $tg\varphi_k=const$</i>						
$td\hat{Y}_{ 1 }$	0	0	<u>0.8928</u>	0.3826	0	0
$Y+td\hat{Y}_{ 1 }$	1.1500	0.6000	1.5928	0.6826	0.7000	0.4000
$td\hat{Y}_{ 2 }$	0.0147	0.0077	0.8740	0.3746	0.1284	0.0734
$Y+td\hat{Y}_{ 2 }$	1.1647	0.6077	1.5740	0.6746	0.8284	0.4734
$td\hat{Y}_{ \infty }$	<u>0.7534</u>	0.3931	<u>0.7534</u>	0.3229	<u>0.7534</u>	0.4305
$Y+td\hat{Y}_{ \infty }$	1.9034	0.9931	1.4534	0.6229	1.4534	0.8305

реактивной мощности в PQ узлах, например, с постоянным коэффициентом мощности. В нижней части таблиц 5.1 и 5.2 представлены параметры ближайших ПР в этих l_p -нормах, когда реактивные мощности в PQ узлах изменяются согласно выражению $dQ_k = tg\varphi_k dP_k$ с $tg\varphi_k = Q_k^{ucx.} / P_k^{ucx.}$ исходного режима.

Вычислительные модели современных ЭС включают узлы разного класса напряжений. Если модели БПР в l_p -нормах включают разнородные узлы, то БПР будет определяться узлами с низким классом напряжения. Кроме того, необходимо рассматривать возможный диапазон изменения мощностей. Чтобы учесть это, взвешенные нормы [36], например, $\|Y\|_{wp} = \left(\sum |w_k Y_k|^p \right)^{1/p}$ - l_{wp} -нормы, могут быть использованы вместо обычных норм. В этом случае кругу, квадрату и ромбу на рис. 5.1-5.4 будут отвечать эллипс, прямоугольник и параллелограмм соответственно. К сожалению, теория выбора весовых коэффициентов w_k не представлена в литературе. Поэтому, для каждой задачи весовые коэффициенты подбираются экспериментально или на основании интуиции. В таблицах 5.3-5.4 представлены параметры БПР в l_{wp} -нормах, когда обратные значения мощностей узлов исходного режима использовались для w_k .

Результаты, представленные в таблицах 5.1-5.4, подтверждают теоретическое исследование, выполненное в предыдущих параграфах. Так, вектор $td\hat{Y}_{\|1\|}$ НЛПР-Б₁ модели имеет только одну ненулевую компоненту $tdQ_4 = 0.9505$. Этой компоненте соответствует наибольшая компонента (0.9157) вектора нормали $N_{\|1\|}$ гиперповерхности ПР. Все остальные компоненты вектора $td\hat{Y}_{\|1\|}$ равны нулю. Когда используется l_{w1} -норма, БПР получается другим. Здесь вектор $td\hat{Y}_{\|w1\|}$ также имеет одну ненулевую компоненту $tdP_4 = 1.2680$. Ей соответствует наибольшая величина вектора нормали гиперповерхности ПР в l_{w1} -метрике $N_4^P / w_4^P = N_4^P P_4$. Когда изменение реактивных мощностей определяется выражением $dQ_k = tg\varphi_k dP_k$, ближайший

ТАБЛИЦА 5.3 - НАПРЯЖЕНИЯ, УГЛЫ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ДЛЯ БПР
В L_{WP} -НОРМЕ

	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	V_2	V_4	V_5
<i>БПР в l_{wp}-норме</i>							
$X_{//w1//}$	-0.2292	-0.2725	-0.7904	-0.2447	.9490	.6001	.8621
$N_{//w1//}$.0209	.0343	<u>.7457</u>	.0656	.0031	.6436	.1544
$R_{//w1//}$.0970	.1675	.7635	.0899	.0126	.5828	.1783
$X_{//w2//}$	-0.2282	-0.2606	-0.7267	-0.2364	.9475	.5761	.8545
$N_{//w2//}$.0190	.0311	.7060	.0637	.0028	.6880	.1513
$R_{//w2//}$.0972	.1678	.7382	.0911	.0122	.6132	.1817
$X_{ w\infty }$	-0.4383	-0.4563	-0.8204	-0.3620	.8286	.5412	.7861
$N_{ w\infty }$.0474	.0660	.6738	.0906	.0150	.7087	.1695
$R_{ w\infty }$.1503	.2407	.7195	.1344	.0365	.5856	.1988
<i>БПР в l_{wp}-норме с $tg\phi_k=const$</i>							
$X_{//w1//}$	-0.1969	-0.2165	-0.6276	-0.2008	.9528	.5587	.8658
$N_{//w1//}$.0146	.0242	<u>.6566</u>	.0566	.0018	.7377	.1435
$R_{//w1//}$.0934	.1620	.6988	.0864	.0098	.6599	.1836
$X_{//w2//}$	-0.2079	-0.2308	-0.6419	-0.2162	.9491	.5561	.8558
$N_{//w2//}$.0156	.0257	.6574	.0597	.0021	.7362	.1459
$R_{//w2//}$.0954	.1652	.7011	.0904	.0106	.6552	.1854
$X_{ w\infty }$	-0.4383	-0.4563	-0.8204	-0.3620	.8286	.5412	.7861
$N_{ w\infty }$.0474	.0660	.6738	.0906	.0150	.7087	.1695
$R_{ w\infty }$.1503	.2407	.7195	.1344	.0365	.5856	.1988

ТАБЛИЦА 5.4 - МОЩНОСТИ УЗЛОВ ДЛЯ БПР В L_{WP} -НОРМЕ

	P_2	Q_2	P_4	Q_4	P_5	Q_5
<i>БПР в l_{wp}-норме</i>						
$td\hat{Y}_{//w1//}$	0	0	<u>1.2680</u>	0	0	0
$Y+td\hat{Y}_{//w1//}$	1.1500	0.6000	1.9680	0.3000	0.7000	0.4000
$td\hat{Y}_{//w2//}$	0.0774	0.0031	1.0667	0.1909	0.0962	0.0746
$Y+td\hat{Y}_{//w2//}$	1.2274	0.6031	1.7667	0.4909	0.7962	0.4746
$td\hat{Y}_{ w\infty }$	1.2081	0.6268	0.7361	0.3154	0.7355	0.4203
$Y+td\hat{Y}_{ w\infty }$	2.3581	1.2268	1.4361	0.6154	1.4355	0.8203
<i>БПР в l_{wp}-норме с $tg\phi_k=const$</i>						
$td\hat{Y}_{//w1//}$	0	0	<u>0.8928</u>	0.3826	0	0
$Y+td\hat{Y}_{//w1//}$	1.1500	0.6000	1.5928	0.6826	0.7000	0.4000
$td\hat{Y}_{//w2//}$	0.0404	0.0211	0.8736	0.3744	0.1285	0.0734
$Y+td\hat{Y}_{//w2//}$	1.1904	0.6211	1.5736	0.6744	0.8285	0.4734
$td\hat{Y}_{ w\infty }$	1.2081	0.6268	0.7361	0.3154	0.7355	0.4203
$Y+td\hat{Y}_{ w\infty }$	2.3581	1.2268	1.4361	0.6154	1.4355	0.8203

ПР получается одним и тем же для l_1 и l_{w1} - норм. И в этом ПР только одна ненулевая компонента $tdP_4 = 0.8928$ вектора $td\hat{Y}_{\|1\|}$, ей соответствует наибольшее значение элемента вектора $N_4^P + tg\varphi_4 N_4^Q$.

Для НЛПР- B_∞ модели все компоненты вектора $td\hat{Y}_{\|\infty\|}$ оказались равными 0.5246, т.е. все элементы вектора $d\hat{Y}_{\|\infty\|}$ получились равные единице. В $l_{w\infty}$ -норме все компоненты вектора $d\hat{Y}_{\|w\infty\|}$ оказались равными мощностям узлов исходного УР, т.е.

$$d\hat{Y}_k = Y_k. \quad (1)$$

Таким образом, НЛПР- $B_{w\infty}$ модель отвечает обычной практике определения ПР в заданном направлении утяжеления, когда узловые мощности исходного режима используются как направление утяжеления.

Для Евклидовой нормы ближайшие ПР получились разными для всех 6 рассматриваемых случаев. НЛПР- $B_{(w)2}$ модели (в l_2 - и l_{w2} - нормах) занимают промежуточное значение между НЛПР- $B_{(w)1}$ и НЛПР- $B_{(w)\infty}$ моделями. Во всех 6 случаях все элементы вектора $td\hat{Y}_{\|(w)2\|}$ оказались ненулевыми, т.е. вектор $td\hat{Y}_{\|(w)2\|}$ не является разряженным. Этого следовало ожидать, т.к. вектор $td\hat{Y}_{\|(w)2\|}$ параллелен вектору нормали гиперповерхности ПР $N_{\|w2\|}$ в пространстве управления. Максимальная компонента вектора $N_{\|w2\|}$ соответствует единственной ненулевой компоненте вектора $td\hat{Y}_{\|(w)2\|}$.

Таким образом, ближайшим ПР в l_1 , евклидовой и l_∞ - нормах соответствуют разные ПР.

5.7 Сравнительный анализ НЛПР- B_p моделей ближайших предельных режимов в l_p -нормах

Анализ результатов исследований, представленных в предыдущих параграфах главы, показывает, что ближайшим ПР в разных l_p -нормах соответствуют разные ПР с разными значениями углов и модулей напряжения, а также с разной структурой вектора управляющих воздействий

dY. Какая модель БПР в наибольшей степени отвечает требованиям СО? Ответ на этот довольно трудный вопрос дает качественный анализ БПР, представленный в таблицах 5.1-5.4 предыдущего параграфа.

Удивительно, но несмотря на то, что параметры БПР различны, все эти ПР определяют качественно одно и то же состояние ЭС – во всех этих ПР достигнут предел мощности, получаемой узлом 4 из ЭС. Как ни парадоксально выглядит такое утверждение, но это действительно так. Согласно результатам первой главы, ПР - это такой установившийся режим, когда БУ не способен поддержать режим ряда узлов ЭС даже при очень малом изменении их параметров в неблагоприятном направлении. В ПР эта группа узлов не может получить даже маленькое количество дополнительной мощности от БУ. Все попытки БУ увеличить мощность, получаемую этими узлами, наоборот приводят к ее уменьшению, поскольку относительный прирост потерь мощности БУ превысит единицу. Следовательно, в одном из сечений между БУ и этой группой узлов в ПР достигнут предел передаваемой мощности. Это «критическое» сечение можно найти на основе анализа компонент правого собственного вектора R , соответствующего нулевому собственному значению матрицы Якоби потокораспределения в ПР [75].

Правые собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению матрицы Якоби потокораспределения в ПР, представлены в таблицах 5.1-5.4. Если для поиска критических сечений применить алгоритм, ранее рассмотренный в параграфе 4.7, то оказывается, что для всех БПР критическим будет сечение, отделяющее узел 4 от остальной сети. Узлы, отделяемые критическим сечением от ЭС, с точки зрения статической устойчивости ЭС можно рассматривать как критические узлы. Для 5-узловой сети на рис. 4.2 это один узел 4. Для реальных ЭС обычно это несколько узлов.

Вектор множителей Лагранжа λ в точке решения моделей БПР является левым собственным вектором вырожденной матрицы Якоби

потокораспределения, который, в свою очередь, соответствует вектору нормали ГПР. Обычно этот вектор используется для оценки коэффициентов чувствительности запаса статической устойчивости для управляющих воздействий в превентивном или противоаварийном управлении [356]. Однако, этот вектор может быть также использован для выявления критических узлов. Узлы, которым соответствуют наибольшие элементы левого собственного вектора вырожденной матрицы Якоби, являются наиболее эффективными для управляющих воздействий [189]. Но эти узлы могут рассматриваться также как наиболее критичные узлы с точки зрения запаса статической устойчивости, т.к. минимальное расстояние до ГПР соответствует таким узлам. Анализ векторов N (нормали ГПР), представленных в таблицах 5.1 и 5.3, показывает, что элементы этих векторов, за исключением узла 4, весьма малы. Поэтому узел 4 является также наиболее критичным узлом с точки зрения расстояния до ГПР.

Известно, что в ПР изменение параметров режима главным образом определяется элементами собственных векторов, отвечающих нулевому собственному значению матрицы Якоби потокораспределения [75], [115]. Согласно таблицам 5.1-5.4, ни один из элементов этих собственных векторов не равен нулю, хотя некоторые из них малы по сравнению с другими. Поэтому в ПР увеличение нагрузки, как активной, так и реактивной, в любом узле даже на очень малую величину приведет к потере статической устойчивости 5-узловой ЭС, точнее к развалу режима в узле 4. Рассмотрим, как пример, БПР в l_1 -норме, в котором мощности всех узлов получились равными мощностям исходного режима. Исключение составил узел 4, для которого реактивная мощность возросла на 0.9505 по сравнению с исходным режимом. Рассмотрим увеличение нагрузки в узле 2 в этом БПР. Согласно таблице 5.1, компоненты собственных векторов этого узла очень малы по сравнению с компонентами других узлов. Поэтому этот узел должен быть наименее критичным с точки зрения статической устойчивости системы. Действительно, согласно рис. 4.2, он наиболее электрически удален от

критичного узла 4 и непосредственно соединен с БУ. Но, тем не менее, в ПР увеличение нагрузки в этом узле даже на небольшую величину вызывает развал режима в узле 4. Анализируемая 5-узловая ЭС, представленная на рис. 4.2, является замкнутой, поэтому узел 2 имеет электрическую связь с балансирующим узлом не только через линию 1-2, но и через все другие линии ЭС. В ПР при увеличении нагрузки в узле 2 потокораспределение будет определяться в соответствии с законами Кирхгофа. Поскольку компоненты левого собственного вектора, отвечающие нулевому собственному значению матрицы Якоби потокораспределения, для этого узла не равны нулю, то даже небольшое увеличение активной или реактивной мощности в этом узле приведет к снижению напряжения в узле 4. Т.е. напряжение в узле 4 станет меньше его критического значения. Значит, поток мощности, получаемой из ЭС узлом 4, станет меньше мощности его нагрузки. Поэтому возникнет лавина напряжения в узле 4. Аналогичная ситуация будет возникать при увеличении нагрузки в любом другом узле.

Возникает естественный вопрос. Если все БПР качественно определяют одно и то же состояние ЭС, но при этом имеют различные параметры режима, какие из них являются полезными для СО?

Ответ заключается в существующей практике управления режимами ЭС. Количество элементов и их сочетаний в современных ЭС огромно. Точно предсказать величину нагрузки невозможно. Поэтому при ведении режима (превентивное управление) СО ориентируется на наиболее вероятное изменение нагрузки. Менее вероятные, но опасные возмущения в ЭС обрабатываются системой противоаварийного управления [25], [100], [144], [155], [180], [286].

Модель БПР в l_1 -норме выделяет только один наиболее критичный параметр в ЭС с точки зрения статической устойчивости. Другие параметры ЭС при этом не изменяются. Поэтому гипотетический БПР в l_1 -норме в реальных ЭС маловероятен. Модель БПР в Евклидовой норме выделяет группу критических узлов. Изменение параметров других узлов достаточно

мало. Поэтому такой БПР в реальных ЭС также маловероятен. В практике управления режимами ЭС обычно принимается, что наиболее вероятное изменение нагрузки будет пропорционально мощностям узлов текущего режима [41], [67], [70], [243]. А такому сценарию соответствует НЛПР- B_{W_∞} модель БПР в взвешенной l_∞ -норме. В этом случае, согласно таблице 5.4, коэффициент запаса статической устойчивости для критического сечения в исходном режиме 5-узловой ЭС будет равен $(P_4^{IPP} - P_4^{ucx.})/P_4^{ucx.} \% = (1.4361 - 0.7)/0.7 \% \approx 105\%$. Коэффициент запаса статической устойчивости использования пропускной способности сети будет таким же $(\sum P_{Load}^{IPP} - \sum P_{Load}^{ucx.})/\sum P_{Load}^{ucx.} \% = (5.2297 - 2.55)/2.55 \% \approx 105\%$.

Наиболее вероятное направление изменения нагрузки – это наиболее вероятное изменение средней величины нагрузки [116]. Точное значение изменения нагрузки неизвестно, но именно оно определяет действительное значение коэффициента запаса статической устойчивости. В той или иной степени, погрешность прогноза изменения нагрузки можно учесть с помощью вероятностной модели нагрузки [113]. В этом контексте взвешенная евклидова норма обладает важными свойствами. Она тесно связана с задачей наименьших квадратов и часто используется для учета погрешности информации [121]. Поэтому наиболее подходящей моделью для СО является НЛПР- $B_{W_\infty-W_2}$ модель, т.е. НЛПР- B_{W_∞} модель БПР в взвешенной l_∞ -норме, учитывающая погрешность прогноза изменения нагрузки с помощью взвешенной Евклидовой нормы.

Согласно (5.6.1) НЛПР- B_{W_∞} модель соответствует рассмотренной в предыдущей главе НЛПР-Н модели, когда компоненты вектора утяжеления принимаются равными значениям мощностей узлов в исходном режиме. Взвешенная евклидова норма является частным случаем ковариационного эллипсоида [102], [103]. Поэтому НЛПР- $B_{W_\infty-W_2}$ модель является частным случаем НЛПР-НП модели, представленной в предыдущей главе и учитывающей ошибки прогноза изменения мощностей [10]. Однако в отличие от НЛПР- $B_{W_\infty-W_2}$ модели, НЛПР-НП метод обладает превосходными

вычислительными характеристиками, обеспечивает быструю и надежную сходимость. Если предположить, что среднеквадратичная ошибка прогноза мощностей нагрузки узлов составляет 10% от их величины текущего режима, и использовать правило трех сигм [116], то согласно результатам, представленным в таблице 4.2 предыдущей главы, НЛПР-НП метод дает $P_4^{IPP} = 1.3083$, $\sum P_{Load}^{IPP} = 4.766$. Поэтому коэффициент запаса статической устойчивости для исходного режима с учетом 10% ошибки прогноза изменения мощностей равен $(P_4^{IPP} - P_4^{ucx.}) / P_4^{ucx.} \% = (1.3083 - 0.7) / 0.7 \% = 86.9\%$.

В случае аварийных ситуаций, когда система уравнений потокораспределения не имеет решения, БПР в l_1 -норме в наибольшей степени отвечает требованиям СО. Действительно, когда режим ЭС вводится в допустимую область, наименьшее число и объем дозировок управляющих воздействий является оптимальным решением для СО. Согласно раннее полученным результатам, l_1 -норма обеспечивает разгрузку наиболее критичного узла для режима ЭС. Множитель Лагранжа с наибольшим значением $|\lambda_m| = \max_{k \in SC} |\lambda_k| = 1$ соответствует такому узлу. Если мощность узла будет недостаточна, то следующий самый критичный узел разгрузится, и т.д. В результате минимальное количество узлов будет задействовано, и минимальные нагрузки будут потеряны во время ввода режима ЭС в допустимую область. Качественные характеристики БПР останутся неизменными, если (5.4.1) - (5.4.2) будут сформированы с учетом стоимости и допустимого диапазона изменения управляющих воздействий.

Оценка БПР с помощью евклидовой нормы основана на геометрической интерпретации и может использоваться для противоаварийного управления как косвенный показатель. В то время как режим ЭС перемещается в допустимую область с помощью евклидовой нормы, регулирующие воздействия распределяются (размываются) по всем узлам управления, так как они определяются составляющими нормального вектора

гиперповерхности ПР (5.2.9б). Поэтому, такая модель может быть использована только для первоначальной оценки управляющих воздействий.

Все другие БПР в l_p -нормах, когда $p \neq 1, 2$, или ∞ , мало пригодны для СО. Действительно, l_p -нормы с $p > 2$ занимают промежуточное положение между евклидовой и l_∞ - нормами. Вектор $td\hat{Y}_{\|p\|}$ не будет разреженным. Соотношение между его компонентами не отражает никаких реальных процессов, протекающих в ЭС. Так как l_p -норма непрерывно зависит от параметра p и удовлетворяет (5.1.1) и (5.5.5б), с ростом p компоненты вектора $td\hat{Y}_{\|p\|}$ будут «выравниваться» и станут практически одинаковыми при $p \gg 1$.

5.8 Влияние технологических ограничений на ближайшие предельные режимы

Рассмотрим учет технологических ограничений ЭС в моделях ближайших ПР на примере НЛПР-Б₂ модели в евклидовой норме:

$$\min t \quad (1a)$$

при условиях:

$$\Delta F(X, Y + td\hat{Y}) = 0; \quad (1б)$$

$$\sum d\hat{Y}_k^2 - 1 \leq 0; \quad (1в)$$

$$G(X) \leq 0; \quad (1г)$$

$$dY^{\min} \leq td\hat{Y} \leq dY^{\max}. \quad (1д)$$

Здесь dY^{\min} , dY^{\max} - соответственно нижний и верхний пределы для dY . Ограничение в виде неравенства (1г), записанное в неявном виде, учитывает пределы реактивной мощности генераторов с помощью комплементарных ограничений [194], [323], пределы по нагреву проводов ЛЭП и другого электрооборудования, ограничения по напряжению с точки зрения устойчивости нагрузки [42], и т.д. [190].

Функция Лагранжа для (1) будет

$$L = t + \Delta F(X, Y + td\hat{Y})^T \lambda + \rho (\sum d\hat{Y}_k^2 - 1) / 2 + G(X)^T \mu + \sum (dY_k^{\min} - td\hat{Y}_k) \gamma_k^- + \sum (td\hat{Y}_k - dY_k^{\max}) \gamma_k^+,$$

где μ - вектор множителей Лагранжа для уравнений ограничений в форме неравенств (1г).

Условия оптимальности первого порядка для этой задачи примут вид:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + t d\hat{Y}) = 0; \quad (2a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda + [\partial G / \partial X]^T \mu = 0; \quad (2б)$$

$$\nabla_{d\hat{Y}_k} L = t(\lambda_k - \gamma_k^- + \gamma_k^+) + \rho d\hat{Y}_k = 0; \quad (2в)$$

$$\rho(\sum d\hat{Y}_k^2 - 1)/2 = 0, \quad \rho \geq 0; \quad (2г)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum d\hat{Y}_k (\lambda_k - \gamma_k^- + \gamma_k^+) = 0; \quad (2д)$$

$$diag(\mu)G(X) = 0, \quad \mu \geq 0; \quad (2е)$$

$$(dY_k^{\min} - t d\hat{Y}_k) \gamma_k^- = 0, \quad \gamma_k^- \geq 0; \quad (2ж)$$

$$(t d\hat{Y}_k - dY_k^{\max}) \gamma_k^+ = 0, \quad \gamma_k^+ \geq 0, \quad (2з)$$

где $diag(\mu)$ является диагональной матрицей, элементы которой равны соответствующим элементам вектора μ .

Условие (2д) гарантирует $\lambda \neq 0$. Умножение (2в) на $d\hat{Y}_k$ и затем суммирование по k с учетом (2г)–(2д) дает $\rho = t$, поэтому (2в) может быть представлено как

$$\lambda_k - \gamma_k^- + \gamma_k^+ + d\hat{Y}_k = 0. \quad (2и)$$

Согласно (2ж) и (2з), $\gamma_k^- = 0$ и $\gamma_k^+ = 0$, если $dY_k^{\min} < dY_k < dY_k^{\max}$. В этом случае (2и) можно представить, как

$$\lambda_k + d\hat{Y}_k = 0. \quad (2к)$$

Отсюда следует, что компоненты вектора $d\hat{Y}$ равны соответствующим элементам вектора λ с противоположным знаком. Но что представляет собой вектор λ в оптимизационной модели (1) с ограничениями типа неравенства? Анализ (2б) дает ответ на этот вопрос.

Если ограничения типа неравенства не активны в точке решения, значит они не воздействовали на решение и поэтому могут быть проигнорированы. Поэтому рассмотрим только активные ограничения в (1г):

$$G^a(X) = 0. \quad (3a)$$

Линеаризованные уравнения (2а), (3а) и (2б) в точке решения могут быть представлены как:

$$[J]\Delta X + \Delta Y = 0; \quad (3б)$$

$$[J]^T \lambda + [\partial G^a / \partial X]^T \mu^a = 0; \quad (3в)$$

$$[\partial G^a / \partial X] \Delta X = 0. \quad (3г)$$

Суммирование скалярного произведения (3б) и вектора λ со скалярным произведением (3г) и вектора μ^a с учетом (3в) дает

$$\lambda^T \Delta Y = 0. \quad (3д)$$

Это является уравнением гиперплоскости в пространстве мощностей. Поэтому оно определяет вектор λ как вектор нормали некоторой гиперповерхности, соответствующей этой касательной гиперплоскости. Согласно (2к), решение (1)-(2) является ближайшим установившимся режимом к этой гиперповерхности в евклидовой норме в подпространстве управляющих воздействий dY_k .

Если в точке решения (1) отсутствуют активные ограничения в форме неравенств, тогда $\mu=0$, и (3в) трансформируется в (5.2.8б), и эта гиперповерхность будет соответствовать ГПР. Если в точке решения имеются активные ограничения, тогда $\mu \neq 0$, и поэтому матрица Якоби потокораспределения будет невырожденной. Это можно показать, например, используя подход, представленный в [194]. Т.к. в этом случае матрица Якоби потокораспределения невырожденная, вектор λ может быть получен из (3в):

$$\lambda = [N^a] \mu^a = \sum N_i^a \mu_i^a, \quad (4a)$$

где

$$[N^a] = -[J^T]^{-1} [\partial G^a / \partial X]^T, \quad (4б)$$

а $[N_i^a]$ - i -й столбец этой матрицы.

Вектор $[N_i^a]$ является вектором нормали гиперповерхности активного ограничения:

$$G^a_i(X) = 0 \quad (4в)$$

в пространстве узловых мощностей. Действительно, линеаризация (4в) дает

$$[\partial G^a_i / \partial X] \Delta X = 0. \quad (4г)$$

В свою очередь, использование (3б) в (4г) дает

$$[N^a_i]^T \Delta Y = 0, \quad (4д)$$

где

$$[N^a_i] = -([\partial G^a_i / \partial X] [J]^{-1})^T. \quad (4е)$$

Уравнение (4д) является уравнением касательной гиперплоскости к гиперповерхности активного ограничения (4в) в точке решения в пространстве мощностей узлов. Следовательно, вектор $[N^a_i]$ является вектором нормали этой гиперповерхности. Поэтому, кратчайшее евклидово расстояние от исходного режима к этой гиперплоскости будет равно

$$l_i^a = t \left| d\hat{Y}^T [N^a_i] / \|N^a_i\|_2 \right| = t \left| \lambda^T [N^a_i] / \|N^a_i\|_2 \right| \leq t. \quad (4ж)$$

Это расстояние не будет меньше, чем полученное решением (1)-(2) величина t , только тогда, когда векторы λ и $[N^a_i]$ будут коллинеарные. В тоже время, согласно (4а), вектор λ является линейной комбинацией векторов нормали к гиперповерхностям активных ограничений в форме неравенств.

Если допустимая область, определяемая активными ограничениями в форме неравенств (1г), является выпуклой, тогда возможны два случая. Наиболее вероятный случай соответствует решению (1), когда активно только одно ограничение в форме неравенства. Тогда, согласно (4а), векторы λ и $[N^a_i]$ будут коллинеарные, и $l_i^a = t$ будет в (4ж). В этом случае, полученное решение будет определяться пределом этого активного ограничения в форме неравенства (индуцированная пределом бифуркация, или предел по нагреву ЛЭП, или предел по напряжению, и т.д. [190]), который будет ближайшим ограничением в форме неравенства к исходному установившемуся режиму. Почти невероятный случай соответствует решению (1) с несколькими активными ограничениями в форме неравенств.

В этом случае гиперповерхности активных ограничений в форме неравенств будут пересекаться, касаясь друг друга в точке решения [283], [315], и все их векторы нормали $[N_i^a]$ и λ будут коллинеарные.

С другой стороны, если эти вектора нормали $[N_i^a]$ не коллинеарные, тогда в (4ж) будет $l_i^a < t$. Такой случай соответствует невыпуклой допустимой области. Таким образом, модель БПР позволяет также исследовать геометрию ближайшей границы допустимой области.

Необходимо отметить, что ограничения в форме неравенств (1г) и их производные присутствуют только в (2б) и (2е) условий оптимальности первого порядка (2) задачи оптимизации (1). Поэтому, ограничения в форме неравенств (1г) влияют на полученное решение только через множители Лагранжа λ в (2б). Согласно (5.5.5б), каждая компонента вектора $d\hat{Y}_k$ определяется только соответствующей компонентой вектора λ . Поэтому, все результаты и заключения, которые были получены ранее относительно моделей БПР в различных l_p -нормах, остаются справедливыми также при наличии ограничений в форме неравенств.

5.9 Учет пределов реактивной мощности генераторов в НЛПР-Бр моделях

В главе 3 был представлен подход учета пределов реактивной мощности генераторов с помощью комплементарных ограничений. Однако практика расчетов БПР показала, что из-за специфики метода внутренней точки, который ограничивает длину шага так, чтобы на каждой итерации обеспечить положительность вспомогательных и двойственных к ним переменных, в ряде случаев для получения решения требуется довольно много итераций из-за учета пределов реактивной мощности генераторов. Метод внутренней точки при моделировании системы АРВ генераторов с помощью комплементарных ограничений фактически ограничивает длину шага так, чтобы в конце итерации на предел выходил не больше чем один генератор. Т.е. он ведет себя аналогично подходу, предложенному в [367].

Например, в случае IEEE 300-узловой тестовой ЭС, когда УР утяжеляется от исходного режима до ПР (нагрузка и генерация увеличивается пропорционально мощностям исходного режима), 16 генераторов изменяют свой тип, т.е. метод внутренней точки потребует 16 дополнительных итераций. Когда таким же образом утяжеляется режим IEEE 118-узловой ЭС, происходит изменение 40 типов генераторов. Количество требуемых итераций можно сократить, если производить учет пределов реактивной мощности генераторов, как при обычном расчете потокораспределения. Однако в этом случае невозможно получить БПР, индуцированный пределом реактивной мощности генераторов. Лучшим решением является моделирование системы АРВ генератора с помощью представленных в Приложении В НСР-функций. В этом случае для учета пределов реактивной мощности генератора требуется две НСР-функции ψ_k^+ и ψ_k^- с параметрами:

$$a^+ = V^+ \geq 0; \quad (1a)$$

$$b^+ = Q^+ - Q \geq 0; \quad (1б)$$

$$a^- = V^- \geq 0; \quad (1в)$$

$$b^- = Q - Q^- \geq 0; \quad (1г)$$

$$V = V^g - V^+ + V^-. \quad (1e)$$

Для упрощения записи ограничимся рассмотрением только той части функции Лагранжа, которая отвечает за расчетные выражения базисной системы метода внутренней точки моделирования системы АРВ генератора в узле k НСР-функциями

$$L = -t + \sum_m \Delta P_m \lambda_m^P + \sum_{m \neq k} \Delta Q_m \lambda_m^Q + \Delta Q_k(-Q_k, \delta, V) \lambda_k^Q + \beta_k^+ \psi_k^+(V_k^+, Q_k) + \beta_k^- \psi_k^-(V_k^-, Q_k) + \alpha_k (V_k - V_k^g + V_k^+ - V_k^-). \quad (2)$$

Тогда соответствующие условия оптимальности будут:

$$\frac{\partial L}{\partial V_k} = \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \lambda_m^P + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \lambda_m^Q + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \lambda_k^Q + \alpha_k = 0; \quad (3a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} = -\lambda_k^Q + \beta_k^+ \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} + \beta_k^- \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} = 0; \quad (3б)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k^{\mathcal{Q}}} = \Delta Q_k(-Q_k, \delta, V) = 0; \quad (3\text{в})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_k^+} = \psi_k^+(V_k^+, Q_k) = 0; \quad (3\text{г})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_k^-} = \psi_k^-(V_k^-, Q_k) = 0; \quad (3\text{д})$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_k^+} = \beta_k^+ \frac{\partial \psi_k^+(V_k^+, Q_k)}{\partial V_k^+} + \alpha_k = 0; \quad (3\text{е})$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_k^-} = \beta_k^- \frac{\partial \psi_k^-(V_k^-, Q_k)}{\partial V_k^-} - \alpha_k = 0; \quad (3\text{ж})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = V_k - V_k^s + V_k^+ - V_k^- = 0. \quad (3\text{з})$$

На итерации линеаризованные уравнения (3) примут вид:

$$\begin{aligned} & \sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^{\mathcal{Q}} \right) \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^{\mathcal{Q}} \right) \Delta V_m + \\ & \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^{\mathcal{Q}} \right) \Delta V_k + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^{\mathcal{Q}} + \\ & + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right) \Delta \lambda_k^{\mathcal{Q}} + \Delta \alpha = -\nabla_{V_k} L; \end{aligned} \quad (4\text{а})$$

$$\begin{aligned} & -\Delta \lambda_k^{\mathcal{Q}} + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k^2} \Delta Q_k + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \Delta V_k^+ + \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} \Delta \beta_k^+ + \\ & + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k^2} \Delta Q_k + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \Delta V_k^- + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} \Delta \beta_k^- = -\nabla_{Q_k} L; \end{aligned} \quad (4\text{б})$$

$$\sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \right) \Delta V_k - \Delta Q_k = -\Delta Q_k (); \quad (4\text{в})$$

$$\frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \Delta V_k^+ + \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} \Delta Q_k = -\psi_k^+; \quad \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \Delta V_k^- + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} \Delta Q_k = -\psi_k^-; \quad (4\text{г})$$

$$\Delta \beta_k^+ \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \Delta V_k^+ + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^+ \partial Q_k} \Delta Q_k + \Delta \alpha_k = -\nabla_{V_k^+} L; \quad (4\text{д})$$

$$\Delta \beta_k^- \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \Delta V_k^- + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^- \partial Q_k} \Delta Q_k - \Delta \alpha_k = -\nabla_{V_k^-} L; \quad (4\text{е})$$

$$\Delta V_k + \Delta V_k^+ - \Delta V_k^- = -\nabla_\alpha L. \quad (4ж)$$

Из (4г) можно получить:

$$\Delta V_k^+ = -(\psi_k^+ + \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} \Delta Q_k) / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}; \quad \Delta V_k^- = -(\psi_k^- + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} \Delta Q_k) / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}. \quad (5а)$$

Подстановка (5а) в (4ж) дает

$$\Delta Q_k = D_k^\alpha \left(\Delta V_k + \nabla_\alpha L - \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right), \quad (5б)$$

где

$$D_k^\alpha = \frac{1}{\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} - \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}}.$$

Подстановка (5а) в (4д) и (4е) дает:

$$\Delta \beta_k^+ = \frac{\beta_k^+ \left(-\frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^+ \partial Q_k} + \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) \Delta Q_k - \Delta \alpha_k - \nabla_{V_k^+} L + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}}{\frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}}; \quad (5в)$$

$$\Delta \beta_k^- = \frac{\beta_k^- \left(-\frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^- \partial Q_k} + \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) \Delta Q_k + \Delta \alpha_k - \nabla_{V_k^-} L + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}}{\frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}}. \quad (5г)$$

Подстановка (5а) в (4б) дает

$$\begin{aligned} & -\Delta \lambda_k^Q + \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} \Delta \beta_k^+ + \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} \Delta \beta_k^- + \\ & + \left(\beta_k^+ \left(\frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k^2} - \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) + \beta_k^- \left(\frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k^2} - \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) \right) \Delta Q_k = \\ & = -\nabla_{Q_k} L + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}. \quad (5д) \end{aligned}$$

Подстановка (5в), (5г) в (5д) дает

$$\Delta \alpha_k = -D_k^\alpha \Delta \lambda_k^Q + D_k^\alpha \nabla_{Q_k} L +$$

$$\begin{aligned}
& + D_k^\alpha \left(\beta_k^+ \left(\frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) \right) + \right. \\
& \left. \beta_k^- \left(\frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \left(\frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \left(\frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) \right) \right) \Delta Q_k + \\
& + D_k^\alpha \left(\frac{-\nabla_{V_k^+} L + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}}{\frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k}} - \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) + \\
& + D_k^\alpha \left(\frac{-\nabla_{V_k^-} L + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}}{\frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k}} - \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right). \tag{5ж}
\end{aligned}$$

Подстановка (5б) в (5ж) дает

$$\Delta \alpha_k = -D_k^\alpha \Delta \lambda_k^Q + H_k \Delta V_k + \Delta \nabla_{V_k} L, \tag{5з}$$

где

$$\begin{aligned}
H_k &= D_k^{\alpha^2} \left(\beta_k^+ \left(\frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \left(\frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) \right) + \right. \\
& \left. \beta_k^- \left(\frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \left(\frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \left(\frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) \right) \right); \\
\Delta \nabla_{V_k} L &= D_k^\alpha \nabla_{Q_k} L + H_k \left(\nabla_\alpha L - \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) + \\
& + D_k^\alpha \left(\frac{-\nabla_{V_k^+} L + \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial V_k^{+2}} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+}}{\frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial Q_k}} - \beta_k^+ \frac{\partial^2 \psi_k^+}{\partial Q_k \partial V_k^+} \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} \right) + \\
& + D_k^\alpha \left(\frac{-\nabla_{V_k^-} L + \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial V_k^{-2}} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-}}{\frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial Q_k}} - \beta_k^- \frac{\partial^2 \psi_k^-}{\partial Q_k \partial V_k^-} \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right).
\end{aligned}$$

Подстановка (5з) в (4а) дает

$$\begin{aligned}
& \sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^q \right) \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^q \right) \Delta V_m + \\
& + \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^q + H_k \right) \Delta V_k + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^q + \\
& + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} - D_k^\alpha \right) \Delta \lambda_k^q + \Delta \alpha = -(\nabla_{V_k} L + \Delta \nabla_{V_k} L). \tag{6a}
\end{aligned}$$

Подстановка (5б) в (4в) дает

$$\begin{aligned}
& \sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_m} \Delta V_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} - D_k^\alpha \right) \Delta V_k = \\
& = - \left[\Delta Q_k() - D_k^\alpha \left(\nabla_\alpha L - \psi_k^+ / \frac{\partial \psi_k^+}{\partial V_k^+} + \psi_k^- / \frac{\partial \psi_k^-}{\partial V_k^-} \right) \right]. \tag{6б}
\end{aligned}$$

Таким образом, при учете пределов реактивной мощности генератора с помощью NCP-функций, в базисной системе метода внутренней точки корректируются только два соответствующих уравнений (6а)-(6б) без появления дополнительных ненулевых элементов, т.е. структура базисной системы не изменяется. Так, в (6а) корректируются коэффициенты при переменных ΔV_k и $\Delta \lambda_k^q$, а также правая часть, а в (6б) – коэффициент при ΔV_k и тоже правая часть. После решения базисной системы линейных уравнений, изменение переменных NCP-функций находится из линеаризованных выражений (5б), (5а), (5з), (5в), (5г).

5.10 Результаты вычислительных экспериментов

НЛПР-Б_p модели ближайших ПР ЭС в l_p -нормах тестировались на IEEE тестовых системах, а также Российских ЭС. Вычислительные эксперименты полностью подтвердили результаты теоретического исследования и анализа свойств моделей БПР ЭС. Так, расчетные векторы $t\hat{Y}_{\| (w) 1 \|}$ НЛПР-Б_{(w)1} моделей имели только одну ненулевую компоненту, которой отвечал максимальный элемент соответствующего вектора нормали $N_{\| (w) 1 \|}$ гиперповерхности ПР в $l_{(w)1}$ метрике. Все другие компоненты векторов $t\hat{Y}_{\| (w) 1 \|}$ имели близкие к нулю величины. Все компоненты векторов $t\hat{Y}_{\| \infty \|}$ НЛПР-Б_∞ модели получились

приблизительно одинаковые. В $l_{w\infty}$ -норме все компоненты векторов $\hat{Y}_{\|/(w)\infty\|}$ оказались почти равными мощностям узлов исходного режима.

В качестве примера, в таблице 5.5 представлены результаты моделей для IEEE 14-узловой тестовой системы. При проведении расчетов генерация, отрицательная и нулевая нагрузка принимались неизменными, на что указывают пустые ячейки в этой таблице. Все другие мощности узлов использовались как управляющие воздействия. Верхние индексы «P» и «Q» в заголовках столбцов соответствуют активным и реактивным мощностям. Величины $td\hat{Y}$ с верхними индексами «P» и «Q» представлены в МВт и МВАр, соответственно.

Таким образом, ближайшим ПР в l_1 , Евклидовой и l_∞ -нормах соответствуют разные ПР. Эти модели обладают также различными вычислительными характеристиками. Таблица 5.6 содержит информацию о времени расчетов в миллисекундах и числе итераций, требуемых НЛПР-Б_p моделями для поиска ближайших ПР тестовых IEEE систем.

ТАБЛИЦА 5.6 -ВРЕМЯ РАСЧЕТА / КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ НЛПР-Б_p МОДЕЛЕЙ

IEEE	Один-норма		Два- норма		Бесконечность		NR
	l_1	l_{w1}	l_2	l_{w2}	l_∞	$l_{w\infty}$	
14	2.44/14	2.25/13	1.48/8	1.60/9	2.37/14	2.37/14	0.39/3
30	3.80/12	3.35/10	2.30/7	2.55/8	4.26/14	4.27/14	0.53/4
57	7.61/12	7.64/12	4.12/6	4.73/7	9.66/16	7.45/12	0.81/3
118	18.7/14	19.5/15	9.95/8	10.9/9	21.5/18	23.6/20	1.92/5
300	40.5/14	30.2/10	26.0/9	43.2/15	82.4/31	95.6/36	5.21/6

Исследовательский программный комплекс поиска БПР реализован автором на С++ и использует технологию разреженных систем и другие подходы, развитые в [35]. Расчетные выражения прямодвойственного метода внутренней точки НЛПР-Б_p моделей ближайших ПР представлены в Приложениях Е-3. Пределы реактивной мощности генераторов учитывались

ТАБЛИЦА 5.5 - РЕЗУЛЬТАТЫ НЛПР-Б_p МОДЕЛЕЙ ДЛЯ IEEE 14-УЗЛОВОЙ СИСТЕМЫ

№ Узла	<i>l₁-норма</i>				<i>Евклидова норма</i>				<i>l_∞-норма</i>			
	<i>N^p</i>	<i>N^q</i>	<i>tdŶ^p</i>	<i>tdŶ^q</i>	<i>N^p</i>	<i>N^q</i>	<i>tdŶ^p</i>	<i>tdŶ^q</i>	<i>N^p</i>	<i>N^q</i>	<i>tdŶ^p</i>	<i>tdŶ^q</i>
<i>Обычные нормы</i>												
2	0.01715	0.04171	0.0002	0.0004	0.01818	0.04182	0.6986	1.6074	0.02033	0.04450	8.9946	9.0471
3	0.04747	0.07048	0.0004	0.0006	0.05487	0.07174	2.1089	2.7571	0.06475	0.07765	9.0604	9.0651
4	0.05045	0.10045	0.0005		0.05878	0.10235	2.2590		0.06764	0.10715	9.0616	
5	0.04083	0.09251	0.0004	0.0009	0.04781	0.09678	1.8376	3.7196	0.05464	0.10124	9.0550	9.0706
6	0.08599	0.22144	0.0008	0.0023	0.15148	0.25298	5.8220	9.7229	0.16999	0.24314	9.0780	9.0812
7	0.07785	0.19261			0.10510	0.18495			0.12097	0.18653		
8	0.07785	0.17391			0.10510	0.16289			0.12097	0.16341		
9	0.10278	0.25950	0.0010	0.0029	0.14875	0.24483	5.7170	9.4096	0.16914	0.24198	9.0780	9.0812
10	0.10660	0.25691	0.0010	0.0028	0.16998	0.26984	6.5330	10.3706	0.19470	0.26473	9.0794	9.0818
11	0.09911	0.24068	0.0009	0.0026	0.17687	0.28189	6.7978	10.8336	0.20244	0.27229	9.0797	9.0820
12	0.10977	0.25871	0.0010	0.0029	0.22277	0.32404	8.5618	12.4538	0.23995	0.29750	9.0811	9.0826
13	0.12603	0.29363	0.0012	0.0034	0.22094	0.31746	8.4912	12.2010	0.23752	0.29441	9.0811	9.0825
14	0.20813	0.62014	0.0021	67.7285	0.26826	0.35170	10.3100	13.5167	0.27811	0.32020	9.0822	9.0830

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛИЦЫ 5.5 - РЕЗУЛЬТАТЫ НЛПР-Б_p МОДЕЛЕЙ ДЛЯ IEEE 14-УЗЛОВОЙ СИСТЕМЫ

№ Узла	<i>l₁-норма</i>				<i>Евклидова норма</i>				<i>l_∞-норма</i>			
	<i>N^P</i>	<i>N^Q</i>	<i>tdŶ^P</i>	<i>tdŶ^Q</i>	<i>N^P</i>	<i>N^Q</i>	<i>tdŶ^P</i>	<i>tdŶ^Q</i>	<i>N^P</i>	<i>N^Q</i>	<i>tdŶ^P</i>	<i>tdŶ^Q</i>
<i>Взвешенные нормы</i>												
2	0.01844	0.04579	0.0004	0.0004	0.05642	0.10683	1.2185	0.7903	0.03071	0.05845	16.3045	9.5458
3	0.05474	0.08037	0.0039	0.0015	0.40824	0.27084	166.1537	4.4845	0.13618	0.11258	71.0132	14.3105
4	0.05616	0.11831	0.0075		0.15217	0.17916	15.9470		0.10405	0.12677	36.0242	
5	0.04378	0.10196	0.0001	0.0000	0.10938	0.15262	0.2898	0.0179	0.07765	0.11594	5.7077	1.1904
6	0.09639	0.21050	0.0006	0.0006	0.17115	0.17677	0.9847	0.4561	0.18773	0.20978	8.4355	5.6467
7	0.09403	0.27298			0.18575	0.18364			0.16922	0.19152		
8	0.09403	0.23640			0.18575	0.16486			0.16922	0.16637		
9	0.14104	0.41448	0.0095	103.6370	0.20407	0.19610	8.1456	2.4784	0.22034	0.23480	22.2349	12.5089
10	0.14851	0.38064	0.0006	0.0007	0.20465	0.19680	0.7603	0.3036	0.23349	0.24296	6.7785	4.3661
11	0.12564	0.29009	0.0001	0.0000	0.19057	0.18856	0.1071	0.0280	0.21836	0.23133	2.6310	1.3496
12	0.11788	0.22900	0.0002	0.0000	0.18802	0.18351	0.3209	0.0215	0.23483	0.23103	4.5920	1.1987
13	0.12716	0.24408	0.0012	0.0004	0.19404	0.18713	1.6220	0.2887	0.24780	0.24117	10.1719	4.3660
14	0.18401	0.34992	0.0024	0.0005	0.22363	0.20037	2.2772	0.2297	0.31122	0.27166	11.2289	3.7636

с помощью NCP-функций. В качестве начальных приближений переменных использовались результаты расчета исходного режима, а для начальной оценки вектора неопределенных множителей Лагранжа – левый собственный вектор матрицы Якоби потокораспределения, соответствующий минимальному собственному значению. Расчеты выполнялись на Intel i5 с 2 Гб оперативной памяти и тактовой частотой 2.9 ГГц.

Для оценки вычислительной эффективности НЛПР-Б_p моделей БПР, в последнем столбце таблицы 5.6 представлены результаты расчетов потокораспределения исходных режимов с “гладкого” старта методом Ньютона (*NR*). Сравнение этого столбца с другими показывает, что время расчета предложенных моделей в среднем приблизительно соответствуют 10 расчетам потокораспределения.

НЛПР-Б_{(w)1} и НЛПР-Б_{(w)∞} модели оказались более сложными в реализации. Основная трудность обусловлена учетом ограничений в форме неравенств, присутствующих в этих моделях. Прямодвойственный метод внутренней точки позволил преобразовать системы линеаризованных уравнений этих моделей и получить базисные системы, подобные (5.2.10) НЛПР-Б₂ модели. Из-за уравнения (5.4.4e) размерность базисной системы НЛПР-Б_{(w)1} моделей получилась на единицу больше, чем у других моделей.

НЛПР-Б_{(w)2} модели показали лучшую надежность и сходимость. Сравнение системы линейных уравнений НЛПР-Б_{(w)2} моделей (5.2.10) и НЛПР-Н модели (4.2.5) показывает, что на первой итерации, т.е. когда $t = 0$, они совпадают. Поэтому на 1-ой итерации НЛПР-Б_{(w)2} модели ведут себя аналогично НЛПР-Н модели. Т.е. НЛПР-Б_{(w)2} модели идут к ближайшему ПР. Если начальное приближение dY было задано в противоположном направлении к БПР, переменная t становилась отрицательной. Для надежной сходимости требовался только контроль изменения значений переменных режима на итерации и их ограничение в случае больших приращений.

НЛПР-Б_{(w)1} и НЛПР-Б_{(w)∞} модели сходились к БПР только, если начальный вектор $d\hat{Y}$ не был в противоположном направлении к БПР. В

других случаях такие модели либо не сходились вообще (более часто), либо сходились к одной из отмеченных ранее особых точек гиперповерхности ПР, подобных точкам A , B , C , и D на рис. 5.3 и 5.4 (очень редко). Это происходило, несмотря на то обстоятельство, что на первой итерации матрицы базисных систем НЛПР- $B_{(W)\infty}$ моделей, как и в случае НЛПР- $B_{(W)2}$ моделей, совпадают с матрицей НЛПР-Н модели (4.2.5), а для НЛПР- $B_{(W)1}$ моделей - близки к ней. Видимо, это объясняется тем, что для НЛПР- $B_{(W)2}$ моделей нет ограничений на переменную t для линейаризованных уравнений (5.2.10). Поэтому, если вектор $d\hat{Y}$ был задан в противоположном направлении к БПР, после первой итерации переменная t становилась отрицательной в НЛПР- $B_{(W)2}$ моделях, в результате чего вектор $td\hat{Y}$ указывал правильное направление. В противоположность этому, в НЛПР- $B_{(W)1}$ и НЛПР- $B_{(W)\infty}$ моделях условия (5.3.4ж) и (5.4.4и) требуют положительное значение t в точке решения. Кроме этого, t^2 присутствует в базисных системах этих моделей, в отличие от НЛПР- $B_{(W)2}$ моделей.

Выводы по главе 5

На основе НЛПР модели нелинейного программирования ПР ЭС, представленной в главе 3, предложены, теоретически и вычислительно исследованы НЛПР- B_p модели ближайших предельных режимов ЭС в l_p -нормах. Анализ этих моделей показал, что

1. Модель ближайших ПР во взвешенной l_∞ -норме, которая учитывает неточность прогноза мощностей узлов с помощью взвешенной Евклидовой нормы, в наибольшей степени удовлетворяет требованиям СО для оценки коэффициента запаса статической устойчивости и оперативного (превентивного) управления.

2. Модель ближайших ПР в l_1 -норме в наибольшей степени отвечает требованиям СО для ввода режима ЭС в область существования и противоаварийного управления. Эта модель выдает управляющие воздействия одному узлу и задействует другие узлы только в случае

нехватки управляющих воздействий. В этом случае при вводе режима ЭС в область существования будет задействовано наименьшее количество узлов и будет отключена минимально возможная величина нагрузки.

3. Оценка ближайшего ПР с помощью Евклидовой нормы основана на геометрической интерпретации и может быть использована СО только как косвенный показатель. Когда посредством этой нормы режим ЭС вводится в область существования, управляющие воздействия размываются по всем узлам управления. Поэтому такая модель может быть использована СО только для первоначальной оценки управляющих воздействий.

4. Все другие модели ближайших ПР в l_p -нормах, когда $p \neq 1, 2$, или ∞ , мало подходят для СО. В этих моделях взаимосвязь между элементами вектора управляющих воздействий не отражает никаких реальных процессов, встречающихся в практике управления режимами ЭС.

Заключение

Представленная работа посвящена развитию теории и разработке эффективных моделей и методов нелинейного программирования решения задач ПР ЭС. При этом особое внимание было обращено на необходимость получения быстрого, надежного и точного решения, а также учета погрешности и неполноты исходной информации о текущем режиме ЭС и преодоление возникающих из-за этого трудностей реализации указанных задач. Поставленные цели потребовали решения сопутствующих проблем алгоритмической и программной реализации разработанных методов. В каждой главе представлены выводы, отражающие как общие, так и частные результаты исследования. Резюмируя работу в целом, отметим полученные теоретические и практические результаты.

1. Анализ математической модели потокораспределения показал, что месторасположение БУ влияет как на получаемые ПР ЭС, так и на расчетные области существования УР.

2. Исследование УУР позволяет сделать вывод о том, что вся совокупность УР ЭС для заданных параметров системы представляет собой гиперповерхность в пространстве мощностей, названной автором гиперповерхностью мощностей (ГМ) УР ЭС. При этом оказалось, что область существования УР ЭС, широко используемая в теории и практике решения задач ЭС, является ни чем иной, как проекцией ГМ вдоль оси активной мощности БУ на подпространство заданных мощностей узлов, а граница этой проекции определяет совокупность ПР ЭС. Так как в общем случае ГМ не является плоской, границы такой проекции, т.е. ПР, зависят от направления проецирования, т.е. выбора БУ. ГМ консервативной модели ПР является плоской, поэтому ПР в этой модели не зависят от месторасположения БУ. ГМ позволила наглядно объяснить механизм возможного появления «дырок» в ОСР, т.е. неоднозначности множества режимов ЭС в пространстве задаваемых мощностей, а также их исчезновение при другом выборе БУ.

3. Рассмотрение всей совокупности УР ЭС при заданных параметрах системы как ГМ позволило воспользоваться инструментарием дифференциальной геометрии. Анализ компонент вектора нормали ГМ показал их взаимосвязь через относительные приросты потерь активной мощности. В ПР компонента активной мощности БУ вектора нормали ГМ равна нулю, а относительный прирост потерь активной мощности БУ - единице. Поэтому в ПР любые попытки БУ поддержать баланс мощности в ЭС полностью блокируются возникающими при этом потерями. Неспособность БУ поддержать УР даже в некоторых узлах ЭС определяет ПР. В реальных ЭС изменение месторасположения БУ делает этот ПР непределным УР.

4. Исследование позиционной модели ЭС показало, что эта модель неявно использует и реализует идеологию РБУ, а ее предельные по статической апериодической устойчивости режимы в точности соответствуют ПР модели потокораспределения ЭС с РБУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности ЭС назначены прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин. В ПР позиционной модели вектор нормали ГМ ортогонален вектору постоянных инерции. Т.к. постоянные инерции всегда положительны, а компоненты вектора нормали ГМ взаимосвязаны через относительные приросты потерь активной мощности, ПР позиционной модели будет находиться дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей, чем ПР модели с шинами неограниченной мощности.

5. Предложена расчетная модель определения ПР, наиболее подходящая для адекватной оценки коэффициента запаса статической устойчивости ЭС.

6. На основе анализа компонент правого собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению матрицы Якоби потокораспределения в ПР, и теории графов предложен подход и разработан

алгоритм определения критических сечений в ПР, т.е. сечений, ответственных за нарушение статической аperiodической устойчивости ЭС.

7. Исследованы существующие методы расчета потокораспределения, определены их преимущества и недостатки. Предложен и разработан вычислительно эффективный метод расчета УР, дающий решением статически аperiodически устойчивый режим в случае его существования для заданных исходных данных, а при его отсутствии – рекомендации для его получения.

8. Определено, что одним из продуктивных подходов решения задач ПР является использование моделей и инструментов теории нелинейного программирования. Предложена и теоретически обоснована НЛПР модель нелинейного программирования ПР ЭС, дающая решением ПР, отвечающий минимуму целевой функции. Исследование НЛПР модели показало, что она в неявном виде использует инструментарий ГМ. Так, например, вектор неопределенных множителей Лагранжа УУР является не чем иным, как вектором нормали ГМ, а матрица вторых производных скалярного произведения УУР с вектором множителей Лагранжа является той матрицей, положительная определенность которой соответствует выпуклости ГМ в точке решения.

9. Предложен и разработан простой, быстрый, надежный и точный метод расчета ПР в заданном направлении изменения мощностей узлов, использующий особенности структуры линеаризованных уравнений модели нелинейного программирования ПР ЭС и ее условия оптимальности второго порядка.

10. На основе модели нелинейного программирования ПР в заданном направлении утяжеления предложена модель и разработан метод, учитывающие неточность прогноза узловых мощностей или направления утяжеления.

11. Предложены и теоретически исследованы модели нелинейного программирования ближайших ПР ЭС в l_p -нормах, определены их преимущества, недостатки и области применения.

12. Предложена и разработана модель нелинейного программирования ближайших ПР во взвешенной l_∞ -норме, учитывающая неточность прогноза мощностей узлов исходного УР во взвешенной Евклидовой норме. Такая модель, в наибольшей степени отвечает требованиям СО для оценки коэффициента запаса статической устойчивости и оперативного управления ЭС.

13. Предложена и разработана модель нелинейного программирования ближайших ПР в l_1 -норме, которая дает решением разреженный вектор УВ и больше всего соответствует требованиям СО для ввода режима в допустимую область и противоаварийного управления.

14. Предложена и разработана модель нелинейного программирования ближайших ПР в Евклидовой норме. Обнаружено, что оценка ближайшего ПР этой моделью может быть использована СО только для первоначальной оценки УВ.

15. Определено, что все другие модели ближайших ПР в l_p -нормах, когда $p \neq 1, 2$ или ∞ , мало подходят для СО. В этих моделях взаимосвязь между элементами вектора УВ не отражает никаких реальных процессов, встречающихся в практике управления режимами ЭС.

16. Теоретические основы и инструментарии, разработанные в диссертационной работе, открывают новое направление в области решения задач статической устойчивости ЭС, а именно - математические и вычислительные модели нелинейного программирования ПР ЭС, способствуют развитию теории ПР, расширению спектра решаемых задач ПР, разработке более эффективных алгоритмов, повышению точности, надежности и быстродействия решения задач ПР ЭС.

Список сокращений

- АД – асинхронный двигатель
- АРВ – система автоматического регулирования напряжения
- БРН – быстрый разделенный метод Ньютона
- БПР – ближайший предельный режим ЭС
- БУ – балансирующий узел
- БЧ – безытерационный метод Чебышева
- ВМ – ведущая микроматрица треугольного разложения матрицы Якоби
потокораспределения
- ВМО – ВМ с отрицательным определителем
- ГМ – гиперповерхность мощностей УР ЭС
- ГР – пограничный режим, разделяющий области притяжения
итерационного процесса к разным ПР
- ГПР – гиперповерхность ПР ЭС в пространстве мощностей
- МН – модифицированный метод Ньютона
- МУП – матрица узловых проводимостей
- НЛПР – модель нелинейного программирования предельных режимов
электрических систем
- НЛПР- B_1 – модель нелинейного программирования БПР в l_1 -норме
- НЛПР- B_2 – модель нелинейного программирования БПР в евклидовой
норме
- НЛПР- B_∞ – модель нелинейного программирования БПР в l_∞ -норме
- НЛПР- B_{wp} – модель нелинейного программирования БПР в взвешенной
 l_p -норме
- НЛПР- $B_{w\infty-w_2}$ – модель нелинейного программирования БПР в
взвешенной l_∞ -норме, учитывающая неточность прогноза узловых
мощностей в взвешенной евклидовой норме
- НЛПР-Н – модель нелинейного программирования предельных режимов
ЭС в заданном направлении изменения мощности

НЛПР-НП – модель нелинейного программирования предельных режимов ЭС в заданном направлении утяжеления с учетом неточности прогноза мощностей узлов исходного УР

ОСР – область существования УР ЭС

ПР – предельный режим ЭС

РБУ – распределенный БУ

СЛУ – система линейных алгебраических уравнений

СМ – синхронная машина

УВ – управляющие воздействия

УПР – уравнения предельных режимов

ОУПР – обобщенные уравнения ПР

УР – установившийся режим

УУН – уравнения узловых напряжений

УУР – уравнения УР

ЭДС – электродвижущая сила

ЭС – электрическая система

CPF – метод продолжения (по параметру) потокораспределения (continuation power flow)

LIV – бифуркация, индуцированная пределом реактивной мощности генератора (limit-induced bifurcation).

NR – метод Ньютона

PoC – метод точки коллапса (point of collapse method)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д., Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д., Прикладная статистика: Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 477 с.
3. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д., Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
4. Андерсон П., Фуад А. Управление энергосистемами и устойчивость. – М.: Энергия, 1980. – 568 с.
5. Арзамасцев Д.А., Бартоломей П.И., Холян А.М. АСУ и оптимизация режимов энергосистем. – М.: Высш. шк., 1983. – 208 с.
6. Арнольд В.И. Теория катастроф.- М.: Наука, 1990. – 128 с.
7. Атабеков Г.И. Основы теории цепей.- М.: Энергия, 1969.- 424 с.
8. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М. Оптимизационная модель предельных по существованию режимов электрических систем // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. всероссийской науч.-техн. конф. г. Екатеринбург, 17-19 ноября 2010 г. В 2 т. – Екатеринбург: УрФУ, 2010. - Т.1. С.218-224.
9. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М. Оптимизационная модель предельных режимов электрических систем // Электричество. – 2010. - №11.- С. 2-12.
10. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М. Оптимизационные вычислительные модели предельных режимов электрических систем для заданного направления утяжеления // Электричество.- 2010.- №12.- С. 2-7.
11. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М. Оптимизационные модели ближайших предельных режимов электрических систем // Электричество.- 2011.- №3.- С. 2-9.

12. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Неуймин В.Г. Анализ эффективности вычислительных моделей расчета установившихся режимов электрических систем // Электричество. – 2008. - №8.- С. 2-14.

13. Аюев Б. И. Ерохин П.М., Неуймин В.Г., Шубин Н.Г. Комплексная оптимизация режимов ЕЭС России в условиях функционирования конкурентного рынка. Проблемы управления электроэнергетикой в условиях конкурентного рынка // Сборник трудов. – Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, №12 (64), 2005. - С. 15-22.

14. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.- М.: Мир, 1982.- 583 с.

15. Баринов В.А., Совалов С.А. Режимы энергосистем: Методы анализа и управления. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 440 с.

16. Бартоломей П.И. Решение электроэнергетических задач методами второго порядка: Учебное пособие. – Свердловск: УПИ, 1988. – 88с.

17. Бендат Д., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

18. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1.- М.: Наука, 1962. – 464 с.

19. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. –М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

20. Бикел П., Доксан К. Математическая статистика. –Вып. 1. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 278 с.

21. Бикел П., Доксан К. Математическая статистика. –Вып. 2. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 254 с.

22. Богомолова И.А., Левит Л.М., Садовский Ю.Д. Оценка статической устойчивости в алгоритмах противоаварийного управления сложных энергосистем // Противоаварийное управление и регулирование энергосистем. –Л.: Энергоатомиздат, 1982. – С. 20-29.

23. Брамелер А., Алан Р., Хэмэм. Слабозаполненные матрицы. – М.: Энергия, 1979. -191 с.

24. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. – М.: Мир, 1988.- 262 с.
25. Бушуев В.В. Динамические свойства электроэнергетических систем. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 120 с.
26. Васин В.П. Области существования установившихся режимов электрических систем: учебное пособие.- М.: МЭИ, 1982. – 84 с.
27. Васин В.П., Кондакова В.Г. Исследование областей существования режима электроэнергетических систем с помощью степенных рядов // Известия РАН. Энергетика, 1995, №1. – С. 47-57.
28. Вейтнов Ф.Л., Мешнов В.К. Диспетчерское управление энергосистемами. М.: Стандартгиз, 1938.- 310 с.
29. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах.- М.: Энергия, 1964.- 379 с.
30. Веников В.А., Жуков Л.А., Поспелов Г.Е. Режимы работы электрических систем и сетей.- М.: Высш. школа, 1975.- 344 с.
31. Веников В.А., Цукерник Л.В. Развитие методов исследования устойчивости электрических систем (К 75-летию со дня рождения П.С. Жданова) // Электричество. - 1978. - №2. - С. 1-7.
32. Виноградов А.А., Идельчик В.И., Лазебник А.И. Расчетное исследование области существования решения уравнений установившегося режима и соотношения между пределами по существованию и статической аperiodической устойчивости // Вопросы применения методов при управлении режимами и развитием электрических систем.- Иркутск: ИПИ, 1975.- С. 22-49.
33. Виноградов А.А., Идельчик В.И., Новиков А.С. Ввод в область существования решения уравнений установившегося режима при расчетах установившихся, допустимых и оптимальных режимов электрических систем // Вопросы применения методов при управлении режимами и развитием электрических систем.- Иркутск: ИПИ, 1975.- С. 57-69.

34. Виноградов А.А., Новиков А.С., Паламарчук С.И. Расчеты режимов электрических систем методом второго порядка // Межвузовский сборник: Применение математических методов при управлении режимами и развитием электрических систем. – Иркутск: ИПИ, 1978.- С. 90-104.

35. Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах : монография / Б.И. Аюев, В.В. Давыдов, П.М. Ерохин, В.Г. Неуймин. –М.: Флинта : Наука, 2008. -256 с.

36. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

37. Гамм А.З. Вероятностные модели режимов электроэнергетических систем. – Новосибирск: Наука, 1993. – 133 с.

38. Гамм А.З., Голуб И.И. Сенсоры и слабые места в электроэнергетических системах. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996. – 99 с.

39. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1988. – 552 с.

40. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

41. Гуревич Ю.Е., Либова Л.Е., Окин А.А. Расчеты устойчивости и противоаварийной автоматики в энергосистемах.- М.: Энергоатомиздат, 1990. – 390 с.

42. Гуревич Ю.Е., Либова Л.Е., Хачатрян Э.А. Устойчивость нагрузки электрических систем. – М.: Энергоиздат, 1981. – 208 с.

43. Давыдов В.В. Методы оперативного расчета потерь электрической энергии и компенсации реактивной мощности в больших энергосистемах: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.14.02. – Свердловск: УПИ, 1987. – 23 с.

44. Давыдов В.В. Компенсация реактивной мощности в больших электрических системах / Уральский политехнический ин-т. – Свердловск, 1986. - Деп. в ИНФОРМЭНЕРГО, 1986. №2038эн. - 31 с.

45. Давыдов В.В. Управление источниками реактивной мощности при дефиците оперативной информации // Межвузов. научн.-техн. сборник:

управление режимами энергосистем и систем электроснабжения.- Чита: ЧГПУ, 1996. –С. 12.

46. Давыдов В.В. Оперативное управление источниками реактивной мощности // Сборник научных трудов. Серия: Технические науки. ВСГТУ. Выпуск №4. - Улан-Удэ: РИО ВСГТУ, 1997. - С. 33-40.

47. Давыдов В.В. Сингулярный анализ режимов электрических систем // Сборник научных трудов. Серия: Технические науки. ВСГТУ. Выпуск №5. - Улан-Удэ: РИО ВСГТУ, 1998. – С. 21-23.

48. Давыдов В.В., Аюев Б.И., Ерохин П.М., Прудов М.А. Исследование позиционной модели энергетической системы // Электричество. – 2019. - №3. – С. 4-14.

49. Давыдов В.В., Ерохин П.М. Модель диспетчерского управления синхронной зоны // Энергосистема: управление, конкуренция, образование: сборник докладов III междунар. науч.-техн. конф. г. Екатеринбург, 13-16 октября 2008 г. В 2 т. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. - Т.1. С.76-81.

50. Давыдов В.В., Ерохин П.М. Геометрия уравнений установившихся режимов электрической системы // Электроэнергия. Передача и распределение. – 2019. - №2 (53). – С. 6-11.

51. Давыдов В.В., Ерохин П.М. Исследование гиперповерхности мощностей установившихся режимов электрической системы // Вестник Иркутского государственного технического университета. – Иркутск, 2019, №1 (23). – С. 101-106.

52. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Кирилов К.Ю. Гиперповерхность мощностей установившихся режимов электрической системы // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. III междунар. науч.-техн. конф. г. Екатеринбург, 22-26 октября 2012 г. В 2 т. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. - Т.1. С.191-197.

53. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А. Модальный анализ двухмашинной позиционной модели электрической системы // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. IV междунар. науч.-техн.

конф. г. Новочеркасск, 14-18 октября 2013 г. В 2 т. – Новочеркасск: Лик, 2013. - Т.1. С.131-134.

54. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А. Исследование моделей электрической системы для оценки коэффициента запаса статической устойчивости // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. V междунар. науч.-техн. конф. г. Томск, 10-14 ноября 2014 г. В 2 т. – Томск: ТПУ, 2014. - Т.1. С.66-70.

55. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А. Исследование предельных режимов моделей электрической системы // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. VI междунар. науч.-техн. конф. г. Иваново, 9-13 ноября 2015 г. В 2 т. – Иваново: ИГЭУ, 2015. - Т.1. С.187-192.

56. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А. Исследование моделей оценки колебательной неустойчивости электрической системы // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. VII междунар. науч.-техн. конф. г. Казань, 19-23 сентября 2016 г. В 3 т. – Казань: КГЭУ, 2016. - Т.2. С.190-193.

57. Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А. Исследование моделей электрической системы для оценки колебательной неустойчивости электрической системы // Электроэнергетика глазами молодежи: научн. тр. VIII междунар. науч.-техн. конф. г. Самара, 02-06 октября 2017 г. В 3 т. – Самара: СГТУ, 2017. - Т.2. С.262-265.

58. Давыдов В.В., Замковой Р.Э., Ткачев С.В. Сингулярный подход к управлению режимами энергосистем // Проблемы энергоснабжения Дальнего Востока: тезисы докладов Республиканской научной конференции. - Комсомольск-на-Амуре: АГУ, 1995. С. 36-37.

59. Давыдов В.В., Крюков А.В., Пруидзе Е.В. Управление источниками реактивной мощности на основе микро ЭВМ // XI сессия Всесоюзного научного семинара Кибернетика электрических систем. Электроснабжение промышленных предприятий. Тезисы докладов. – Абакан: УПП «Хакасия», 1989. - С. 206-207.

60. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Разработка алгоритмов и программ для целей оперативного управления энергосистемами. Тезисы XXVIII научной конференции ВСТИ. Секция Вычислительная техника, автоматизация производства. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1989. – С. 16.

61. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Оценка запасов устойчивости узлов нагрузок // Совершенствование электрооборудования и средств автоматизации технологических процессов: тезисы докладов. - Комсомольск-на-Амуре: 1989. - С. 57.

62. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Оценка запасов устойчивости и определение допустимых режимов энергосистем. Депонировано в ИНФОРМЭНЕРГО №3002-эн88, 1989, Восточно-сибирский технологический институт, 11 с.

63. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Методика решения уравнений предельных режимов энергосистем. Депонировано в ИНФОРМЭНЕРГО №3003-эн88, 1989, Восточно-сибирский технологический институт, 10 с.

64. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Определение запасов устойчивости энергосистем и узлов нагрузки // XI сессия Всесоюзного научного семинара Кибернетика электрических систем. Электроснабжение промышленных предприятий. Тезисы докладов. – Абакан: УПП «Хакасия», 1989. - С. 208-209.

65. Давыдов В.В., Крюков А.В., Сактоев В.Е. Решение одной задачи нелинейного программирования // Тезисы XXVIII научной конференции ВСТИ. Физико-математическая секция. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1989. - С. 20.

66. Давыдов В.В., Липес А.В. Применение упрощенных реализаций метода Ньютона для ускорения решения уравнений установившихся режимов / Уральский политехнический ин-т. – Свердловск, 1986. - Деп. в ИНФОРМЭНЕРГО, 1986. № 2130Эн. - 11 с.

67. Давыдов В.В., Липес А.В. Методы оперативного расчета потерь электрической энергии в энергосистемах / Уральский политехнический ин-т. – Свердловск, 1987. - Деп. в ИНФОРМЭНЕРГО, 1987. №2541эн. - 40 с.

68. Давыдов В.В., Липес А.В. Оперативное управление источниками реактивной мощности в электроэнергетических системах // Тезисы XXVII научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1988. – С. 43.

69. Давыдов В.В., Липес А.В. Усовершенствование алгоритмов расчета установившихся режимов // Электричество. - 1988, - №6. - С. 55-58.

70. Давыдов В.В., Липес А.В. Расчет потерь энергии в электрических системах при дефиците оперативной информации // Информационное обеспечение. Задачи реального времени в диспетчерском управлении. Часть I. Методологические вопросы. –Каунас: ИФТПЭ, 1989.- С. 211-215.

71. Давыдов В.В. Липес А.В. Метод расчета установившихся режимов систем электроснабжения промышленных предприятий // Изв. вузов Электромеханика.- 1990.- №8.- С. 82-85.

72. Давыдов В.В., Липес А.В., Неуймин В.Г. Применение симметричной формы уравнений баланса мощностей для увеличения быстродействия алгоритмов анализа установившихся режимов / Уральский политехнический ин-т. – Свердловск, 1984. - Деп. в ИНФОРМЭНЕРГО, 1984, 1452эн-Д84. – 11 с.

73. Давыдов В.В., Липес А.В., Неуймин В.Г. Кибернетическое моделирование районов электрических систем с учетом потерь мощности // Тезисы докладов IX Всесоюзной научной конференции: Моделирование электрических систем. - Рига, 1987. – С. 297-298.

74. Давыдов В.В., Неуймин В.Г. Районирование энергосистем для управления режимами // Тезисы XXIX научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1990. - С. 10.

75. Давыдов В.В., Неуймин В.Г., Сактоев В.Е. Определение критических сечений энергосистем в предельных режимах // Известия РАН. Энергетика.- 1992.- №1.- С. 74-80

76. Давыдов В.В., Неуймин В.Г., Сактоев В.Е. Расчеты потокораспределения в сложных электрических системах на мини ЭВМ. Учебное пособие. -Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1992. – 88 с.

77. Давыдов В.В., Неуймин В.Г., Сактоев В.Е. Современные методы расчета потокораспределения электрических систем. Учебное пособие. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1993. –125 с.

78. Давыдов В.В., Прудов М.А. Исследование моделей электрической системы для определения расчетных предельных режимов // Вестник Восточно - Сибирского государственного университета технологий и управления. - Улан-Удэ. - 2015. - №5 (62). - С. 38-45.

79. Давыдов В.В., Прудов М.А. Исследование модели электрической системы для определения предельных по статической колебательной устойчивости режимов // Вестник Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. - Улан-Удэ. - 2017. - №4 (67). - С. 5-11.

80. Давыдов В.В., Прудов М.А. Модальный анализ позиционной модели электрической системы // Вестник Восточно - Сибирского государственного университета технологий и управления. - Улан-Удэ. - 2018. - №3 (70). - С. 5-12.

81. Давыдов В.В., Сактоев В.Е. Методы и алгоритмы расчета установившихся режимов электрических систем на мини ЭВМ класса СМ-4 и Электроника -60 // Тезисы XXVII научной конференции ВСТИ. Секция Вычислительная техника, автоматизация производства. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1988. – С. 17.

82. Давыдов В.В., Сактоев В.Е. Формирование районов управления на основе выделения слабых сечений энергосистем // Тезисы XXX научной

конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1991. - С. 12-14.

83. Давыдов В.В., Сактоев В.Е. Формирование вычислительных моделей энергосистем на основе сингулярного анализа // Тезисы XXXI научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1992. - С. 7.

84. Давыдов В.В., Сактоев В.Е. Сингулярный анализ и слабые сечения энергосистем // Повышение эффективности производства и использования энергии в условиях Сибири, тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференция. – Иркутск: ИрГТУ, 1994. – С. 50-51.

85. Давыдов В.В., Сактоев В.Е., Хулукшинов Р.Г. Оценка критических по статической устойчивости сечений энергосистем // Тезисы XXIX научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1990. - С. 6.

86. Давыдов В.В., Сактоев В.Е., Хулукшинов Р.Г. Расчетный метод утяжеления режимов энергосистем по заданному сечению // Тезисы XXX научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1991. - С. 2-3.

87. Давыдов В.В., Хулукшинов Р.Г. Практический метод утяжеления энергосистем по заданному сечению. // Тезисы XXXI научной конференции ВСТИ. Секция Электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1992. - С. 8.

88. Давыдов В.В., Шелюг С.Н. Оценка потерь электроэнергии от транзитных перетоков // Энергосистема: управление, конкуренция, образование: сборник докладов III междунар. науч.-техн. конф. г. Екатеринбург, 13-16 октября 2008 г. В 2 т. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. - Т.2. С.197-203.

89. Дарманчев А.К. Разработка производственного задания и оперативное управление работой сложных энергосистем.- М.: ОНТИ, главная редакция энергетической литературы, 1936.- 37 с.

90. Денис Д., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. - 440 с.
91. Димо П. Модели РЕИ и параметры режима. Объединенные энергосистемы.- М.: Энергоатомиздат, 1987.- 392 с.
92. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.- М.: Наука, 1979.- 760 с.
93. Дунаева Н.П., Конторович А.М. Исследование методов расчета установившихся режимов, основанных на разложении решения в ряд Тейлора // Межвузовский сборник: Применение математических методов при управлении режимами и развитием электрических систем. – Иркутск: ИПИ, 1978.- С. 65-74.
94. Ерохин П.М., Неуймин В.Г., Шубин Н.Г., Максименко Д.М. Использование оптимизационных методов внутренней точки для оценивания состояния энергосистем. // Известия НТЦ Единой энергетической системы, №1(66), 2012. - С. 22-29.
95. Жданов П.С. Вопросы устойчивости электрических систем.- М.: Энергия, 1979. – 456 с.
96. Жуков Л.А., Стратан И.П. Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем: Методы расчетов.- М.: Энергия, 1979.- 416 с.
97. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951.- 335 с.
98. Идельчик В.И. Предел по существованию решения уравнений установившихся режимов // Вопросы применения методов при управлении режимами и развитием электрических систем.- Иркутск: ИПИ, 1975.- С. 6-21.
99. Идельчик В.И. Расчеты установившихся режимов электрических систем. – М.: Энергия, 1977. – 192 с.
100. Иофьев Б.И. Автоматическое аварийное управление мощностью энергосистем. – М.: Энергия, 1974. – 416 с.
101. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

102. Кендалл М.Д., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
103. Кендалл М.Д., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
104. Конторович А.М., Крюков А.В. Предельные режимы энергосистем. Основы теории и методы расчетов : Учебное пособие. – Иркутск: Иркутск. ун-т, 1985. – 72 с.
105. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. -832 с.
106. Костюк О.М. Позиционная идеализация энергосистем и закон сохранения энергии. - Киев: Изд. ИЭД АН УССР. - 1974.
107. Костюк О.М. Элементы теории устойчивости энергосистем. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
108. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
109. Круг К.А. Основы электротехники. – М.: ОНТИ. Главная редакция энергетической литературы, 1936. – 887 с.
110. Крумм Л.А. Методы приведенного градиента при управлении электроэнергетическими системами. – Новосибирск: Наука, 1977. – 308 с.
111. Крумм Л.А. Методы оптимизации при управлении электроэнергетическими системами.- Новосибирск: Наука, 1981.- 315 с.
112. Крюков А.В. Предельные режимы электроэнергетических систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 236 с.
113. Крюков А.В., Давыдов В.В. Стохастический подход к задаче оценки запасов устойчивости энергосистем // Тезисы 28 научной конференции ВСТИ. Секция электротехническая. - Улан-Удэ: РИО ВСТИ, 1989. - С. 12.
114. Куликов Ю.А. Переходные процессы в электроэнергетических системах.- М.: Издательство «Омега-Л», 2013.- 384 с.

115. Легостаев С.М., Давыдов В.В., Зонхоев Г.Б. Использование сингулярной аппроксимации для формирования робастных моделей электрических систем // Энергетика: управление, качество и эффективность использования энергоресурсов: Сборник трудов третьей всероссийской научно-технической конференции с международным участием в 2 т. – Благовещенск: издательство АГУ, 2003. – Т.1, С.180-186.

116. Липес А.В. Применение методов математической статистики для решения электроэнергетических задач: Учебное пособие. – Свердловск: изд. УПИ, 1983. – 88 с.

117. Липес А.В., Давыдов В.В. Компенсация реактивной мощности в больших электрических системах с учетом многорежимности // Тезисы докладов всесоюзной научно-технической конференции: Научные проблемы современного электрического машиностроения и их решение. - Л., 1987. - С. 89-90.

118. Липес А.В., Неуймин В.Г., Давыдов В.В. Применение методов коррекции параметров установившихся режимов для оценки надежности энергосистем // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции: Состояние и перспективы развития электротехнологии (Вторые Бенардосовские чтения)- Иваново, 1985. Т.2. – С.27-28.

119. Липес А.В., Окуловский С.К. Расчеты установившихся режимов электрических систем на ЦВМ: Учебное пособие. – Свердловск: изд. УПИ, 1986. – 88 с.

120. Литтл Р.А., Рубин Д.Б. Статистический анализ с пропусками. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 336 с.

121. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. –М.: Наука, 1986. 232 с.

122. Лушаков Э.С. О некоторых свойствах позиционной модели электрических систем // Электричество. - 1977. - №10. - С. 26-29

123. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Высш. шк., 1988. – 239 с.

124. Маркович И.М. Режимы энергетических систем. –М.: Энергия, 1969. -352 с.
125. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
126. Материалы дискуссии по теории статической устойчивости энергосистемы // Электричество. - 1975. - №8. - С. 66-93.
127. Мельников Н.А., Солдаткина Л.А. Матричные методы расчета рабочих режимов замкнутых электрических сетей : учебное пособие.- М.: МЭИ. 1965. – 131 с.
128. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
129. Методы анализа нелинейных динамических моделей / Холодинок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.- М.: Мир, 1991. - 368 с.
130. Методы оптимизации режимов энергосистем / Горштейн В.М., Мирошниченко Б.П., Пономарев А.В. и др. – М.: Энергия, 1981. - 336 с.
131. Мотовилов С.И., Фишов А.Г. О вводе электрического режима энергосистемы в область статической апериодической устойчивости // Энергосистема: управление, конкуренция, образование. Сборник докладов III международной научно-практической конференции. -Екатеринбург: РИО ГОУ ВПО «УГТУ-УПИ», 2008, С. 378-381
132. Науменко В.Д. Определение опасного по условиям устойчивости сечения энергосистемы // Автоматическое управление и противоаварийная автоматика в крупных энергообъединениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. - С. 42-45.
133. Невельский В.Л., Дробов Е.А. Идентификация границы области существования режимов трехмашинной энергосистемы по характеру нарушения устойчивости // Автоматическое управление и противоаварийная автоматика в крупных энергообъединениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. - С. 84-90.

134. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
135. Обоскалов В.П. Электроэнергетические системы и сети.- Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 1993.- 86 с.
136. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.- М.: Мир, 1988. – 512 с.
137. Ортега Д., Рейнболдт Р. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.- 558 с.
138. Оценка «слабых» мест энергосистем по упрощенным моделям / Рудницкий М.П., Коржавин Ю.А., Красникова Т.Я., Павлова М.В. // Информационное обеспечение. Задачи реального времени в диспетчерском управлении. Часть I. Методологические вопросы.- Каунас: ИФТПЭ, 1989.- С. 216-221.
139. Паздерин А.В., Юферев С.В. Ввод режима в допустимую область на основе обобщенного метода Ньютона // Энергосистема: управление, конкуренция, образование. Сборник докладов III международной научно-практической конференции. -Екатеринбург: РИО ГОУ ВПО «УГТУ-УПИ», 2008, С. 406-412.
140. Пелисье Р. Энергетические системы.- М.: Высшая школа, 1982.- 568 с.
141. Паламарчук С.И. Разделенные методы для расчета установившихся режимов ЭЭС / Сибирский энергетический ин-т. – Иркутск, 1987. - Деп. в ИНФОРМЭНЕРГО, 1987. № 7908-В87. - 67 с.
142. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы.- М.: Мир, 1983. – 384 с.
143. Пат. RU 2611259 С1, Российская федерация, МПК G06F 17/40, H021 13/00. Автоматизированное устройство определения предельных режимов электрических систем [Текст] / Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М.; Заявитель и патентообладатель ОАО «Системный оператор Единой

энергетической системы».- №216102906; заявл. 29.01.2016; опубл. 21.02.2017, Бюл. № 6.

144. Портной М.Г., Рабинович Р.С. Управление энергосистемами для обеспечения устойчивости. – М.: Энергия, 1978. - 352 с.

145. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.- М.: Наука, 1987. – 480 с.

146. Применение цифровых вычислительных машин в электроэнергетике / О.В. Щербачев, А.Н. Зейлигер, К.П. Кадомская и др. – Л.: Энергия, 1980. - 240 с.

147. Программный комплекс «RastrWin3». Руководство пользователя / Неуймин В.Г., Машалов Е.В., Александров А.С., Багрянцев А.А. – <http://www.rastrwin.ru>

148. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.

149. Райс Д. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. -264 с.

150. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Хампель Ф., Ронгетти Э., Раусселл П., Штаэдь В. – М.: Мир, 1989. – 512 с.

151. Рудницкий М.П. Элементы теории устойчивости и управления режимами энергосистем: Учебное пособие. – Свердловск: 1984. – 96 с.

152. Рюденберг Р. Эксплуатационные режимы электроэнергетических систем и установок: – Л.: Энергия, 1980. -578 с.

153. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. 455 с.

154. Совалов С.А. Режимы единой энергосистемы. – М.: Энергоатомиздат, 1983. 384 с.

155. Совалов С.А., Семенов В.А. Противоаварийное управление в энергосистемах. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 416 с.

156. Солдаткина Л.А. Электрические сети и системы: Учеб. пособие для вузов.- М.: Энергия. 1978. - 216 с.

157. СО 153-34.20.576-2003 «Методические указания по устойчивости энергосистем», утверждены приказом Минэнерго России от 30.06.2003 № 277.
158. СТО ОАО «СО-ЦДУ ЕЭС» 59012820.29.240.007-2008. Правила предотвращения развития и ликвидации нарушений нормального режима электрической части энергосистем. –М.: СО-ЦДУ ЕЭС, 2008.- 49 с.
159. СТО ОАО «СО ЕЭС» 59012820.29.240.001-2011. Автоматическое противоаварийное управление режимами энергосистем. Противоаварийная автоматика энергосистем. Условия организации процесса. Условия создания объекта. Нормы и требования.- М.: СО ЕЭС, 2011. – 30 с.
160. СТО ОАО «СО ЕЭС» 59012820.27.010.003-2011. Правила перехода на работу в вынужденном режиме в контролируемых сечениях диспетчерского центра филиала ОАО «СО ЕЭС». – М.: СО ЕЭС, 2011. – 19 с.
161. СТО ОАО «СО ЕЭС» 59012820.27.010.001-2013. Правила определения максимально допустимых и аварийно допустимых перетоков активной мощности в контролируемых сечениях диспетчерского центра ОАО «СО ЕЭС».- М.: СО ЕЭС, 2013. – 36 с.
162. СТО ОАО «СО ЕЭС» 59012820.27.010.____-2013. Требования к надежности и устойчивости энергосистем.- М.: СО ЕЭС, 2013. –17 с.
163. Стофт С. Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии.- М.: Мир, 2006.- 623 с.
164. Тарасов В.И. Метод непрерывного утяжеления для определения предельных по статической устойчивости режимов электроэнергетических систем // Электричество. – 2004. - №9.- С.12-18.
165. Тарасов В.И. Методы минимизации ньютоновского типа для расчета установившихся режимов электроэнергетических систем. – Новосибирск: Наука, 2001. -168 с.
166. Тарасов В.И. Нелинейные методы оптимизации для расчета установившихся режимов электроэнергетических систем. – Новосибирск: Наука, 2001. -214 с.

167. Тарасов В.И. Теоретические основы анализа установившихся режимов электроэнергетических систем. – Новосибирск: Наука, 2002. -344 с.
168. Торп Д. Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1979.- 359 с.
169. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 189 с.
170. Ульянов С.А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах. – М.: Энергия, 1970.- 520 с.
171. Ушаков Е.И. Некоторые свойства математических моделей электрических систем и их анализ применительно к задаче статической устойчивости // Электричество. - 1977. - №10. - С. 19-26.
172. Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 273 с.
173. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – СПб.: Издательство «Лань», 2002.- 736 с.
174. Фазылов Х.Ф., Насыров Т.Х. Основы теории и расчета установившихся режимов электрических систем.- Ташкент: Фан, 1985.- 76 с.
175. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1. -М.: Мир, 1984. – 528 с.
176. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 2. -М.: Мир, 1984. – 738 с.
177. Холмский В.Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей (специальные вопросы): Учеб. пособие для вузов.- М.: Высш. школа, 1975.- 280 с.
178. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
179. Цукерник Л.В. О критике теории статической устойчивости энергосистем // Электричество. - 1974. - №5. - С. 21-31.
180. Чебан В.М., Ладман А.К., Фишов А.Г. Управление режимами электроэнергетических систем в аварийных ситуациях. –М.: Высш. шк., 1990. -144 с.
181. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

182. Электрические системы, т.1. Математические задачи электроэнергетики / Под ред. В.А. Веникова.- М.: Высш. школа, 1981.- 288 с.
183. Электрические системы, т.2. Электрические сети / Под ред. В.А. Веникова.- М.: Высш. школа, 1971.- 440 с.
184. Abe S., Kukunaga Y., Isono A., Kondo B. Power system voltage stability // IEEE Trans. PAS. - vol. 101. - pp. 3830-3840, Oct. 1982.
185. Abe S., Hamano N., Isono A., Okuda K. Load flow convergence in the vicinity of a voltage stability limit // IEEE Trans. PAS, vol. PAS-97, no.6, pp. 1983-1993, Nov./Dec. 1978.
186. Ajarapu V. Computational techniques for voltage stability assessment and control. – N.-Y.: Springer, 2006. – 250 p.
187. Ajarapu V., Christy C. The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 1, pp. 416-423, Feb.1992.
188. Ajarapu V., Lee B. Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 1, pp. 424-431, Feb. 1992.
189. Alvarado F., Dobson I., Hu Y. Computation of closest bifurcations in power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 9, no. 2, pp. 918-928, May 1994.
190. Alvarado F., Hu Y., Ray D., Stevenson R., Cashman E. Engineering foundations for the determination of security costs // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 3, pp. 1175-1182, Aug. 1991.
191. Araposthatis A., Sastry S., Varaiya P. Analysis of power-flow equation // Electrical Power and Energy Systems, vol.3, no.3, pp. 115-126, July 1981.
192. Araposthatis A., Sastry S., Varaiya P. Bifurcation analysis of the load flow equations // Proc. 19th IEEE Conf. on Decision and Control.- vol.1.- pp. 641-644.- New Mexico.- Dec. 1980.
193. Arrillaga J., Arnold C.P. Computer analysis of power systems. – Chichester: Ion Wiley & Sons.- 358 p.

194. Avalos R.J., Canizares C.A., Milano F., Conejo A.J. Equivalency of continuation and optimization methods to determine saddle-node and limit-induced bifurcations in power systems // IEEE Trans. Circuits and System –I, . vol. 56, no. 1, pp. 210-223, Jan. 2009.
195. Avramovic B., Fink L.H. Real-time reactive security monitoring // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 1, pp. 432-437, Feb. 1992.
196. Ayuev B. I., Davydov V. V., Erokhin P. M. Nonlinear-programming-based model of power system marginal states: Theoretical substantiation [Online]. [www://arxiv.org/abs/1505.03991](http://arxiv.org/abs/1505.03991), 2015.
197. Ayuev B. I., Davydov V. V., Erokhin P. M. Fast and reliable method of searching power system marginal states // IEEE Trans. Power Syst., vol. 31, no. 6, pp. 4525-4533, Nov. 2016.
198. Ayuev B. I., Davydov V. V., Erokhin P. M. Models of closest marginal states of power systems in p -norms // IEEE Trans. Power Syst., vol. 33, no. 2, pp. 1195-1208, Mar. 2018.
199. Baldick R. Applied optimization. Formulation and algorithms for engineering systems. - Cambridge: Cambridge university press, 2006.- 787 p.
200. Barquin J., Gomes T., Pagola F.L. Estimating the loading limit margin taking into account voltage collapse areas // IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, no. 4, pp. 1952-1962, Nov. 1995.
201. Begovic M.M., Phadke A.G. Voltage stability assessment through measurement of a reduced state vector // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 1, pp. 198-203, Feb. 1990.
202. Begovic M.M., Phadke A.G. Dynamic simulation of voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 4, pp. 1529-1534, Nov. 1990.
203. Begovic M.M., Phadke A.G. Control of voltage stability using sensitivity analysis // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 1, pp. 114-123, Feb. 1992.

204. Berizzi A., Finazzi P., Dosi D., Marannino P., Corsi S. First and second order methods for voltage collapse assessment and security enhancement // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 2, pp. 633-638, May 2003.
205. Bijwe P.R., Kelapure S.M. Nondivergent fast power flow methods // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 2, pp. 633-638, May 2003.
206. Boyd S., Vandenberghe L., Convex Optimization. Cambridge: USA: Cambridge University Press, 2004. - 716 p.
207. Canizares C. A. Conditions for saddle-node bifurcations in AC/DC power systems // Int. J. Electrical Power & Energy Systems.- vol.17.- no.1.- 1995.- pp. 61-68.
208. Canizares C. A. On bifurcations, voltage collapse and load modeling // IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, no. 1, pp. 512-522, Feb. 1995.
209. Canizares C. A. Applications of optimization to voltage collapse analysis // in Panel Session “Optimization Techniques in Voltage Collapse Analysis”, IEEE/PES Summer Meeting, San Diego, July 14, 1998, pp. 1-8.
210. Canizares C. A. Calculating optimal system to maximize the distance to saddle-node bifurcations // IEEE Trans. Circ. and Syst., -I: Fundamental Theory and Applications, vol. 45, no. 3, pp. 225-237, Mar. 1998.
211. Canizares C. A., Discussion of “Application of an optimization method for determining the reactive margin from voltage collapse in reactive planning” by C. J. Parker, I. F. Morison, D. Sutano // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 3, pp. 1473-1481, Aug. 1996.
212. Canizares C. A., Alvarado F. L. Point of collapse and continuation methods for large ac/dc systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 1, pp. 1-8, Feb. 1993.
213. Canizares C. A., Alvarado F. L., DeMarco C. L., Dobson I., Long W. F. Point of collapse method applied to ac/dc power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 2, May 1992, pp.673-683.
214. Canizares C.A., Alvarado F.L., Zhang S., Watson M., UWPFLOW, available at <http://uwaterloo.ca/power-energy-systems-group/downloads/>

215. Canizares C.A., de Souza A.C.Z., Quintana V.H. Comparison of performance indices for detection of proximity to voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 3, Aug. 1996, pp.1441-1450.
216. Canizares C.A., Mihulananthan N., Berizzi A., Reeve J. On the linear profile of indices for prediction of saddle-node and limit-induced bifurcation points in power systems // IEEE Trans. Circuits and Systems-I, vol. 50, no. 2, Dec. 2003, pp. 1588-1595.
217. Canizares C., Rosehart W., Berizzi A., Bovo C. Comparison of voltage security constrained optimal power flow techniques // in Proc. 2001 IEEE PES, Summer Meeting, pp. 1680-1685.
218. Capasso A., Mariani E. Influence of generator capability curves representation on system voltage and reactive power control studies // IEEE Trans. PAS. – vol. 97. – no.4. -pp. 1036-1041, July/Aug. 1978.
219. Capitanescu F., Van Cutsem T. Preventive control of voltage security margins: multicontingency sensitivity-based approach // IEEE Trans. Power Syst., vol. 17, no. 2, May 2002, pp.358-364.
220. Capitanescu F., Van Cutsem T. Unified sensitivity analysis of unstable or low voltage caused by load increases or contingencies // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no. 1, Feb. 2005, pp.321-329.
221. Capitanescu F., Van Cutsem T., Wehenkel L. Coupling optimization and dynamic simulation for preventive-corrective control of voltage instability // IEEE Trans. Power Syst., vol. 17, no. 2, May 2002, pp.358-364.
222. Capitanescu F., Wehenkel L. A new iterative approach to the corrective security-constrained optimal power flow problem // IEEE Trans. Power Syst., vol. 24, no. 2, May 2009, pp.796-805.
223. Carppentier J. CRIC, a new active-reactive decoupling process in load flows, optimal power flows and system control // IFA symposium on Power Systems & Power Plant Control. - Beijing, Aug. 1986. -pp. 65-70.

224. Chen K., Hussein A., Bradley M. E., Wan H. A performance-index guided continuation method for fast computation of saddle-node bifurcation in power systems // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 2, May 2003, pp.753-760.
225. Chen Y., Bose A. Security analysis for voltage problems using a reduced model // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 5, no. 3, pp. 933-940, Aug. 1990.
226. Chiang H.-D., Dobson I., Thomas R.J., Thorp J.S., Fekin-Ahmed L. On voltage collapse in electric power systems // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 5, no. 2, pp. 601-611, May 1990.
227. Chiang H.-D., Flueck A. J., Shah K. S., Balu N. CPFLOW: A practical tool for tracing power system steady state stationary behavior due to load and generation variations // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 623-634, May 1995.
228. Chiang H.-D., Jean-Jumeau R. Toward a practical performance index for predicting voltage collapse in electric power systems // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 584-592, May 1995.
229. Chiang H.-D., Jean-Jumeau R. A more efficient formulation for computation of the maximum loading points in electric power systems // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 635-646, May 1995.
230. Chiang H.-D., Wang C.-S., Flueck A.J. Look-ahead voltage and load margin contingency selection functions for large-scale power systems // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 12, no. 1, pp. 173-180, Feb. 1997.
231. Chiocel S.G., Chow J.H. A power flow method using a new bus type for computing steady-state voltage stability margins // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 29, no. 2, Mar. 2014, pp.958-965.
232. Chow J.-C., Fischl R., Yan H. On the evaluation of voltage collapse criteria // *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 5, no. 2, pp. 612-620, May 1990.
233. Christie R. Power systems test case archive. – Washington: Electrical engineering department, university of Washington, 2000.

234. Conejo A.J., Milano F., Garcia-Bertrand R. Congestion management ensuring voltage stability // IEEE Trans. Power Syst., vol. 21, no. 1, Feb. 2003, pp.357-364.
235. Conn A. R., Gould N. I. M., Toint P. L., Trust-Region Methods. – Philadelphia, USA: MPS-SIAM Series on Optimization, 2000, 959 p.
236. da Costa V.M., Martins N., Pereira J.L.R. Developments in the Newton Raphson power flow formulation based on current injections // IEEE Trans. Power Syst. -1999. - vol.14. - no. 4. -pp. 1320□1326.
237. Dai Y., McCalley J. D., Vittal V. Simplification, expansion and enhancement of direct interior point algorithm for power system maximum loadability // IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, no. 3, Aug. 2000, pp.1014-1021.
238. Definition and classification of power system stability / pp. Kundur, J. Paserba, V. Ajjarapu et al. // IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 2, May 2004, pp.1387-1401.
239. Deufhard pp. Newton methods for nonlinear problems. Affine invariance and adaptive algorithms. – Springer- Verlag Berlin Heidelberg: 2004. – 424 p.
240. Deuse J., Stubbe M. Dynamic simulation of voltage collapses // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 3, pp. 894-900, Aug. 1993.
241. Dobson I. Observations on the geometry of saddle node bifurcation and voltage collapse in electrical power system // IEEE Trans. Circuits & Systems.- Part I.- vol.39.- no.3. – Mar. 1992.- pp. 240-243.
242. Dobson I. Computing a closest bifurcation instability in multidimensional parameter space // J. Nonlinear Sci. – vol.3.- 1993.- pp. 307-327.
243. Dobson I. The irrelevance of electric power system dynamics for loading margin to voltage collapse and its sensitivities // Nonlinear theory and its applications, IEICE.- vol.2.- no.3.- 2011.- pp.263-280.
244. Dobson I., Chiang H.-D. Towards a theory of voltage collapse in electric power systems // Systems and control letters.- vol.13.- 1989.- pp. 253-262.

245. Dobson I., Lu L. Voltage collapse precipitated by the immediate change in stability when generator reactive power limits are encountered // IEEE Trans. Circuits and Systems – I.- 1992.- vol.39.- no.9.- pp.762-766.
246. Dobson I., Lu L. Computing an optimum direction in control space to avoid saddle node bifurcation and voltage collapse in electric power systems // IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, no. 10, pp. 1616-1629, Oct. 1992.
247. Dobson I., Lu L. New method for computing a closest saddle node bifurcation and worst case load power margin for voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 3, pp. 905-913, Aug. 1993.
248. Dommel H.W., Tinney W.F. Optimal power flow solutions // IEEE Trans. PAS-87. vol. 87, no.10, -pp. 1866-1876, Oct. 1968.
249. Ejebe G.C., Irisarri G.D., Mokhtari S., Obadina O., Ristanovic P, Tong J. Methods for contingency screening and ranking for voltage stability analysis of power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 1, Feb. 1996, pp.350-356.
250. El-Hawary M.E., Wellon O.K. The alpha-modified quasi-second order Newton-Raphson method for load flow solutions in rectangular form // IEEE Trans. PAS. – 1982. – vol. PAS-101. - no. 4. -pp. 854-866
251. Exposito A. G., Ramos J. L. M., Santos J. R. Slack bus selection to minimize the system power imbalance in load-flow studies // IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 2, pp. 987-995, May 2004.
252. Feng Z., Ajarapu V., Maratukulan D. J. A comprehensive approach for preventive and corrective control to mitigate voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, no. 2, pp. 791-797, May 2000.
253. Feng Z., Ajarapu V., Maratukulan D. J. A practical minimum load shedding strategy to mitigate voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 13, no. 4, pp. 1285-1291, Nov. 1998.
254. Flatabo N., Ognedal R., Carlsen T. Voltage stability condition in a power transmission system calculated by sensitivity methods // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 4, pp. 1286-1293, Nov. 1990.

255. Freris L.L., Sasson M. Investigation of the load-flow problem // Proc. Inst. Elect. Eng., vol.115, no.10, pp. 1459-1470, Oct. 1968.
256. Galiana F., Banakar M. Relizability inequalities for security constrained load flow variables // IEEE Trans. Circuits Syst., vol.29, no.11, pp. 767-772, Nov. 1982.
257. Galiana F.D., Zeng Z.C. Analysis of the flow behavior near a Jacobian singularity // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 3, Aug. 1992, pp.1362-1369.
258. Gao B., Morison G.K., Kundur P. Voltage stability evaluation using modal analysis // IEEE Trans. Power Syst., vol.7, no.4, pp. 1529-1542, Nov. 1992.
259. Granville S., Mello J. C. O., Melo A. C. G. Application of interior point methods to power flow unsolvability // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 2, pp. 1096-1103, May 1996.
260. Greene S., Dobson I., Alvarado F.L. Sensitivity of the loading margin to voltage collapse with respect to arbitrary parameters // IEEE Trans. Power Syst., vol. 12, no. 1, pp. 262-272, Feb. 1997.
261. Greene S., Dobson I., Alvarado F.L. Contingency ranking for voltage collapse via sensitivities from a single nose curve // IEEE Trans. Power Syst., vol. 14, no. 1, pp. 232-240, Feb. 1999.
262. Gubina F., Strmcnik B. Voltage collapse proximity index determination using voltage phasors approach // IEEE Trans. Power Syst. vol. 10, no. 2, May 1995, pp. 788-794.
263. Gupta R.K., Alaywan Z.A., Stuart R.B., Reece T.A. Steady state voltage instability operations perspective // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 4, pp. 1345-1354, Nov. 1990.
264. Guo T.-y., Schlueter R.A. Identification of generic bifurcation and stability problems in power system differential-algebraic model // IEEE Trans. Power Syst., vol. 9, no. 2, pp. 1032-1044, May 1994.
265. Guoyun C., Hill D.J., Hui R. Continuation of local bifurcations for power system differential-algebraic equation stability model // IEE Proc.-Gen. Transm. Distrib., vol.152, no.4, July 2005, pp. 575-580.

266. Hiskens I. A., Davy R.J. Exploring the power flow solution space boundary // IEEE Trans. Power Syst., vol. 16, no. 3, pp. 389-395, Aug. 2001.
267. Hong Y.-H., Pan C.-T., Lin W.-W. Fast calculation of voltage stability index of power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 12, no. 4, pp.1555-1560, Nov. 1997.
268. Hu Z., Wang X. Efficient computation of maximum loading point by load flow method with optimal multiplier // IEEE Trans. Power Syst., vol. 23, no. 2, pp.804-806, May 2008.
269. Hubbi W., Refsum A. Starting algorithm and modification for Newton-Raphson load flow method // Elec. Power and Energ. Syst. - vol. 5. - no. 3. -pp. 166-172. -July 1983.
270. Hubbi W. Simulation second order load flow // Int. Energy and Commun. Conf. – Canada: Montreal, Oct. 1984. -pp.5-8.
271. Hubbi W. The mismatch theorem and second order load flow algorithms // IEE Proc. - vol. 132. – no.4, pp. 189-194.- July 1985.
272. Iba K., Suzuki H., Egawa M., Watanabe T. A method for finding a pair of multiple load flow solutions in bulk power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 2, pp. 582-591, May 1990.
273. Iba K., Suzuki H., Egawa M., Watanabe T. // Calculation of critical loading condition with nose curve using homotopy continue method // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 2, pp. 584-593, May 1991.
274. Ilic M., Stankovic A. Voltage problems on transmission networks subject to unusual power flow problem // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 1, pp. 339-348, Feb. 1991.
275. Irisarri G.D., Wang X., Tong J., Mokhtari S. Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method // IEEE Trans. Power Syst., vol. 12, no. 1, pp. 162-172, Feb. 1997.
276. Iwamoto S., Nakanishi Y, Tamura Y. A load flow calculation for ill-conditioned power systems // IEEE Trans. PAS. - 1981. vol. 100.- no. 4. -pp. 1763-1981.

277. Iwamoto S., Tamura Y. A fast load flow method retaining nonlinearity // IEEE Trans. PAS. - 1978. – vol. 97. - no. 5. -pp. 1586-1599.
278. Jarjis J., Galina F.D. Quantitative analysis of steady state stability in power systems // IEEE Trans. PAS-100. vol. 100, no. 1. -pp. 318-326, 1981.
279. Jean-Jumeau R., Chiang H.-D. Parameterizations of load flow equations for eliminating ill- conditioning load flow solutions // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 3, pp. 1004-1012, Aug. 1993.
280. Johnson B.K. Extraneous and false load-flow solutions // IEEE Trans. PAS, vol.PAS-96, no. 2, Mar./Apr. 1977, pp. 524-534.
281. Kataoka Y. An approach for the regularization of a power flow solution around the maximum loading point // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 3, pp.1068-1077, Aug. 1992
282. Kataoka Y. A probabilistic nodal loading model and worst case solutions for electric power system voltage stability assessment // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 4, pp. 1507-1514, Nov. 2003.
283. Kataoka Y., Shinoda Y. Voltage stability limit of electric power systems with generator reactive power constraints considered // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no. 2, pp. 951-962, May 2005.
284. Korsak A.J. On the question of uniqueness of stable load-flow solutions // IEEE Trans. PAS, vol.PAS-91, May/June 1972, pp. 1093-1100.
285. Kundur P. Power system stability and control.- N.-Y.: McGraw-Hill, 1994.- 1167 p.
286. Lach W.R., Sutanto D. Voltage instability in interconnected power systems: a simulation approach // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 2, pp. 753-761, May 1992.
287. Lavaei J., Tse D., Zhang B. Geometry of power flows and optimization in distribution networks // IEEE Trans. Power Syst., vol.29, no.2, pp. 572-583, 2014.
288. Lee B.H., Lee K.Y. A study on voltage collapse mechanism in electric power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 3, pp. 966-973, Aug. 1991.

289. Leonardi B., Ajarapu V. Development of multilinear regression models for online voltage stability margin estimation // IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 1, pp. 374-383, Feb. 2011.
290. Lesieutre B.C., Hiskens I.A. Convexity of the set of feasible injections and revenue adequacy in FTR markets // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no. 4, pp. 1790-1798, Nov. 2005.
291. Lie T., Schlueter R.A., Rusche P.A. Method of identifying weak transmission network stability boundaries // IEEE Trans. Power Syst. vol. 8, no. 1, Feb. 1993, pp. 293-301.
292. Lof P-A., Smed T., Andersson G., Hill D.J. Fast calculation of a voltage stability index // IEEE Trans. Power Syst. vol. 7, no. 1, Feb. 1992, pp. 54-64.
293. Lof P-A., Anderson G., Hill D.J. Voltage stability indices for stressed power systems // IEEE Trans. Power Syst. vol. 8, no. 1, Feb. 1993, pp. 326-335.
294. Lu J., Liu C.-W., Thorp J.S. New methods for computing a saddle-node bifurcation point for voltage stability analysis // IEEE Trans. Power Syst. vol. 10, no. 2, May 1995, pp. 978-989.
295. Machowski J., Bialek J.W., Bubbly J.R. Power system dynamics: stability and control.- Chichester: John Wiley & Sons, 2008. -629 p.
296. Makarov Y.V., Dong Z.Y., Hill D. J. On convex of power flow feasibility boundary // IEEE Trans. Power Syst. vol. 23, no. 2, May 2008, pp. 811-813.
297. Mercede F., Chow J.-C., Yan H., Fischl R. A framework to predict voltage collapse in power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 3, no. 4, pp. 1807-1813, Nov. 1988.
298. Milano F. An open source power system analysis Toolbox // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no. 3, pp. 1199-1206, Aug. 2005.
299. Milano F. Power system modeling and scripting. – London: Springer-Verlag, 2010. – 556 p.

300. Milano F., Canizares C.A. Multiobjective optimization for pricing system security in electricity markets // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no.2, pp. 596-604, May 2003.
301. Milano F., Canizares C.A., Conejo A.J. Sensitivity-based security-constrained OPF market clearing model // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no.4, pp. 2051-2060, Nov. 2005.
302. Monticelli A., Garcia A., Saaverdra O.R. Fast decoupled load flow: hypothesis, derivations, and testing // IEEE Transaction on Power System. -1990. - vol. 5. - no. 4. -pp. 1425-1431.
303. Morison G.K., Gao B., Kundur P. Voltage stability analysis using static and dynamic approaches // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 3, pp. 1159-1171, Aug. 1993.
304. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. - Springer Science+Business Media, LLC, 2006. - 664 p.
305. Obadima O.O., Berg G.J. Determination of voltage stability limit in multimachine power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 3, no. 4, Nov. 1988, pp.1545-1554.
306. Ohtsuki H., Yokoyama A., Sekine Y. Reverse action of on-load tap changer in association with voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 5, no. 1, pp. 300-306, Feb. 1991.
307. Overbye T. J. A power flow measure for unsolvable cases // IEEE Trans. Power Syst., vol. 9, no. 3, pp. 1359-1365, Aug. 1994.
308. Overbye T. J. Computation of a practical method to restore power flow solvability // IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, no. 1, pp. 280-287, Feb. 1995.
309. Overbye T. J., Klump R.P. Effective calculation of power system low-voltage solutions // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 1, pp. 75-82, Feb. 1996.
310. Padiyar K.R. Power system dynamics stability and control. - Hyderabad: BS Publications, 2008.- 571 p.
311. Pal M.K. Voltage stability conditions considering load characteristics // IEEE Trans. Power Syst., vol. 7, no. 1, pp. 243-249, Feb. 1992.

312. Pal M.K. Lecture notes on power system stability.- New Jersey: Edison, 2007. – 341 p.
313. Parker C. J., Morison I. F., Sutanto D. Application of an optimization method for determining the reactive margin from voltage collapse in reactive power planning // IEEE Trans. Power Syst., vol. 11, no. 3, pp. 1473-1481, Aug. 1996.
314. Perninge M., Knazkins V., Amelin M., Solder L. Risk estimation of critical time to voltage instability induced by saddle-node bifurcation // IEEE Trans. Power Syst., vol. 25, no. 3, pp. 1600-1610, Aug. 2010.
315. Perninge M., Soder L. On the validity of local approximations of the power system loadability surface // IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 4, pp. 2143-2153, Nov. 2011.
316. Price G.B. A generalized circle diagram approach for global analysis of transmission system performance // IEEE Trans. PAS-103. vol. 103, no. 10. - pp. 2881-2890, 1984.
317. Rabier P.J., Rheinboldt W.C. On a computational method for the second fundamental tensor and its application to bifurcation problems // J. Numer. Math. – vol.57.- 1990.- pp. 681-694.
318. Rao N.P.S., Rao P.K.S., Nanda J. An exact fast load flow method including second order terms in rectangular coordinates // IEE Trans. PAS. - 1982.- vol. 101. - no. 9. - pp. 3261-3268.
319. Rao N.P.S., Rao P.K.S., Nanda J. An empirical criterion for convergence of fast decoupled load flow method // IEE Trans. PAS. - 1984. - vol. 103. - no. 5. -pp. 974-981.
320. Rosehart W. D., Canizares C. A., Quintana V. H. Optimal power flow incorporating voltage collapse constraints // Proc. 1999 IEEE/Power Eng. Soc. Summer Meeting.- pp. 820-825, July 1999.
321. Rosehart W. D., Canizares C. A., Quintana V. H. Effect of detailed power system models in traditional and voltage-stability-constrained optimal

power-flow problems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 1, pp. 27-35, Feb. 2003.

322. Rosehart W. D., Canizares C. A., Quintana V.H. Multiobjective optimal power flows to evaluate voltage security costs in power networks // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 2, pp. 578-587, May 2003.

323. Rosehart W., Roman C., Schellenberg A. Optimal power flow with complementarity constraints // IEEE Trans. Power Syst., vol. 20, no. 2, pp. 813-822, May 2005.

324. Roy L. Exact second order load flow // Proc. 6-th PCC. Darmstadt. - 1978. -no. 2. -pp. 711-718.

325. Sachdev M.S., Medicherla T.K. A second order load flow technique // IEEE Trans. PAS. - 1977. – vol. 96. - no. 1. -pp. 189-195.

326. Sauer P.W. Explicit load flow series and functions // IEEE Trans. PAS. - 1981.- vol. PAS-100. - no. 8. - pp. 3754-3761, Aug. 1981.

327. Sauer P.W., Pai M.A. Power system steady-state stability and the load-flow Jacobian // IEEE Trans. Power Syst. - vol. 5, no. 4, Nov. 1990. pp.1374-1383.

328. Sauer P.W., Pai M.A. Power system dynamics and stability. – New Jersey: Prentice Hall, 1998. - 357 p.

329. Savulescu S.C. (Editor), Real-Time Stability Assessment in Modern Power System Control Centers, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2009, 493 p.

330. Schluter R.A., Hu I., Chang M.W., Lo J.C., Costi A. Methods for determining proximity to voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 1, pp. 285-292, Feb. 1991.

331. Schweppe F.C., Caramanis M.C., Tabors R.D., Bohn R.E. Spot pricing of electricity. - Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1988.- 348 p.

332. Seydel R. From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis.- N.-Y.: Elsevier science publishing Co., 1988.- 367 p.

333. Sode-Yome A., Mihulananthan N., Lee K.Y. A maximum loading margin method for static voltage stability in power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 21, no. 2, May 2006, pp.799-808.
334. Song H., Lee B., Know S.-H. Ajarapu V. Reactive reserve-based contingency constrained optimal power flow (RCCOPF) for enhancement of voltage stability margins // IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 4, Nov. 2003, pp.1538-1546.
335. De Souza A. C. Z., Canizares C. A., Quintana V. H. New techniques to speed up voltage collapse computations using tangent vectors // IEEE Trans. Power Syst., vol. 12, no. 3, Aug. 1997, pp.1380-1387.
336. De Souza A. C. Z., Honorio L.M., Torres G.L., Lambert-Torres G. Increasing the loadability of power systems through optimal-local-control actions // IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 1, Feb. 2004, pp.188-194.
337. Sousa A.A., Torres G.L., Canizares C. A., Robust optimal power flow solution using trust region and interior-point methods // IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 2, pp.487-499, May 2011,
338. Srivastava K. N., Joshi S. K., Singh S.N., Discussion of “Computation of a practical method to restore power flow solvability,” by T. J. Overbye and authors’ closure // IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, no. 1, pp. 280-287, Feb. 1995.
339. Stott B. Effective starting process for Newton-Raphson load flows // Proc. IEE, vol.118, no.8, pp. 983-987, Aug. 1971.
340. Stott B. Decoupled Newton load flow // IEEE Trans. PAS. - 1972.- vol. 91. - no. 3. - pp. 1955-1959.
341. Stott B. Review of load-flow calculation methods // Proc. IEEE, vol.62, no.7, pp. 916-929, July 1974.
342. Stott B., Alsac O. Fast decoupled load flow // IEEE Trans. PAS. - 1974.- vol. 93. - no. 2 - pp. 859-869.
343. Tamura Y., Mory H., Iwamoto S. Relationship between voltage instability and multiple load flow solutions in electric power system // IEEE Trans. PAS-102. – May 1983.- vol. 102. - no. 5. - pp. 1115-1125.

344. Tate J.E., Oberbye T.J. A comparison of the optimal multiplier in polar and rectangular coordinates // IEEE Trans. Power Syst. -2005. - vol.20. - no. 4. - pp. 1667-1674.
345. Tavora C.J., Smith O.J.M. Equilibrium analysis of power systems // IEEE Trans. PAS-91. vol. 91,no. 3. -pp. 1131-1137, 1972.
346. Tinney W.F., Hart C.C. Power flow solution by Newton method // IEEE Trans. PAS. -1967.-vol. 86. – no. 11. -pp. 1449-1460.
347. Tinney W.F., Walker J.W. Direct solution of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization // Proc. IEEE -1967.-vol. 55. – pp. 1801-1809.
348. Tiranuchit A., Ewerbring L.M., Duryea R.A., Thomas R.J., Luk F.T. Towards a computationally feasible on-line voltage instability index // IEEE Trans. Power Syst., vol. 3, no. 2, pp. 669-675, May 1988.
349. Tiranuchit A., Thomas R.J. A posturing strategy against voltage instabilities in electric power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 3, no. 1, pp. 87-93, Feb. 1988.
350. Tripathy S.C., Durga P.G., Malik O.P. Hope G.S. Load flow solution for ill-conditioned power systems by Newton-like method // IEEE Trans. PAS. - 1982.- vol. 101. - no. 10. - pp. 3648-3656.
351. Torres G.L., Quintana V.H. Optimal power flow by a nonlinear complementarity method // IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, no. 3, pp. 1028-1033, Aug. 2000.
352. Tuan T.Q., Fandino J., Hadhsaid N., Sabonnadiere J.C. Emergency load shedding to avoid risk of voltage instability using indicators // IEEE Trans. Power Syst., vol. 9, no. 1, pp. 341-351, Feb. 1994.
353. De Tuglic E., La Scala M. Real-time preventive actions for the enhancement of voltage-degraded trajectories // IEEE Trans. Power Syst., vol. 14, no. 2, May 1999, pp.561-568.

354. Van Amerongen R.A.M. A general-purpose version of the fast decoupled load flow // IEEE Trans. Power Syst., vol. 4, no. 2, May 1989, pp.760-770.
355. Van Cutsem T. A method to compute reactive power margins with respect to voltage collapse // IEEE Trans. Power Syst., vol. 6, no. 1, pp.145-156, Feb. 1991.
356. Van Cutsem T. Voltage instability: Phenomena, countermeasures, and analysis methods // Proc. IEEE, vol. 88, no.2, pp. 208-227, Feb. 2000.
357. Van Cutsem T., Vournas C. Voltage stability of electric power systems.- Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 378 p.
358. Vanderbei R.J. Linear programming: foundations and extensions.- Princeton: Princeton university, 2001.- 450 p.
359. Venikov V.A., Stroeve V.A., Idelchik V.I., Tarasov V.I. Estimation of electrical power system steady state stability in load flow calculations // IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-94, no. 3, pp.1034-1041, May/June 1975.
360. Vournas C.D., Voltage stability and controllability indices for multimachine power systems // IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, no. 3, pp. 1183-1194, Aug. 1995.
361. Wang R., Lasseter R. H. Re-dispatching generation to increase power system security margin and support low voltage bus // IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, no. 2, pp. 496-501, May 2000.
362. Wang X., Ejebe G.C., Tong J., Waight J.G. Preventive/corrective control for voltage stability using direct interior method // IEEE Trans. Power Syst., vol. 13, no. 3, pp. 878-883, Aug. 1998.
363. Wright S.J. Primal-dual interior-point methods. – Siam, 1997. – 290 p.
364. Hie L., Chen Y., Liao H. Distributed online monitoring of quasi-static voltage collapse in multi-area power systems // IEEE Trans. Power Syst. vol. 27, no. 4, Nov. 2012, pp. 2271-2279.

365. Xiong N., Cheng H., Yao L., Gu Y., Ma Z., Zhu Z., Zhang J. Investigation on limit surface in space spanned by generation parameter // IEEE Trans. Power Syst., vol. 25, no. 3, pp. 1309-1318, Aug. 2010.
366. Yorino N., Harada S., Cheng H. A method to approximate a closest loadability limit using multiple load flow solutions // IEEE Trans. Power Syst., vol. 12, no. 1, Feb. 1997, pp.424-429.
367. Yorino N., Li H.-Q., Sasaki H. A predictor/corrector scheme for obtaining q-limit points for power flow studies // IEEE Trans. Power Syst. vol. 20, no. 1, Feb. 2005, pp. 130-137.
368. Zarate L.A., Castro C.A., Ramos J.L.M., Ramos E.R. Fast computation of voltage stability security margins using nonlinear programming techniques // IEEE Trans. Power Syst., vol. 21, no. 1, Feb. 2006, pp.19-27.
369. Zeng Z.C., Galiana F.D., Ooi B.T., Yorino N. A simplified approach to estimate maximum loading conditions in the load flow problem // IEEE Trans. Power Syst., vol. 8, no. 2, May 1993, pp.646-654.
370. Zhang B., Tse D. Geometry of injection regions of power networks // IEEE Trans. Power Syst., vol.28, no.2, pp. 788-797, 2013.
371. Zhang J., Dobson I., Alvarado F.L. Quantifying transmission reliability margin // International Journal of Electric Energy and Power Systems, vol. 26, no. 9, 2004, pp. 697-702.
372. Zimmerman R.D., Murillo-Sanchez C.E., Thomas R.J. Matpower: steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education // IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 1, Feb. 2001, pp.12-19.

Список иллюстративного материала

	Стр.
1.1. Эллипс мощностей УР 2-х узловой ЭС с <i>PV</i> узлами.....	32
1.2. Эллипсы мощностей УР 2-х узловой ЭС при различных параметрах ЛЭП	33
1.3. ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой».....	37
1.4. ГМ; ОСР 3-узловой ЭС с «дыркой» при БУ-3; ОСР при БУ-1 и БУ-2.	38
1.5. ГМ и ОСР 3-х узловой радиальной ЭС.....	40
1.6. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой» при БУ-3; ОСР при БУ-2 и БУ-1. $V_1=V_2=V_3=110$, $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=j70$	42
1.7. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС с «дыркой» при БУ-3; ОСР при БУ-2 и БУ-1, представленные в виде «прозрачной» каркасной поверхности. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=j70$	43
1.8. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=j45$	44
1.9. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС, представленные в виде «прозрачной» каркасной поверхности. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=j45$	45
1.10. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС, $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=31.5+j63$	46
1.11. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС, представленные в виде «прозрачной» каркасной поверхности. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=31.5+j63$	47
1.12. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=20.25+j40.5$	48
1.13. ГМ и ОСР 3-х узловой ЭС, представленные в виде «прозрачной» каркасной поверхности. $Z_{12}=20+j40$, $Z_{13}=Z_{23}=20.25+j40.5$	49
1.14. Линии предельных режимов 4-х узловой кольцевой ЭС.....	50
1.15. ГМ и ОСР 3-х узловой консервативной ЭС.....	51
1.16. 4-х узловая ЭС.....	57
1.17. Эллипс мощностей УР 2-х узловой ЭС и ПР.....	61
1.18. 2-х узловая ЭС	86
1.19. Графики зависимости напряжения и фазового угла от величины потребляемой активной мощности, когда $R=0$ ($\alpha=0$).....	90

	Стр.
1.20. QV – кривые в о.е. для различных значений E	91
1.21. Графики зависимости (а) напряжения и (б) фазового угла от величины активной мощности, при $R=0$ ($\alpha=0$).....	93
1.22. PV – кривые и характеристики АД.....	98
1.23. Графики зависимости относительных приростов потерь мощности от величины активной нагрузки в узле 2 ($R_l/X_l=0.3$).....	100
1.24. Графики зависимости относительных приростов потерь мощности от величины нагрузки в узле 2 ($R_l/X_l=0.3$).....	101
1.25. ОСР 3-х узловой ЭС и ее сегменты с $\partial\pi/\partial P_j < 1$ и $\partial\pi/\partial P_j > 1$	133
1.26. ОСР 4-х узловой кольцевой ЭС и ее сегмент с $\partial\pi/\partial P_j < 1$	133
2.1. 4-х узловая система	166
2.2. PV – кривые	214
2.3. Характеристика генератора с системой АРВ	222
2.4. Внешняя характеристика системы и генератора с АРВ	223
2.5. Моделирование характеристики генератора с АРВ как совокупности стандартных характеристик PV и PQ узлов	224
2.6. Стратегия контроля ограничений.....	225
2.7. Аппроксимация характеристики генератора с АРВ	227
4.1. Гиперповерхность ПР и ковариационный эллипсоид.....	299
4.2. 5-узловая система.....	301
4.3. Определение критического сечения.....	316
4.4. Трехмашинная ЭС и ее область устойчивости	316
5.1. Гиперповерхность ПР Σ 3-х узловой консервативной ЭС, и ближайший ПР в евклидовой норме, когда уравнения потокораспределения не имеют решения.....	329
5.2. Ближайший ПР в евклидовой норме.....	332
5.3. Ближайший ПР в l_∞ -норме.....	336
5.4. Ближайший ПР в l_1 -норме.....	338

Список таблиц

	Стр.
1.1. Параметры ПР 4-х узловой ЭС.....	57
1.2. Параметры ПР 4-х узловой консервативной ЭС.....	59
2.1. Элементы диагональных подматриц матрицы Якоби линеаризованных уравнений вычислительных моделей потокораспределения, редуцированных к форме баланса мощностей в полярной системе координат.....	151
2.2. Число итераций метода Ньютона.....	152
2.3. Общие характеристики тестовых схем.....	153
2.4. Число итераций с плоского старта, ограничения по Q не учитываются	154
2.5. Число итераций после 2-х итераций метода Зейделя, ограничения по Q не учитываются.....	156
2.6. Число итераций при учете ограничений по Q	157
2.7. Число итераций <i>БРН</i> без учета ограничений реактивной мощности.....	171
2.8. Число итераций <i>БРН</i> для утяжеленных режимов без учета ограничений реактивной мощности	172
2.9. Число итераций <i>БРН</i> с учетом ограничений реактивной мощности...	174
2.10. Число итераций <i>БРН</i> для утяжеленных режимов с учетом ограничений реактивной мощности	175
2.11. Количество компонент/итераций, требуемых безитерационным методом Чебышева/модифицированным и обычным методом Ньютона в полярных координатах	187
2.12. Количество компонент/итераций, требуемых безитерационным методом Чебышева/модифицированным и обычным методом Ньютона в прямоугольных координатах	189
2.13. Число итераций γ - метода Ньютона квази-второго порядка без	

	Стр.
учета ограничений реактивной мощности.....	196
2.14. Число итераций γ - метода Ньютона квази-второго порядка при учете ограничений реактивной мощности.....	197
2.15. Число итераций метода Ньютона по параметру	209
2.16. Число итераций метода Ньютона по параметру с ограничением изменений переменных на итерации	212
4.1. Результаты НЛПР-Н метода для 2-х узловой системы.....	292
4.2. Результаты НЛПР-НП метода для 5-узловой системы.....	302
4.3. Результаты вычислений ПР, когда проигнорированы пределы реактивной мощности.....	304
4.4. Результаты вычислений ПР, когда учитываются пределы реактивной мощности.....	305
5.1. Напряжения, углы и собственные векторы для БПР в l_p -норме.....	343
5.2. Мощности узлов для БПР в l_p -норме.....	343
5.3. Напряжения, углы и собственные векторы для БПР в l_{wp} -норме.....	345
5.4. Мощности узлов для БПР в l_{wp} -норме.....	345
5.5. Результаты НЛПР- B_p моделей для IEEE 14-узловой системы.....	363
5.6. Время расчета / количество итераций для НЛПР- B_p моделей.....	362

Приложение А

Кривизна гиперповерхности

К сожалению, в существующих источниках по дифференциальной геометрии [134], [145], а также в других, известных автору, теория поверхности рассматривается лишь для трехмерного пространства, а источники, где излагается многомерный случай, написаны на относительно высоком уровне и представленные в них формулы довольно трудны для практического применения [92], [317].

Рассмотрим случай, когда ГМ представлена в параметрическом виде:

$$Y = F(X). \quad (1)$$

Здесь $X \in R^n$ - вектор, включающий фазовые углы комплекса напряжения всех узлов, кроме базисного узла, и модули напряжения в PQ узлах; $Y \in R^{n+1}$ - вектор, включающий активные мощности всех узлов и реактивные мощности PQ -узлов. Так как, частные производные всех порядков вектор - функции $F(X)$ существуют и непрерывны, система (1) представляет собой гладкое отображение $F: X \in R^n \rightarrow Y \in R^{n+1}$, т.е. параметризованное n -мерное многообразие в $(n+1)$ -пространстве, или другими словами говоря, параметрическое представление гиперповерхности (n -мерная поверхность в $(n+1)$ -пространстве) в координатах $X \in R^n$. Рассмотрим дифференциал выражения (1):

$$dY = [J]dX, \quad (2)$$

где $[J] = [\partial F(X)/\partial X]$ матрица Якоби по вектору параметрических переменных. Матрица $[J]$ является прямоугольной размером $(n+1) \times n$, поэтому всегда найдется ненулевой вектор $\lambda \in R^{n+1}$, отвечающий соотношению

$$\lambda^T [J] = 0. \quad (3)$$

Если выражение (2) умножить слева на вектор строку λ^T , то с учетом (3) можно получить

$$\lambda^T dY = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) есть уравнение касательной гиперплоскости к гиперповерхности (1), а вектор λ в выражениях (3) и (4) – вектор ее нормали. Вектора dY , определяемые (4) есть векторы, касательные к гиперповерхности.

Гиперповерхность можно рассматривать как множество ее линий, поэтому кривизна гиперповерхности может быть определена через кривизну ее линий. Воспользуемся векторным параметрическим заданием кривой на поверхности:

$$Y = Y(t) = F(X(t)), \quad (5)$$

где $t \in I$, I - некоторый интервал оси $R = R^1$, и будем основываться на представлении о линии как траектории движущейся точки (5) на гиперповерхности. Касательным вектором к этой кривой будет вектор, определяемый выражением

$$\dot{Y}(t) = dY(t)/dt = [\partial F/\partial X] dX(t)/dt. \quad (6)$$

Касательные векторы гиперповерхности – это в точности векторы, касательные к кривым на этой гиперповерхности. В общем случае длина касательного вектора $\dot{Y}(t)$ зависит от параметра t . Однако, если в качестве параметра t использовать длину дуги кривой l (так называемый натуральный параметр), тогда длина касательного вектора в любой точке кривой будет всегда равна единице, $\left\| \dot{Y}(l) \right\|_2 = \|dY(l)/dl\|_2 \equiv 1$, где $\| \cdot \|_2$ есть евклидова норма вектора. В этом случае говорят, что кривая $Y = Y(l)$ отнесена к натуральному параметру l .

По определению кривизной $|\chi|$ кривой $Y = Y(l)$ называется длина вектора $d\dot{Y}(l)/dl$, т.е.

$$|\chi| = \left\| d\dot{Y}(l)/dl \right\|_2 = \|d^2Y(l)/dl^2\|_2 = \left\| \ddot{Y}(l) \right\|_2. \quad (7)$$

Кривизной кривой, отнесенной к произвольному параметру t ($Y = Y(t)$), называется кривизна эквивалентной кривой, отнесенная к натуральному параметру l ,

$$Y = Y(t(l)). \quad (8)$$

Воспользовавшись этими определениями, получим выражение для кривизны кривой, заданной параметрическим уравнением (8).

Из формулы (8) вытекает, что $dY/dl = dY/dt \cdot dt/dl$. Но по определению $\|dY/dl\|_2 = 1$, поэтому $dt/dl = 1/\|dY/dt\|_2$ и

$$dY/dl = \frac{1}{\|dY/dt\|_2} dY/dt = \dot{Y}(t) / \left\| \dot{Y}(t) \right\|_2 = T(t). \quad (9)$$

По определению кривизны имеем

$$|\chi| = \|d^2Y(l)/dl^2\|_2 = \|dT(t)/dl\|_2, \quad (10)$$

$$\text{где } dT(t)/dl = dT(t)/dt \cdot dt/dl. \quad (11)$$

Кривизна гиперповерхности определяется через кривизну нормальных сечений гиперповерхности, а именно через кривизну плоских кривых являющихся результатом пересечения гиперповерхности нормальными гиперплоскостями, т.е. плоскостями, проходящих через вектор нормали гиперповерхности λ и соответствующий касательный вектор $T(t)$ гиперповерхности.

Предположим, что каким-то образом задано параметрическое уравнение плоской кривой нормального сечения $Y = Y(t)$ гиперповерхности. Тогда единичному касательному вектору этой кривой будет соответствовать вектор $T(t)$ (9). Так как, вектор $T(t)$ нормирован и его длина равна единице, из дифференцирования тождества $T(t)^T T(t) = 1$ можно получить $2T(t)^T dT(t)/dt = 0$, т.е. вектор $dT(t)/dt$ ортогонален касательному вектору $T(t)$. Но касательному вектору ортогонален также вектор нормали гиперповерхности. Поскольку кривая нормального сечения гиперповерхности является плоской кривой, поэтому вектор $dT(t)/dt$ будет

коллинеарный вектору нормали. Следовательно, величина кривизны нормального сечения поверхности будет равна скалярному произведению единичного вектора нормали $N = \lambda/\|\lambda\|_2$ на вектор $dT(t)/dt \cdot dt/dl$ (11), т.е.

$$\begin{aligned} \chi &= N^T dT(t)/dt \cdot dt/dl = N^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{Y}(t)}{\|\dot{Y}(t)\|_2} \right) / \|\dot{Y}(t)\|_2 = \\ &= \frac{d}{dt} \left(N^T \dot{Y}(t) / \|\dot{Y}(t)\|_2 \right) / \|\dot{Y}(t)\|_2 = \\ &= \frac{1}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2} \left(N^T d\dot{Y}(t)/dt - \frac{N^T \dot{Y}(t) \dot{Y}(t)^T d\dot{Y}(t)/dt}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2} \right) = \frac{N^T d\dot{Y}(t)/dt}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

так как $N^T \dot{Y}(t) = 0$. Учитывая (6), выражение для кривизны нормального сечения примет вид

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{N^T d\dot{Y}(t)/dt}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2} = \frac{1}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2} \frac{d}{dt} (N^T [\partial F / \partial X] dX/dt) = \\ &= \frac{1}{\|\dot{Y}(t)\|_2^2} \left(dX^T/dt [\partial^2 F^T N / \partial X^2] dX/dt + N^T [\partial F / \partial X] d^2 X/dt^2 \right) = \\ &= \frac{dX^T/dt [\partial^2 F^T N / \partial X^2] dX/dt}{dX^T/dt [\partial F / \partial X]^T [\partial F / \partial X] dX/dt}, \end{aligned} \quad (13)$$

поскольку $N^T [\partial F / \partial X] = 0$.

Приложение Б

Вычислительные аспекты реализации метода Ньютона расчета потокораспределения электрических систем

Обычно промышленные и коммерческие программы для расчета УР используют УУР в форме баланса мощностей в полярной системе координат:

$$\Delta P_k = P_k - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_m V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}); \quad (1a)$$

$$\Delta Q_k = Q_k + V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_m V_m (B_{km} \cos \delta_{km} - G_{km} \sin \delta_{km}). \quad (1б)$$

Однако вычисления тригонометрических функций являются вычислительно более затратными, чем обычные математические операции, поэтому для вычисления небалансов мощностей и элементов матрицы Якоби лучше подходит комплексная арифметика. В этом случае, если воспользоваться выражением обменной мощности по ветви:

$$\begin{aligned} S_{km} &= P_{km} + jQ_{km} = U_k (U_m Y_{km})^* = V_k V_m e^{j\delta_{km}} (G_{km} - jB_{km}) = \\ &= V_k V_m (G_{km} - jB_{km}) (\cos \delta_{km} + j \sin \delta_{km}) = \\ &= V_k V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) + jV_k V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}), \end{aligned} \quad (2)$$

УУР можно переписать так

$$\Delta P_k = P_k - V_k^2 G_{kk} - \sum_m P_{km}; \quad (3a)$$

$$\Delta Q_k = Q_k + V_k^2 G_{kk} - \sum_m Q_{km}. \quad (3б)$$

Дифференцирование (2) по зависимым переменным дает:

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_k} = V_k V_m (-G_{km} \sin \delta_{km} + B_{km} \cos \delta_{km}) = -Q_{km};$$

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial \delta_k} = V_k V_m (G_{mk} \sin \delta_{mk} - B_{mk} \cos \delta_{mk}) = Q_{mk};$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial \delta_k} = V_k V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = P_{km};$$

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial \delta_k} = -P_{mk};$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial \delta_m} = -V_k V_m (-G_{km} \sin \delta_{km} + B_{km} \cos \delta_{km}) = Q_{km};$$

$$\frac{\partial P_{mk}}{\partial \delta_m} = -V_k V_m (G_{mk} \sin \delta_{mk} - B_{mk} \cos \delta_{mk}) = -Q_{mk};$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial \delta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = -P_{km};$$

$$\frac{\partial Q_{mk}}{\partial \delta_m} = P_{mk};$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_k} = V_m (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = \frac{P_{km}}{V_k};$$

$$\frac{\partial P_{km}}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \delta_{km} + B_{km} \sin \delta_{km}) = \frac{P_{km}}{V_m};$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_k} = V_m (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) = \frac{Q_{km}}{V_k};$$

$$\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \delta_{km} - B_{km} \cos \delta_{km}) = \frac{Q_{km}}{V_m};$$

Поэтому элементы матрицы Якоби потокораспределения можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} = \sum_m Q_{km}; \quad \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} = -Q_{km}; \quad \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} = -2V_k G_{kk} - \frac{\sum_m P_{km}}{V_k}; \quad \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} = -\frac{P_{km}}{V_m};$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} = -\sum_m P_{km}; \quad \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} = P_{km}; \quad \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} = 2V_k B_{kk} - \frac{\sum_m Q_{km}}{V_k}; \quad \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} = -\frac{Q_{km}}{V_m}.$$

Основной объем вычислений на итерации метода Ньютона связан с решением системы линеаризованных уравнений. Матрица Якоби является разреженной. Анализ элементов матрицы Якоби показывает, что структура матрицы Якоби будет полностью соответствовать матрице узловых проводимостей, если линеаризованные уравнения потокораспределения и переменные группировать и записывать отдельно по узлам, т.е. вначале записываются уравнения для первого узла, затем для второго и т.д., аналогично группируются и переменные [347]. Тогда матрицу Якоби удобно представить в виде микроматриц и работать с ними, как с элементарным объектами, имеющих вид:

диагональная для PQ узла

$$[J]_{kk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} & \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} & \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_m Q_{km} & -2V_k G_{kk} - \frac{\sum_m P_{km}}{V_k} \\ -\sum_m P_{km} & 2V_k B_{kk} - \frac{\sum_m Q_{km}}{V_k} \end{bmatrix}; \quad (4a)$$

недиагональная PQ узел -PQ узел

$$[J]_{km} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} & \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} & \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{km} & -\frac{P_{km}}{V_m} \\ -P_{km} & -\frac{Q_{km}}{V_m} \end{bmatrix}; \quad (4б)$$

недиагональная PQ узел -PV узел

$$[J]_{km} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{km} \\ -P_{km} \end{bmatrix}; \quad (4в)$$

диагональная для PV узла

$$[J]_{kk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_m Q_{km} \end{bmatrix}; \quad (4г)$$

недиагональная PV узел -PQ узел

$$[J]_{km} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} \\ \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{km} \\ -\frac{P_{km}}{V_m} \end{bmatrix}; \quad (4д)$$

недиагональная PV узел -PV узел

$$[J]_{km} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{km} \end{bmatrix}. \quad (4е)$$

Структура матрицы Якоби с микроматрицами (4) полностью совпадает со структурой матрицы узловых проводимостей. Решение СЛУ в обычной форме, без микроматриц, требует наличия сильной диагонали матрицы, т. е. преобладания диагональных элементов $\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k}$ и $\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k}$ над недиагональными. Данное условие не выполняется для режимов, близких к предельным, или при наличии ветвей с большим отношением активного сопротивления к реактивному. Решение СЛУ, записанное в форме микроматриц (4), свободно от указанного недостатка, поскольку в

диагональную микроматрицу входят все собственные производные соответствующего узла, и ее вырожденность определяется значением ее определителя, равного

$$\det[J]_{kk} = \partial \Delta P_k / \partial \delta_k \times \partial \Delta Q_k / \partial V_k - \partial \Delta P_k / \partial V_k \times \partial \Delta Q_k / \partial \delta_k. \quad (5)$$

Определитель (5) обращается в нуль либо при $X = R = 0$, либо при выдаче из узла k предельной мощности, что в большинстве расчетов встречается крайне редко. Практика расчетов УР показала, что это свойство матрицы Якоби делает необязательным частичный или полный выбор ведущих элементов для обеспечения численной устойчивости.

Представление матрицы Якоби в виде микроматриц позволяет достаточно эффективно реализовать технологию работы с разреженными матрицами [23], [66], [72], [169] при решении на итерации линеаризованных уравнений потокораспределения. Упорядочение уравнений и исключаемых неизвестных для сохранения разреженности может вызвать численную неустойчивость работы метода Гаусса, если не контролировать значения ведущих элементов, а это еще больше увеличивает дополнительный объем вычислений. Поэтому при расчете УР в качестве ведущих элементов в методе исключения Гаусса следует использовать диагональные микроматрицы, что обеспечивает приемлемый уровень погрешности, причем порядок исключения неизвестных выбирается исходя только из цели минимизации появления новых ненулевых элементов в процессе триангуляции. Это существенно уменьшает время выбора порядка исключения неизвестных, так как учитывается и сохраняется симметричность (или структурная симметричность) матриц, не требуется дополнительное обеспечение вычислительной устойчивости метода.

Структура матрицы Якоби, представленная в виде микроматриц, определяется структурой графа сети и поэтому остается неизменной на всех итерациях, хотя элементы микроматриц, их размеры (при изменении типа узлов) могут изменяться от итерации к итерации. Поэтому для уменьшения общего времени расчета УР обычно заранее (до итерационного процесса)

выполняется имитация исключения неизвестных с целью определения оптимального порядка исключения неизвестных, фиксируются места и порядок появления новых ненулевых элементов. Установленный таким образом порядок исключения используется затем на каждой итерации при выполнении триангуляции.

Для увеличения быстродействия расчета потокораспределения имитацию исключения неизвестных лучше всего выполнять на графе сети, используя связанные списки, а затем, на основе полученной структуры, сформировать матрицу узловых проводимостей и структуру матрицы Якоби по строкам с упорядочением ненулевых элементов согласно результатам имитации. Хотя это несколько увеличивает объем вычислений подготовительно этапа, однако значительно сокращает полное время расчета за счет уменьшения времени наиболее трудоемкой операции на итерации - триангуляции матрицы Якоби. Как показали результаты вычислительных экспериментов, при таком подходе время выполнения триангуляции примерно соответствует общему времени выполнения прямой и обратной подстановок. Реализация таких рекомендаций позволяет значительно сократить время расчета потокораспределения. Так, например, расчет режима ЕЭС России (число узлов 6223) с учетом пределов реактивной мощности генераторов потребовал чуть больше 0,5 сек и 23 итерации метода Ньютона. При этом полное время подготовительного шага, т.е. имитация триангуляции на графе сети плюс формирование матрицы узловых проводимостей и структуры матрицы Якоби, примерно соответствовало времени выполнения одной итерации метода Ньютона. Для расчета потокораспределения использовались уравнения УР в форме баланса мощностей в полярной системе координат. Для упорядочивания исключения неизвестных использовался алгоритм [66], обеспечивающий минимальное локальное заполнение, и матрица Якоби формировалась и реализовывалась в виде микроматриц.

Приложение В

НСП - функции

НСП-функцией (NCP – Nonlinear Complementarity Problem) называется любая функция $\psi_\mu : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\psi_\mu(a,b)=0 \Leftrightarrow a > 0; b > 0; ab = \mu, \quad (1a)$$

для любого $\mu > 0$, например [351]:

$$\psi_\mu(a,b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}; \quad (1б)$$

$$\psi_\mu(a,b) = a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4\mu}. \quad (1в)$$

Согласно (1), при $\mu \rightarrow 0$ НСП-функция стремится к ступенчатой характеристике. Поэтому с помощью НСП-функций можно моделировать ступенчатую характеристику $Q = Q(V)$ генератора, оснащенного системой АРВ. Например, если учитывается только верхний предел реактивной мощности Q^+ , тогда (1) с

$$a = V^g - V \geq 0; \quad b = Q^+ - Q \geq 0; \quad (2)$$

дает требуемую характеристику реактивной мощности генератора.

Учитывая (2), первые и вторых производные НСП-функции по модулю напряжения и реактивной мощности генератора будут равны:

$$\frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial V} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial V} = \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial V} = -\frac{\partial \psi}{\partial a}; \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Q} = \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial Q} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial Q} = \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial Q} = -\frac{\partial \psi}{\partial b}; \quad (3б)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial V} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} \left(\frac{\partial a}{\partial V} \right)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2}; \quad (3г)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial V \partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial V} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} \frac{\partial a}{\partial V} \frac{\partial b}{\partial Q} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b}; \quad (3д)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Q^2} = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial Q} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} \left(\frac{\partial b}{\partial Q} \right)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2}, \quad (3е)$$

$$\frac{\partial a}{\partial Q} = 0; \quad \frac{\partial b}{\partial Q} = -1; \quad \frac{\partial a}{\partial V} = -1; \quad \frac{\partial b}{\partial V} = 0. \quad (3в)$$

Для функции (1б) можно получить:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}}; \quad (4а)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial b} = 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}}; \quad (4б)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}} + \frac{a^2}{(a^2 + b^2 + 2\mu)^{3/2}} = -\frac{b^2 + 2\mu}{(a^2 + b^2 + 2\mu)^{3/2}}; \quad (4в)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} = \frac{ab}{(a^2 + b^2 + 2\mu)^{3/2}}; \quad (4г)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} = -\frac{a^2 + 2\mu}{(a^2 + b^2 + 2\mu)^{3/2}}. \quad (4д)$$

Аналогично, для функции (1в):

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = 1 - \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}}; \quad (5а)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial b} = 1 + \frac{a - b}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}}; \quad (5б)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = -\frac{1}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} + \frac{(a - b)^2}{((a - b)^2 + 4\mu)^{2/3}} = (-) \frac{4\mu}{((a - b)^2 + 4\mu)^{2/3}}; \quad (5в)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} = \frac{1}{\sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}} - \frac{(a - b)^2}{((a - b)^2 + 4\mu)^{2/3}} = \frac{4\mu}{((a - b)^2 + 4\mu)^{2/3}}; \quad (5г)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} = (-) \frac{4\mu}{((a - b)^2 + 4\mu)^{2/3}}. \quad (5д)$$

Следует отметить, что в точке решения НСР-функции значения переменных a и b положительны, но на итерации они могут принимать отрицательные значения, поэтому $\frac{\partial \psi}{\partial a}, \frac{\partial \psi}{\partial a} \dots \in (0, 2)$.

Приложение Г

Учет ограничений в форме неравенств в базисной системе НЛПР модели

Базисная система (3.5.9) соответствует задаче нелинейного программирования, представленной в общей форме (3.5.1). Согласно (3.5.9) учет ограничений в форме неравенств выполняется за счет корректировки элементов блочных подматриц линеаризованной системы (3.5.7) и ее правой части. Рассмотрим, как учет ограничений типа неравенств формирует элементы подматриц базисной системы и ее правой части в терминах исходных переменных, предполагая, что в задаче присутствуют все ограничения в форме неравенств, представленной в общей форме (3.4.1)-(3.4.10), (3.4.13)|(3.4.14). Если в реальной задаче какого-либо ограничения нет, например, верхнего предела, это отразится просто отсутствием этого предела и соответствующей дополнительной положительной и ее дуальной переменной.

Активная мощность $P_k \in y$ и присутствует:

1) в уравнении баланса активной мощности в узле k

$$\Delta P_k(P_k, \delta, V) = \pm P_k + \sum_m P_{km}(\delta, V) = 0, \quad (1a)$$

где знак «+» соответствует нагрузке, а «-» - генерации, $P_{km}(\delta, V)$ - активная мощность в начале линии km ;

2) в ограничениях

$$P_k^- \leq P_k \leq P_k^+; \quad (1б)$$

3) а также может присутствовать в функции цели

$$f(y) = f(P, P_k, Q). \quad (1в)$$

В дальнейшем для простоты записи нижний индекс k , указывающий номер узла, будем опускать.

Введя неотрицательные вспомогательные переменные с индексом s , представим (1б) в виде ограничений в форме равенства.

$$P - P^+ + s^+ = 0; \quad -P + P^- + s^- = 0. \quad (1г)$$

Поэтому компонентами функции Лагранжа, включающие активную мощность и соответствующие переменные, являются

$$L = f(P, Q) - \mu(\ln s^+ + \ln s^-) + \lambda^+(P - P^+ + s^+) + \lambda^-(-P + P^- + s^-) + \Delta P(\pm P, \delta, V)\lambda^P + \dots \quad (1д)$$

Критерий оптимальности – равенство нулю функции Лагранжа по всем переменным, например

$$\frac{\partial L}{\partial s^+} = -\frac{\mu}{s^+} + \lambda^+ = 0. \quad (1е)$$

В прямодвойственном методе внутренней точки такое уравнение представляется в следующем виде

$$r_1 = \frac{\partial}{\partial s^+} = -\mu + s^+ \lambda^+ = 0. \quad (2а)$$

Поэтому в дальнейшем уравнения, аналогичные (1е), сразу будут записываться в виде (2а). С учетом сказанного, остальные уравнения будут иметь вид:

$$r_2 = \frac{\partial}{\partial s^-} = -\mu + s^- \lambda^- = 0; \quad r_3 = \frac{\partial}{\partial \lambda^+} = P - P^+ + s^+ = 0; \quad (2б)$$

$$r_4 = \frac{\partial}{\partial \lambda^-} = -P + P^- + s^- = 0; \quad r_5 = \frac{\partial}{\partial P} = \nabla_P f + \lambda^+ - \lambda^- \pm \lambda^P = 0; \quad (2в)$$

$$r_6 = \frac{\partial}{\partial \lambda^P} = \Delta P(\pm P, \delta, V) = 0. \quad (2д)$$

В линеаризованной модели уравнения (2) будут иметь вид:

$$s^+ \Delta \lambda^+ + \lambda^+ \Delta s^+ = \mu - s^+ \lambda^+; \quad s^- \Delta \lambda^- + \lambda^- \Delta s^- = \mu - s^- \lambda^-; \quad (3а)$$

$$\Delta P + \Delta s^+ = -P + P^+ - s^+; \quad -\Delta P + \Delta s^- = P - P^- - s^-; \quad (3б)$$

$$\nabla_{P^2}^2 f \Delta P + \Delta \lambda^+ - \Delta \lambda^- \pm \Delta \lambda^P = -\nabla_P f - \lambda^+ + \lambda^- \mp \lambda^P; \quad (3в)$$

$$\pm \Delta P + \sum \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta P}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_6. \quad (3г)$$

Из этой системы можно исключить Δs и $\Delta \lambda^\pm$, выразить ΔP через $\Delta \lambda^P$ и подставить в (3г), т.е. использовать в базисной системе только соответствующее уравнение (3г). Выполним такое преобразование.

Из (3б) можно получить:

$$\Delta s^+ = -P + P^+ - s^+ - \Delta P; \quad \Delta s^- = P - P^- - s^- + \Delta P. \quad (4a)$$

Тогда (3а) с учетом (4а) дает:

$$\Delta \lambda^+ = -\frac{\lambda^+}{s^+} \Delta s^+ + \frac{\mu}{s^+} - \lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (P - P^+ + \Delta P) + \frac{\mu}{s^+}; \quad (4б)$$

$$\Delta \lambda^- = -\frac{\lambda^-}{s^-} \Delta s^- + \frac{\mu}{s^-} - \lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (-P + P^- - \Delta P) + \frac{\mu}{s^-}. \quad (4в)$$

Подставляя (4б)-(4в) в (3в), можно получить

$$\begin{aligned} \nabla_{P^2}^2 f \Delta P + \frac{\lambda^+}{s^+} (P - P^+ + \Delta P) + \frac{\mu}{s^+} - \frac{\lambda^-}{s^-} (-P + P^- - \Delta P) - \frac{\mu}{s^-} \pm \Delta \lambda^P = \\ = -\nabla_P f - \lambda^+ + \lambda^- \mp \lambda^P. \end{aligned} \quad (4г)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\Delta P = \mp d \Delta \lambda^P - \Delta r_6, \quad (4д)$$

где

$$d = \left(\nabla_{P^2}^2 f + \frac{\lambda^+}{s^+} + \frac{\lambda^-}{s^-} \right)^{-1}; \quad (4е)$$

$$\Delta r_6 = d \left[\nabla_P f + \lambda^+ - \lambda^- \pm \lambda^P + \frac{\lambda^+}{s^+} (P - P^+) + \frac{\lambda^-}{s^-} (P - P^-) + \frac{\mu}{s^+} - \frac{\mu}{s^-} \right]. \quad (4ж)$$

Подстановка (4д) в (3г) дает

$$-d \Delta \lambda^P + \sum \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta P}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_6 \pm \Delta r_6. \quad (4з)$$

Таким образом, линеаризованные уравнения (3) участвуют в базисной модели только введением в линеаризованное уравнение баланса активной мощности (4з) переменной $\Delta \lambda^P$ с коэффициентом $-d$ и корректировкой его правой части на величину $\pm \Delta r_6$.

После решения базисной системы и определения $\Delta \lambda^P$ приращения мощности, вспомогательных и двойственных переменных находятся из выражений:

$$\Delta P = \mp d \Delta \lambda^P - \Delta r_6; \quad (5а)$$

$$\Delta s^+ = P^+ - (P + \Delta P) - s^+; \quad \Delta s^- = P + \Delta P - P^- - s^-; \quad (5б)$$

$$\Delta\lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (P + \Delta P - P^+) + \frac{\mu}{s^+}; \quad \Delta\lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (P^- - (P + \Delta P)) + \frac{\mu}{s^-}. \quad (5в)$$

Для переменной реактивной мощности формулы получаются аналогичные, если в (1)-(5) вместо P использовать Q .

Следует отметить, что в некоторых задачах иногда принимается, что реактивная мощность в узле может изменяться только согласованно с активной мощностью, например, с заданным коэффициентом мощности. В этом случае соответствующая часть функции Лагранжа (1д) примет вид

$$L = f(P, Q) - \mu(\ln s^+ + \ln s^-) + \lambda^+(P - P^+ + s^+) + \lambda^-(-P + P^- + s^-) + \Delta P(\pm P, \delta, V)\lambda^P + \Delta Q(\pm P \operatorname{tg} \varphi, \delta, V)\lambda^Q \dots \quad (6а)$$

Поэтому для такого узла уравнения оптимальности (2) будут аналогичны предыдущему случаю. Изменится только уравнение (2в):

$$\frac{\partial}{\partial P} = \nabla_P f + \lambda^+ - \lambda^- \pm \lambda^P \pm \lambda^Q \operatorname{tg} \varphi = r_5 = 0, \quad (6б)$$

и добавится уравнение баланса реактивных мощностей:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^Q} = \Delta Q(\pm P \operatorname{tg} \varphi, \delta, V) = r_7 = 0. \quad (6в)$$

Линеаризация этих уравнений дает:

$$\nabla_{P^2}^2 f \Delta P + \Delta\lambda^+ - \Delta\lambda^- \pm \Delta\lambda^P \pm \operatorname{tg} \varphi \Delta\lambda^Q = -\nabla_P f - \lambda^+ + \lambda^- \mp \lambda^P \mp \lambda^Q \operatorname{tg} \varphi; \quad (6г)$$

$$\pm \operatorname{tg} \varphi \Delta P + \sum \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta Q}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_7. \quad (6д)$$

Подстановка $\Delta\lambda^\pm$ (4б)-(4в) в (6г) дает

$$\begin{aligned} \nabla_{P^2}^2 f \Delta P + \frac{\lambda^+}{s^+} (P - P^+ + \Delta P) + \frac{\mu}{s^+} - \frac{\lambda^-}{s^-} (-P + P^- - \Delta P) - \\ - \frac{\mu}{s^-} \pm \Delta\lambda^P \pm \operatorname{tg} \varphi \Delta\lambda^Q = -\nabla_P f - \lambda^+ + \lambda^- \mp \lambda^P \mp \operatorname{tg} \varphi \lambda^Q, \end{aligned} \quad (6е)$$

из которого следует

$$\Delta P = \mp d \Delta\lambda^P \mp d_L \operatorname{tg} \varphi \Delta\lambda^Q + \Delta r_6, \quad (6ж)$$

где d определяется согласно (4е), и

$$\Delta r_6 = d_L \left[\nabla_P f - \lambda^+ + \lambda^- \pm \lambda^P \pm \lambda^Q \operatorname{tg} \varphi - \frac{\lambda^+}{s^+} (P - P^+) + \frac{\lambda^-}{s^-} (-P + P^-) - \frac{\mu}{s^+} + \frac{\mu}{s^-} \right]. \quad (6з)$$

Подставляя (6ж) в (3г) и (6д), можно получить:

$$-d\Delta\lambda^P - dtg\varphi\Delta\lambda^Q + \sum \frac{\partial\Delta P}{\partial\delta_m}\Delta\delta_m + \sum \frac{\partial\Delta P}{\partial V_m}\Delta V_m = -r_6 \mp \Delta r_6; \quad (6и)$$

$$-dtg\varphi\Delta\lambda^P - dtg\varphi^2\Delta\lambda^P + \sum \frac{\partial\Delta Q}{\partial\delta_m}\Delta\delta_m + \sum \frac{\partial\Delta Q}{\partial V_m}\Delta V_m = -r_7 \mp tg\Delta r_7. \quad (6к)$$

Таким образом, узел в котором реактивная мощность изменяется пропорционально активной мощности, учитывается в базисной системе введением в линеаризованные уравнения баланса активной и реактивной мощности узла (6и)-(6к) компонент $\Delta\lambda^P$ и $\Delta\lambda^Q$ с соответствующими коэффициентами и корректировкой правых частей этих уравнений.

После решения базисной системы, т.е. определения $\Delta\lambda^P$ и $\Delta\lambda^Q$, приращение мощности определяется как

$$\Delta P = \mp d(\Delta\lambda^P + tg\varphi\Delta\lambda^Q) + \Delta r_6. \quad (6л)$$

Приращение вспомогательных и двойственных переменных находятся из уравнений, аналогичных (5б)-(5в)

В прямодвойственном методе внутренней точки компонентами, включающими модуль напряжения с ограничениями, являются

$$L = -\mu(\ln s^+ + \ln s^-) + \lambda^+(V_k - V_k^+ + s^+) + \lambda^-(-V_k + V_k^- + s^-) + \Delta P^T(P, \delta, V)\lambda^P + \Delta Q^T(Q, \delta, V)\lambda^Q + \dots +.$$

Критерий оптимальности – равенство нулю функции Лагранжа по всем переменным:

$$\frac{\partial}{\partial s^+} = -\mu + s^+\lambda^+ = 0 = r_1; \quad \frac{\partial}{\partial s^-} = -\mu + s^-\lambda^- = 0 = r_2; \quad (7а)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^+} = V_k - V_k^+ + s^+ = 0 = r_3; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda^-} = -V_k + V_k^- + s^- = 0 = r_4; \quad (7б)$$

$$\frac{\partial}{\partial V_k} = \lambda^+ - \lambda^- + \sum_m \frac{\partial\Delta P_m}{\partial V_k}\lambda_m^P + \sum_m \frac{\partial\Delta Q_m}{\partial V_k}\lambda_m^Q = r_5 = 0. \quad (7в)$$

Линеаризация (7) дает:

$$s^+\Delta\lambda^+ + \lambda^+\Delta s^+ = \mu - s^+\lambda^+; \quad s^-\Delta\lambda^- + \lambda^-\Delta s^- = \mu - s^-\lambda^-; \quad (8а)$$

$$\Delta V_k + \Delta s^+ = -V_k + V_k^+ - s^+; \quad -\Delta V_k + \Delta s^- = V_k - V_k^- - s^-; \quad (8б)$$

$$\Delta\lambda^+ - \Delta\lambda^- + \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^q \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^q \right) \Delta V_m +$$

$$\sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^q \right) \Delta \delta_m + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^q = -r_5. \quad (8b)$$

Используя (8а)-(8б), можно получить:

$$\Delta s^+ = -V_k + V_k^+ - s^+ - \Delta V_k; \quad \Delta s^- = V_k - V_k^- - s^- + \Delta V_k; \quad (8г)$$

$$\Delta \lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (V_k - V_k^+ + \Delta V_k) + \frac{\mu}{s^+}; \quad \Delta \lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (-V_k + V_k^- - \Delta V_k) + \frac{\mu}{s^-}, \quad (8д)$$

и представить (8в) в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^q + d_V \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^q \right) \Delta V_m +$$

$$\sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^q \right) \Delta \delta_m + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^q = -(r_5 + \Delta r_5), \quad (8е)$$

где

$$d_V = \frac{\lambda^+}{s^+} + \frac{\lambda^-}{s^-}; \quad \Delta r_5 = \frac{\lambda^+}{s^+} (V_k - V_k^+) + \frac{\mu}{s^+} + \frac{\lambda^-}{s^-} (V_k - V_k^-) - \frac{\mu}{s^-}. \quad (8ж)$$

Таким образом, для учета ограничений на модуль напряжения в узле k в базисной модели корректируется соответствующий диагональный элемент в матрице Гессе и правая часть (8е).

После решения базисной системы, т.е. нахождения ΔV_k , изменение соответствующих вспомогательных и двойственных переменных определяются согласно следующим выражениям:

$$\Delta \lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (V_k + \Delta V_k - V_k^+) + \frac{\mu}{s^+}; \quad \Delta \lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (V_k^- - (V_k + \Delta V_k)) + \frac{\mu}{s^-}; \quad (8з)$$

$$\Delta s^+ = V_k^+ - (V_k + \Delta V_k) - s^+; \quad \Delta s^- = V_k + \Delta V_k - V_k^- - s^-. \quad (8и)$$

Рассмотрим моделирование системы АРВ генератора на основе комплементарных ограничений:

$$Q_k^- \leq Q_k \leq Q_k^+; \quad (Q_k - Q_k^-) dV_k \leq 0; \quad (Q_k - Q_k^+) dV_k \leq 0; \quad (9а)$$

где $dV_k = V_k - V_k^0$, а V_k^0 - заданный модуль напряжения в узле k .

Используя вспомогательные переменные, соответствующую часть функции Лагранжа можно представить, как

$$L = -\mu(\ln s_Q^+ + \ln s_Q^- + \ln s_V^+ + \ln s_V^-) + \lambda_Q^+(\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+ + s_Q^+) + \lambda_Q^-(-\mathcal{Q}_k + \mathcal{Q}_k^- + s_Q^-) + \lambda_V^+((\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+)dV_k + s_V^+) + \lambda_V^-((\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-)dV_k + s_V^-) + \Delta\mathcal{Q}_k(-\mathcal{Q}_k, \delta, V)\lambda_k^Q + \Delta P^T(P, \delta, V)\lambda^P + \Delta Q^T(Q, \delta, V)\lambda^Q + \dots + \quad (96)$$

Необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial}{\partial s_Q^+} = -\mu + s_Q^+\lambda_Q^+ = 0 = r_1; \quad \frac{\partial}{\partial s_Q^-} = -\mu + s_Q^-\lambda_Q^- = 0 = r_2; \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_Q^+} = \mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+ + s_Q^+ = 0 = r_3; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_Q^-} = -\mathcal{Q}_k + \mathcal{Q}_k^- + s_Q^- = 0 = r_4; \quad (10б)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{Q}_k} = \lambda_Q^+ - \lambda_Q^- + \lambda_V^+dV_k + \lambda_V^-dV_k - \lambda_k^Q = r_5 = 0; \quad (10в)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_V^+} = -\mu + s_V^+\lambda_V^+ = 0 = r_6; \quad \frac{\partial}{\partial s_V^-} = -\mu + s_V^-\lambda_V^- = 0 = r_7; \quad (10г)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_V^+} = (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+)dV_k + s_V^+ = 0 = r_8; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_V^-} = (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-)dV_k + s_V^- = 0 = r_9; \quad (10д)$$

$$\frac{\partial}{\partial V_k} = \lambda_V^+(\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+) + \lambda_V^-(\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-) + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \lambda_m^P + \sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \lambda_m^Q = r_{10} = 0; \quad (10e)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta\mathcal{Q}_k(-\mathcal{Q}_k, \delta, V) = r_{11} = 0. \quad (10ж)$$

Линеаризованные уравнения (10) можно представить в виде:

$$s_Q^+\Delta\lambda_Q^+ + \lambda_Q^+\Delta s_Q^+ = \mu - s_Q^+\lambda_Q^+; \quad s_Q^-\Delta\lambda_Q^- + \lambda_Q^-\Delta s_Q^- = \mu - s_Q^-\lambda_Q^-; \quad (11a)$$

$$\Delta s_Q^+ + \Delta\mathcal{Q}_k = -\mathcal{Q}_k + \mathcal{Q}_k^+ - s_Q^+; \quad -\Delta\mathcal{Q}_k + \Delta s_Q^- = \mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^- - s_Q^-; \quad (11б)$$

$$\Delta\lambda_Q^+ - \Delta\lambda_Q^- + dV_k(\Delta\lambda_V^+ + \Delta\lambda_V^-) + (\lambda_V^+ + \lambda_V^-)\Delta V - \Delta\lambda_k^Q = -\lambda_Q^+ + \lambda_Q^- - \lambda_V^+dV_k - \lambda_V^-dV + \lambda_k^Q; \quad (11в)$$

$$s_V^+\Delta\lambda_V^+ + \lambda_V^+\Delta s_V^+ = \mu - s_V^+\lambda_V^+; \quad s_V^-\Delta\lambda_V^- + \lambda_V^-\Delta s_V^- = \mu - s_V^-\lambda_V^-; \quad (11г)$$

$$dV_k\Delta\mathcal{Q}_k + (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+)\Delta V_k + \Delta s_V^+ = -(\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+)dV_k - s_V^+; \quad (11д)$$

$$dV_k\Delta\mathcal{Q}_k + (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-)\Delta V_k + \Delta s_V^- = -(\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-)dV_k - s_V^-; \quad (11e)$$

$$(\lambda_V^+ + \lambda_V^-)\Delta\mathcal{Q}_k + (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^+)\Delta\lambda_V^+ + (\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}_k^-)\Delta\lambda_V^- +$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^q \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^q \right) \Delta V_m + \\ & \sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^q \right) \Delta \delta_m + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \Delta \lambda_k^q \\ & + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^q = -r_{10}; \end{aligned} \quad (11\text{ж})$$

$$-\Delta Q_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \Delta V_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_{11}. \quad (11\text{з})$$

Согласно (11б) и (11а),

$$\Delta s_Q^+ = -\Delta Q_k - Q_k + Q_k^+ - s_Q^+; \quad \Delta s_Q^- = \Delta Q_k + Q_k - Q_k^- - s_Q^-; \quad (12\text{а})$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_Q^+ &= -\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta s_Q^+ + \frac{\mu}{s_Q^+} - \lambda_Q^+ = \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+ + s_Q^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} - \lambda_Q^+ = \\ &= \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+}; \end{aligned} \quad (12\text{б})$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_Q^- &= -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta s_Q^- + \frac{\mu}{s_Q^-} - \lambda_Q^- = -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (\Delta Q_k + Q_k - Q_k^- - s_Q^-) + \frac{\mu}{s_Q^-} - \lambda_Q^- = \\ &= -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta Q_k - \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) + \frac{\mu}{s_Q^-}. \end{aligned} \quad (12\text{в})$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_Q^+ - \Delta \lambda_Q^- &= \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-} = \\ &= \left(\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \right) \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-}. \end{aligned} \quad (12\text{г})$$

Согласно (11д)-(11е),

$$\Delta s_V^+ = -dV_k \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^+) \Delta V_k - (Q_k - Q_k^+) dV_k - s_V^+; \quad (12\text{д})$$

$$\Delta s_V^- = -dV_k \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^-) \Delta V_k - (Q_k - Q_k^-) dV_k - s_V^-. \quad (12\text{е})$$

Тогда (11г) с учетом (12д)-(12е) дает:

$$\Delta \lambda_V^+ = -\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} \Delta s_V^+ + \frac{\mu}{s_V^+} - \lambda_V^+ =$$

$$= \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k \Delta Q_k + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) \Delta V_k + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) dV_k + \frac{\mu}{s_V^+}; \quad (12\text{ж})$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^- &= -\frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \Delta s_V^- + \frac{\mu}{s_V^-} - \lambda_V^- = \\ &= \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k \Delta Q_k + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \Delta V_k + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) dV_k + \frac{\mu}{s_V^-}. \end{aligned} \quad (12\text{з})$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^+ + \Delta \lambda_V^- &= \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \right) dV_k \Delta Q_k + \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \right) \Delta V_k + \\ &+ \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \right) dV_k + \frac{\mu}{s_V^+} + \frac{\mu}{s_V^-}. \end{aligned} \quad (12\text{и})$$

Подстановка (12г) и (12и) в (11в) дает:

$$\begin{aligned} &\left[\lambda_V^+ + \lambda_V^- + dV_k \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \right) \right] \Delta V_k + \\ &+ \left[\left(\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \right) + \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \right) dV_k^2 \right] \Delta Q_k - \Delta \lambda_k^Q + \\ &+ \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-} + \\ &+ dV_k \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \right) dV_k + \frac{\mu}{s_V^+} + \frac{\mu}{s_V^-} = \\ &= -\lambda_V^+ + \lambda_Q^- - \lambda_V^+ dV_k - \lambda_V^- dV_k + \lambda_k^Q. \end{aligned} \quad (13\text{а})$$

Отсюда

$$\Delta Q_k = -d_V \Delta V_k + d_\lambda \Delta \lambda_k^Q - \Delta r_{11}, \quad (13\text{б})$$

где

$$d_\lambda = \frac{1}{\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} + \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \right) dV_k^2}; \quad d_V = d_\lambda \times d_Z; \quad (13\text{в})$$

$$d_Z = \lambda_V^+ + \lambda_V^- + dV_k \left(\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) \right); \quad (13\text{г})$$

$$\Delta r_{11} = d_\lambda \left(\begin{aligned} & \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-} \\ & + dV_k \left(\frac{\mu}{s_V^+} + \frac{\mu}{s_V^-} \right) + \lambda_Q^+ - \lambda_Q^- - \lambda_k^Q \end{aligned} \right) + d_V dV_k. \quad (13д)$$

Подстановка (13б) в (11з) дает

$$\sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} + d_V \right) \Delta V_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \Delta V_m - d_\lambda \Delta \lambda_k^Q = -(r_{11} + \Delta r_{11}). \quad (13е)$$

Подстановка (13б) в (12ж)-(12з) дает:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^+ &= \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} ((Q_k - Q_k^+) - dV_k d_V) \Delta V_k + d_\lambda \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k \Delta \lambda_k^Q - \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k \Delta r_{11} + \\ &+ \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) dV_k + \frac{\mu}{s_V^+}; \end{aligned} \quad (13ж)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^- &= \left(\frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) - dV_k d_V \right) \Delta V_k + d_\lambda \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k \Delta \lambda_k^Q - \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k \Delta r_{11} + \\ &+ \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) dV_k + \frac{\mu}{s_V^-}. \end{aligned} \quad (13з)$$

Подстановка (13ж)-(13з) и (13б) в (11ж) дает

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^P + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^Q + D_V \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^P + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^Q \right) \Delta V_m + \\ & + \sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^P + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^Q \right) \Delta \delta_m + \\ & + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^P + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} + d_V \right) \Delta \lambda_k^Q + \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^Q = -(r_{10} + \Delta r_{10}), \end{aligned} \quad (13и)$$

где

$$D_V = d_W - d_\lambda \times d_Z^2; \quad (13к)$$

$$\Delta r_{10} = d_W dV_k + \frac{\mu}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) - d_Z \Delta r_{11}. \quad (13л)$$

где, в свою очередь,

$$d_W = \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k - Q_k^+)^2 + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-)^2; \quad (13м)$$

Таким образом, комплементарные ограничения учитываются в базисной системе скорректированными уравнениями (13е) и (13и).

После решения базисной системы, приращения переменных комплементарных ограничений определяются соотношениями:

$$\Delta Q_k = -d_V \Delta V_k + d_\lambda \Delta \lambda_k^Q - \Delta r_{11}; \quad (14a)$$

$$\Delta \lambda_V^+ = \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (dV_k \Delta Q_k + (Q_k - Q_k^+) (\Delta V_k + dV_k)) + \frac{\mu}{s_V^+}; \quad (14б)$$

$$\Delta \lambda_V^- = \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} [dV_k \Delta Q_k + (Q_k - Q_k^-) (\Delta V_k + dV_k)] + \frac{\mu}{s_V^-}; \quad (14в)$$

$$\Delta s_V^+ = -dV_k \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^+) (\Delta V_k + dV_k) - s_V^+; \quad (14г)$$

$$\Delta s_V^- = -dV_k \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^-) (\Delta V_k + dV_k) - s_V^-; \quad (14д)$$

$$\Delta s_Q^+ = Q_k^+ - (Q_k + \Delta Q_k) - s_Q^+; \quad \Delta s_Q^- = Q_k + \Delta Q_k - Q_k^- - s_Q^-; \quad (14е)$$

$$\Delta \lambda_Q^+ = \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k + \Delta Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+}; \quad \Delta \lambda_Q^- = \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k^- - (Q_k + \Delta Q_k)) + \frac{\mu}{s_Q^-}. \quad (14ж)$$

Теперь рассмотрим моделирование системы АРВ генератора с использованием следующих комплементарных ограничений:

$$Q_k^- \leq Q_k \leq Q_k^+; \quad (15a)$$

$$V_k = V_k^0 + dV_k^- - dV_k^+; \quad dV_k^- \geq 0; \quad dV_k^+ \geq 0; \quad (15б)$$

$$(Q_k - Q_k^-) dV_k^- \leq 0; \quad (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ \leq 0. \quad (15в)$$

Используя вспомогательные переменные, соответствующую часть функции Лагранжа можно представить так

$$\begin{aligned} L = & -\mu (\ln s_Q^+ + \ln s_Q^- + \ln s_V^+ + \ln s_V^- + \ln ds_V^+ + \ln ds_V^-) + \lambda_Q^+ (Q_k - Q_k^+ + s_Q^+) + \\ & + \lambda_Q^- (-Q_k + Q_k^- + s_Q^-) + \lambda_V^+ ((Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ + s_V^+) + \lambda_V^- ((Q_k - Q_k^-) dV_k^- + s_V^-) + \\ & + \lambda_V (V_k - V_k^0 + dV_k^+ - dV_k^-) + d\lambda_V^+ (-dV_k^+ + ds_V^+) + d\lambda_V^- (-dV_k^- + ds_V^-) \\ & + \Delta Q_k (-Q_k, \delta, V) \lambda_k^Q + \Delta P^T (P, \delta, V) \lambda^P + \Delta Q^T (Q, \delta, V) \lambda^Q + \dots +. \end{aligned} \quad (15г)$$

Необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial}{\partial s_Q^+} = -\mu + s_Q^+ \lambda_Q^+ = 0 = r_1; \quad \frac{\partial}{\partial s_Q^-} = -\mu + s_Q^- \lambda_Q^- = 0 = r_2; \quad (16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_Q^+} = Q_k - Q_k^+ + s_Q^+ = 0 = r_3; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_Q^-} = -Q_k + Q_k^- + s_Q^- = 0 = r_4; \quad (16б)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_k} = \lambda_Q^+ - \lambda_Q^- - \lambda_V^+ dV_k^+ + \lambda_V^- dV_k^- - \lambda_k^Q = r_5 = 0; \quad (16в)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_V^+} = -\mu + s_V^+ \lambda_V^+ = 0 = r_6; \quad \frac{\partial}{\partial s_V^-} = -\mu + s_V^- \lambda_V^- = 0 = r_7; \quad (16г)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_V^+} = (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ + s_V^+ = 0 = r_8; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_V^-} = (Q_k - Q_k^-) dV_k^- + s_V^- = 0 = r_9; \quad (16д)$$

$$\frac{\partial}{\partial V_k} = \lambda_V + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \lambda_m^P + \sum_m \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \lambda_m^Q = r_{10} = 0; \quad (16е)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k^Q} = \Delta Q_k(-Q_k, \delta, V) = r_{11} = 0; \quad (16ж)$$

$$\frac{\partial}{\partial ds_V^+} = -\mu + ds_V^+ d\lambda_V^+ = 0 = r_{12}; \quad \frac{\partial}{\partial ds_V^-} = -\mu + ds_V^- d\lambda_V^- = 0 = r_{13}; \quad (16з)$$

$$\frac{\partial}{\partial d\lambda_V^+} = -dV_k^+ + ds_V^+ = r_{14}; \quad \frac{\partial}{\partial d\lambda_V^-} = -dV_k^- + ds_V^- = r_{15}; \quad (16и)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_V} = V_k - V_k^0 + dV_k^+ - dV_k^- = r_{16}; \quad (16к)$$

$$\frac{\partial}{\partial dV_k^+} = \lambda_V + (Q_k^+ - Q_k) d\lambda_V^+ = r_{17}; \quad \frac{\partial}{\partial dV_k^-} = -\lambda_V + (Q_k - Q_k^-) d\lambda_V^- = r_{18}. \quad (16л)$$

Линеаризованные уравнения (16) можно представить в виде:

$$s_Q^+ \Delta \lambda_Q^+ + \lambda_Q^+ \Delta s_Q^+ = \mu - s_Q^+ \lambda_Q^+; \quad s_Q^- \Delta \lambda_Q^- + \lambda_Q^- \Delta s_Q^- = \mu - s_Q^- \lambda_Q^-; \quad (17а)$$

$$\Delta s_Q^+ + \Delta Q_k = -Q_k + Q_k^+ - s_Q^+; \quad -\Delta Q_k + \Delta s_Q^- = Q_k - Q_k^- - s_Q^-; \quad (17б)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_Q^+ - \Delta \lambda_Q^- - dV_k^+ \Delta \lambda_V^+ + dV_k^- \Delta \lambda_V^- - \lambda_V^+ \Delta dV_k^+ + \lambda_V^- \Delta dV_k^- - \Delta \lambda_k^Q = \\ = -\lambda_Q^+ + \lambda_Q^- + \lambda_V^+ dV_k^+ - \lambda_V^- dV_k^- + \lambda_k^Q; \end{aligned} \quad (17в)$$

$$s_V^+ \Delta \lambda_V^+ + \lambda_V^+ \Delta s_V^+ = \mu - s_V^+ \lambda_V^+; \quad s_V^- \Delta \lambda_V^- + \lambda_V^- \Delta s_V^- = \mu - s_V^- \lambda_V^-; \quad (17г)$$

$$-dV_k^+ \Delta Q_k + (Q_k^+ - Q_k) \Delta dV_k^+ + \Delta s_V^+ = -(Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ - s_V^+; \quad (17д)$$

$$dV_k^- \Delta Q_k + (Q_k - Q_k^-) \Delta dV_k^- + \Delta s_V^- = -(Q_k - Q_k^-) dV_k^- - s_V^-; \quad (17е)$$

$$\Delta \lambda_V + \left(\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^P + \frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^Q \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^P + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^Q \right) \Delta V_m +$$

$$+ \sum_m \left(\frac{\partial^2 \Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^p + \frac{\partial^2 \Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^q \right) \Delta \delta_m + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^p + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \Delta \lambda_k^q + \quad (17ж)$$

$$+ \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^q = -r_{10};$$

$$- \Delta Q_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} \Delta V_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_{11}; \quad (17з)$$

$$d\lambda_V^+ \Delta ds_V^+ + ds_V^+ \Delta d\lambda_V^+ = \mu - ds_V^+ d\lambda_V^+; d\lambda_V^- \Delta ds_V^- + ds_V^- \Delta d\lambda_V^- = \mu - ds_V^- d\lambda_V^-; \quad (17и)$$

$$- \Delta dV_k^+ + \Delta ds_V^+ = dV_k^+ - ds_V^+; \quad - \Delta dV_k^- + \Delta ds_V^- = dV_k^- - ds_V^-; \quad (17к)$$

$$\Delta V_k + \Delta dV_k^+ - \Delta dV_k^- = -V_k + V_k^0 - dV_k^+ + dV_k^-; \quad (17л)$$

$$\Delta \lambda_V - d\lambda_V^+ \Delta Q_k + (Q_k^+ - Q_k) \Delta d\lambda_V^+ = -\lambda_V - (Q_k^+ - Q_k) d\lambda_V^+; \quad (17м)$$

$$- \Delta \lambda_V + d\lambda_V^- \Delta Q_k + (Q_k - Q_k^-) \Delta d\lambda_V^- = \lambda_V - (Q_k - Q_k^-) d\lambda_V^-. \quad (17н)$$

Используя (17а)-(17б), можно получить:

$$\Delta s_Q^+ = -\Delta Q_k - Q_k + Q_k^+ - s_Q^+; \quad (18а)$$

$$\Delta s_Q^- = \Delta Q_k + Q_k - Q_k^- - s_Q^-; \quad (18б)$$

$$\Delta \lambda_Q^+ = -\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta s_Q^+ + \frac{\mu}{s_Q^+} - \lambda_Q^+ = \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+}; \quad (18в)$$

$$\Delta \lambda_Q^- = -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta s_Q^- + \frac{\mu}{s_Q^-} - \lambda_Q^- = -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta Q_k - \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) + \frac{\mu}{s_Q^-}. \quad (18г)$$

Следовательно,

$$\Delta \lambda_Q^+ - \Delta \lambda_Q^- = \left(\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \right) \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-}. \quad (18д)$$

Подстановка (18д) в (17в) дает

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \right) \Delta Q_k + \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-} - \\ & - dV_k^+ \Delta \lambda_V^+ + dV_k^- \Delta \lambda_V^- - \lambda_V^+ \Delta dV_k^+ + \lambda_V^- \Delta dV_k^- - \Delta \lambda_k^q = \\ & = -\lambda_Q^+ + \lambda_Q^- + \lambda_V^+ dV_k^+ - \lambda_V^- dV_k^- + \lambda_k^q; \end{aligned} \quad (18е)$$

Согласно (17г)-(17е),

$$\Delta s_V^+ = dV_k^+ \Delta Q_k - (Q_k^+ - Q_k) \Delta dV_k^+ - (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ - s_V^+; \quad (18ж)$$

$$\Delta s_V^- = -dV_k^- \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^-) \Delta dV_k^- - (Q_k - Q_k^-) dV_k^- - s_V^-; \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^+ &= -\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} \Delta s_V^+ + \frac{\mu}{s_V^+} - \lambda_V^+ = \\ &= -\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (dV_k^+ \Delta Q_k - (Q_k^+ - Q_k) \Delta dV_k^+ - (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+) + \frac{\mu}{s_V^+}; \end{aligned} \quad (18и)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^- &= -\frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \Delta s_V^- + \frac{\mu}{s_V^-} - \lambda_V^- = \\ &= \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (dV_k^- \Delta Q_k + (Q_k - Q_k^-) \Delta dV_k^- + (Q_k - Q_k^-) dV_k^-) + \frac{\mu}{s_V^-}. \end{aligned} \quad (18к)$$

Подстановка (18и)-(18к) в (18е) дает

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^{+2} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^{-2} \right) \Delta Q_k - \\ &- (\lambda_V^+ + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^+ (Q_k^+ - Q_k)) \Delta dV_k^+ + (\lambda_V^- + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^- (Q_k - Q_k^-)) \Delta dV_k^- - \Delta \lambda_k^Q + \\ &+ \frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} (Q_k - Q_k^+) + \frac{\mu}{s_Q^+} + \frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} (Q_k - Q_k^-) - \frac{\mu}{s_Q^-} + dV_k^+ (-\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ + \frac{\mu}{s_V^+}) + \\ &+ dV_k^- (\frac{\lambda_V^-}{s_V^-} (Q_k - Q_k^-) dV_k^- + \frac{\mu}{s_V^-}) = -\lambda_Q^+ + \lambda_Q^- + \lambda_V^+ dV_k^+ - \lambda_V^- dV_k^- + \lambda_k^Q. \end{aligned} \quad (18л)$$

Из (17м)-(17н) и (17и) можно получить:

$$\Delta d\lambda_V^+ = -\frac{1}{Q_k^+ - Q_k} (\Delta \lambda_V - d\lambda_V^+ \Delta Q_k + \lambda_V) - d\lambda_V^+; \quad (18м)$$

$$\Delta d\lambda_V^- = -\frac{1}{Q_k - Q_k^-} (-\Delta \lambda_V + d\lambda_V^- \Delta Q_k - \lambda_V) - d\lambda_V^-; \quad (18н)$$

$$\Delta ds_V^+ = -\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \Delta d\lambda_V^+ + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - ds_V^+ = \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} (\Delta \lambda_V - d\lambda_V^+ \Delta Q_k + \lambda_V) + \frac{\mu}{d\lambda_V^+}; \quad (18о)$$

$$\Delta ds_V^- = -\frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \Delta d\lambda_V^- + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - ds_V^- = \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-} (-\Delta \lambda_V + d\lambda_V^- \Delta Q_k - \lambda_V) + \frac{\mu}{d\lambda_V^-}. \quad (18п)$$

Из (17к) с учетом (18о)-(18п) можно получить:

$$\begin{aligned} \Delta dV_k^+ &= \Delta ds_V^+ - dV_k^+ + ds_V^+ = \\ &= \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} (\Delta \lambda_V - d\lambda_V^+ \Delta Q_k + \lambda_V) + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - dV_k^+ + ds_V^+; \end{aligned} \quad (19а)$$

$$\begin{aligned}\Delta dV_k^- &= \Delta ds_V^- - dV_k^- + ds_V^- = \\ &= \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-} (-\Delta\lambda_V + d\lambda_V^- \Delta Q_k - \lambda_V) + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - dV_k^- + ds_V^-. \end{aligned} \quad (19б)$$

Подстановка (19а)-(19б) в (17л) дает

$$\begin{aligned}\Delta V_k + \left(\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-} \right) \Delta\lambda_V - \left(\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{d\lambda_V^+}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{d\lambda_V^+}{Q_k - Q_k^-} \right) \Delta Q_k + \\ + \left(\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-} \right) \lambda_V + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - dV_k^+ + ds_V^+ - \left(\frac{\mu}{d\lambda_V^-} - dV_k^- + ds_V^- \right) = \\ = -V_k + V_k^0 - dV_k^+ + dV_k^-. \end{aligned} \quad (19в)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\lambda_V = -D_1 \Delta V_k + D_2 \Delta Q_k + R_1, \quad (19г)$$

где

$$D_1 = \left(\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-} \right)^{-1}; \quad (19д)$$

$$D_2 = \frac{\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{d\lambda_V^+}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{d\lambda_V^+}{Q_k - Q_k^-}}{\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{1}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{1}{Q_k - Q_k^-}}; \quad (19е)$$

$$R_1 = -\lambda_V + D_1 \left(-\frac{\mu}{d\lambda_V^+} + dV_k^+ - ds_V^+ + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - dV_k^- + ds_V^- - V_k + V_k^0 - dV_k^+ + dV_k^- \right). \quad (19ж)$$

В свою очередь, подстановка (19г) в (19а) - (19б) дает:

$$\begin{aligned}\Delta dV_k^+ &= -\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{D_1}{Q_k^+ - Q_k} \Delta V_k + \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{D_2 - d\lambda_V^+}{Q_k^+ - Q_k} \Delta Q_k + \\ &+ \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{R_1 + \lambda_V}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - dV_k^+ + ds_V^+; \end{aligned} \quad (19з)$$

$$\begin{aligned}\Delta dV_k^- &= \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{D_1}{Q_k - Q_k^-} \Delta V_k - \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{D_2 - d\lambda_V^-}{Q_k - Q_k^-} \Delta Q_k - \\ &- \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{R_1 + \lambda_V}{Q_k - Q_k^-} + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - dV_k^- + ds_V^-. \end{aligned} \quad (19и)$$

Подстановка (19з)-(19и) в (18л) дает

$$\Delta Q_k = D_V^Q \Delta V_k + D_\lambda^Q \Delta \lambda_k^Q + R^Q, \quad (19к)$$

где

$$D_{\lambda}^{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{\mathcal{Q}}^+}{s_{\mathcal{Q}}^+} + \frac{\lambda_{\mathcal{Q}}^-}{s_{\mathcal{Q}}^-} + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^{+2} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^{-2} \\ - \left(\lambda_V^+ + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^+ (Q_k^+ - Q_k) \right) \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{D_2 - d\lambda_V^+}{Q_k^+ - Q_k} \\ - \left(\lambda_V^- + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^- (Q_k - Q_k^-) \right) \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{D_2 - d\lambda_V^-}{Q_k - Q_k^-} \end{pmatrix}^{-1}; \quad (19\text{л})$$

$$D_V^{\mathcal{Q}} = -D_{\lambda}^{\mathcal{Q}} \begin{pmatrix} \left(\lambda_V^+ + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^+ (Q_k^+ - Q_k) \right) \frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{D_1}{Q_k^+ - Q_k} \\ + \left(\lambda_V^- + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^- (Q_k - Q_k^-) \right) \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{D_1}{Q_k - Q_k^-} \end{pmatrix}; \quad (19\text{м})$$

$$R^{\mathcal{Q}} = D_{\lambda}^{\mathcal{Q}} \begin{pmatrix} \left(\lambda_V^+ + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^+ (Q_k^+ - Q_k) \right) \left(\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \frac{R_1 + \lambda_V}{Q_k^+ - Q_k} + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - dV_k^+ + ds_V^+ \right) \\ - \left(\lambda_V^- + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^- (Q_k - Q_k^-) \right) \left(- \frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \frac{R_1 + \lambda_V}{Q_k - Q_k^-} + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - dV_k^- + ds_V^- \right) \\ (Q_k^+ - Q_k) \left(\frac{\lambda_{\mathcal{Q}}^+}{s_{\mathcal{Q}}^+} + \frac{\lambda_V^+}{s_V^+} dV_k^{+2} \right) - \frac{\mu}{s_{\mathcal{Q}}^+} - (Q_k - Q_k^-) \left(\frac{\lambda_{\mathcal{Q}}^-}{s_{\mathcal{Q}}^-} + \frac{\lambda_V^-}{s_V^-} dV_k^{-2} \right) + \frac{\mu}{s_{\mathcal{Q}}^-} \\ - \frac{\mu}{s_V^-} dV_k^- - \frac{\mu}{s_V^+} dV_k^+ - \lambda_{\mathcal{Q}}^+ + \lambda_{\mathcal{Q}}^- + \lambda_V^+ dV_k^+ - \lambda_V^- dV_k^- + \lambda_k^{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}. \quad (19\text{н})$$

Подстановка (19к) в (19г) дает

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_V &= -D_1\Delta V_k + D_2(D_V^{\mathcal{Q}}\Delta V_k + D_{\lambda}^{\mathcal{Q}}\Delta\lambda_k^{\mathcal{Q}} + R^{\mathcal{Q}}) + R_1 = \\ &= D_V^V\Delta V_k + D_{\lambda}^V\Delta\lambda_k^{\mathcal{Q}} + R^V, \end{aligned} \quad (19\text{о})$$

где

$$D_V^V = -D_1 + D_2D_V^{\mathcal{Q}}; \quad D_{\lambda}^V = D_2D_{\lambda}^{\mathcal{Q}}; \quad R^V = D_2R^{\mathcal{Q}} + R_1. \quad (19\text{п})$$

Подстановка (19о) в (17ж) дает

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2\Delta P_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^P + \frac{\partial^2\Delta Q_k}{\partial V_k^2} \lambda_k^{\mathcal{Q}} + D_V^V \right) \Delta V_k + \sum_{m \neq k} \left(\frac{\partial^2\Delta P_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^P + \frac{\partial^2\Delta Q_m}{\partial V_k \partial V_m} \lambda_m^{\mathcal{Q}} \right) \Delta V_m + \\ &+ \sum_m \left(\frac{\partial^2\Delta P_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^P + \frac{\partial^2\Delta Q_m}{\partial V_k \partial \delta_m} \lambda_m^{\mathcal{Q}} \right) \Delta \delta_m + \sum_m \frac{\partial \Delta P_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^P + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} + D_{\lambda}^V \right) \Delta \lambda_k^{\mathcal{Q}} + \\ &+ \sum_{m \neq k} \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial V_k} \Delta \lambda_m^{\mathcal{Q}} = -(r_{10} + R^V). \end{aligned} \quad (20\text{а})$$

В свою очередь, подстановка (19к) в (17з) дает

$$\sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \left(\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} - D_V^Q \right) \Delta V_k + \sum \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} \Delta V_m - D_\lambda^Q \Delta \lambda_k^Q = -r_{11} + R^Q. \quad (20б)$$

Таким образом, ограничения реактивной мощности генераторов учитываются в базисной системе только скорректированными уравнениями (20).

После решения базисной системы, приращение переменных комплементарных ограничений определяются выражениями:

$$\Delta Q_k = D_V^Q \Delta V_k + D_\lambda^Q \Delta \lambda_k^Q + R^Q; \quad \Delta \lambda_V = -D_1 \Delta V_k + D_2 \Delta Q_k + R_1; \quad (21а)$$

$$\Delta s_Q^+ = -\Delta Q_k - Q_k + Q_k^+ - s_Q^+; \quad \Delta s_Q^- = \Delta Q_k + Q_k - Q_k^- - s_Q^-; \quad (21б)$$

$$\Delta \lambda_Q^+ = -\frac{\lambda_Q^+}{s_Q^+} \Delta s_Q^+ + \frac{\mu}{s_Q^+} - \lambda_Q^+; \quad \Delta \lambda_Q^- = -\frac{\lambda_Q^-}{s_Q^-} \Delta s_Q^- + \frac{\mu}{s_Q^-} - \lambda_Q^-; \quad (21в)$$

$$\Delta d\lambda_V^+ = -\frac{1}{Q_k^+ - Q_k} (\Delta \lambda_V - d\lambda_V^+ \Delta Q_k + \lambda_V) - d\lambda_V^+; \quad (21г)$$

$$\Delta d\lambda_V^- = -\frac{1}{Q_k - Q_k^-} (-\Delta \lambda_V + d\lambda_V^- \Delta Q_k - \lambda_V) - d\lambda_V^-; \quad (21д)$$

$$\Delta ds_V^+ = -\frac{ds_V^+}{d\lambda_V^+} \Delta d\lambda_V^+ + \frac{\mu}{d\lambda_V^+} - ds_V^+; \quad \Delta ds_V^- = -\frac{ds_V^-}{d\lambda_V^-} \Delta d\lambda_V^- + \frac{\mu}{d\lambda_V^-} - ds_V^-; \quad (21е)$$

$$\Delta dV_k^+ = \Delta ds_V^+ - dV_k^+ + ds_V^+; \quad \Delta dV_k^- = \Delta ds_V^- - dV_k^- + ds_V^-; \quad (21ж)$$

$$\Delta s_V^+ = dV_k^+ \Delta Q_k - (Q_k^+ - Q_k) \Delta dV_k^+ - (Q_k^+ - Q_k) dV_k^+ - s_V^+; \quad (21з)$$

$$\Delta s_V^- = -dV_k^- \Delta Q_k - (Q_k - Q_k^-) \Delta dV_k^- - (Q_k - Q_k^-) dV_k^- - s_V^-; \quad (21и)$$

$$\Delta \lambda_V^+ = -\frac{\lambda_V^+}{s_V^+} \Delta s_V^+ + \frac{\mu}{s_V^+} - \lambda_V^+; \quad \Delta \lambda_V^- = -\frac{\lambda_V^-}{s_V^-} \Delta s_V^- + \frac{\mu}{s_V^-} - \lambda_V^-. \quad (21к)$$

В исходной модели ограничение потока активной мощности по сечению представляется соотношениями:

$$\Delta P_C(P_C, V, \delta) = P_C(V, \delta) - P_C = 0; \quad P_C^- \leq P_C \leq P_C^+,$$

где $P_C(V, \delta)$ - нелинейная функция потока активной мощности от модулей и углов напряжения входящих в сечение линий. Тогда в методе внутренней точки ограничение по активной мощности сечения учитывается в функции Лагранжа следующим образом

$$L = -\mu(\ln s^+ + \ln s^-) + \lambda^+(P_C - P_C^+ + s^+) + \lambda^-(-P_C + P_C^- + s^-) + \Delta P_C(P_C, \delta, V)\lambda^C + \dots$$

Соответствующие условия оптимальности можно записать:

$$r_1 = \frac{\partial}{\partial s^+} = -\mu + s^+\lambda^+ = 0; \quad r_2 = \frac{\partial}{\partial s^-} = -\mu + s^-\lambda^- = 0; \quad (22a)$$

$$r_3 = \frac{\partial}{\partial \lambda^+} = P_C - P_C^+ + s^+ = 0; \quad r_4 = \frac{\partial}{\partial \lambda^-} = -P_C + P_C^- + s^- = 0; \quad (22б)$$

$$r_5 = \frac{\partial}{\partial P_C} = \lambda^+ - \lambda^- + \lambda^C = 0; \quad r_6 = \frac{\partial}{\partial \lambda^C} = \Delta P_C(P_C, \delta, V) = 0. \quad (22в)$$

Линеаризация (22) дает:

$$s^+\Delta\lambda^+ + \lambda^+\Delta s^+ = \mu - s^+\lambda^+; \quad s^-\Delta\lambda^- + \lambda^-\Delta s^- = \mu - s^-\lambda^-; \quad (23a)$$

$$\Delta P_C + \Delta s^+ = -P_C + P_C^+ - s^+; \quad -\Delta P_C + \Delta s^- = P_C - P_C^- - s^-; \quad (23б)$$

$$\Delta\lambda^+ - \Delta\lambda^- + \Delta\lambda^C = -\lambda^+ + \lambda^- + \lambda^C; \quad (23в)$$

$$\Delta P_C + \sum \frac{\partial \Delta P_C}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta P_C}{\partial V_m} \Delta V_m = -r_6. \quad (23г)$$

Согласно (23a)-(23б),

$$\Delta s^+ = -P_C + P_C^+ - s^+ - \Delta P_C; \quad \Delta s^- = P_C - P_C^- - s^- + \Delta P_C; \quad (23д)$$

$$\Delta\lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} \Delta s^+ + \frac{\mu}{s^+} - \lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (P_C - P_C^+ + \Delta P_C) + \frac{\mu}{s^+}; \quad (23е)$$

$$\Delta\lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} \Delta s^- + \frac{\mu}{s^-} - \lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (-P_C + P_C^- - \Delta P_C) + \frac{\mu}{s^-}. \quad (23ж)$$

Подстановка (23е)-(23ж) в (23в) дает

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^+}{s^+} (P_C - P_C^+ + \Delta P_C) + \frac{\mu}{s^+} - \frac{\lambda^-}{s^-} (-P_C + P_C^- - \Delta P_C) - \frac{\mu}{s^-} + \Delta\lambda^C = \\ & = -\lambda^+ + \lambda^- - \lambda^C, \end{aligned} \quad (23з)$$

или

$$\Delta P_C = -d_C \Delta\lambda^C + \Delta r_6, \quad \text{где} \quad (23и)$$

$$d_C = \left(\frac{\lambda^+}{s^+} + \frac{\lambda^-}{s^-} \right)^{-1}; \quad (23к)$$

$$\Delta r_6 = d_C \left[\lambda^+ - \lambda^- + \lambda^C - \frac{\lambda^+}{s^+} (P_C - P_C^+) - \frac{\lambda^-}{s^-} (P_C - P_C^-) - \frac{\mu}{s^+} + \frac{\mu}{s^-} \right]. \quad (23л)$$

Подстановка (23и) в (23г) дает

$$-d_C \Delta\lambda^C + \sum \frac{\partial \Delta P_C}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta P_C}{\partial V_m} \Delta V_m = -(r_6 + \Delta r_6). \quad (23м)$$

После решения базисной системы и определения $\Delta\lambda^C$, приращение мощности, вспомогательных и двойственных переменных находятся из выражений:

$$\Delta P_C = -d_C \Delta\lambda^C + \Delta r_6; \quad (24a)$$

$$\Delta s^+ = -P_C + P_C^+ - s^+ - \Delta P_C; \quad \Delta s^- = P_C - P_C^- - s^- + \Delta P_C; \quad (24б)$$

$$\Delta\lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (P_C - P_C^+ + \Delta P_C) + \frac{\mu}{s^+}; \quad \Delta\lambda^- = \frac{\lambda^-}{s^-} (-P_C + P_C^- - \Delta P_C) + \frac{\mu}{s^-}. \quad (24в)$$

Предположим, что в исходной модели ограничение по току в линии представляется выражениями:

$$I_l \leq I_l^+; \quad (25a)$$

$$\Delta I_l(I_l, V, \delta) = I_l(V, \delta) - I_l = 0. \quad (25б)$$

Тогда в методе внутренней точки ограничение по току в линии учитывается в функции Лагранжа следующим образом

$$L = -\mu \ln s^+ + \lambda^+ (I_l - I_l^+ + s^+) + \Delta I_l(I_l, \delta, V) \lambda^l + \dots \quad (25в)$$

Соответствующие условия оптимальности можно записать как:

$$r_1 = \frac{\partial}{\partial s^+} = -\mu + s^+ \lambda^+ = 0; \quad r_2 = \frac{\partial}{\partial \lambda^+} = I_l - I_l^+ + s^+ = 0; \quad (25г)$$

$$r_3 = \frac{\partial}{\partial I_l} = \lambda^+ - \lambda^- + \lambda^l = 0; \quad r_4 = \frac{\partial}{\partial \lambda^l} = \Delta I_l(I_l, \delta, V) = 0. \quad (25д)$$

Аналогично выводу предыдущих формул можно получить, что ограничения по току в линии учитываются в базисной модели корректировкой линеаризованного уравнения (25б):

$$-d_l \Delta\lambda^l + \sum \frac{\partial \Delta I_l}{\partial \delta_m} \Delta \delta_m + \sum \frac{\partial \Delta I_l}{\partial V_m} \Delta V_m = -(r_4 + \Delta r_4), \text{ где} \quad (25е)$$

$$d_l = \left(\frac{\lambda^+}{s^+} \right)^{-1}; \quad \Delta r_4 = d_l \left[\lambda^+ + \lambda^l - \frac{\lambda^+}{s^+} (I_l - I_l^+) - \frac{\mu}{s^+} \right]. \quad (25ж)$$

После решения базисной системы и определения $\Delta\lambda^l$, приращения величины тока, вспомогательной и двойственной переменных находятся из выражений:

$$\Delta I_l = -d_l \Delta\lambda^l + \Delta r_4; \quad (25з)$$

$$\Delta s^+ = I_l^+ - (I_l + \Delta I_l) - s^+; \quad \Delta\lambda^+ = \frac{\lambda^+}{s^+} (I_l + \Delta I_l - I_l^+) + \frac{\mu}{s^+}. \quad (25и)$$

Приложение Д

Доказательство p -неравенства

Утверждение: l_p -нормы удовлетворяют неравенству

$$\|Y\|_{p_k} \leq \|Y\|_{p_m} \text{ для всех } p_k > p_m. \quad (1)$$

Доказательство. Неравенство (1) является частным случаем следствия следующей леммы.

Лемма. Пусть V – векторное пространство над полем F (\mathbb{R} или \mathbb{C}). Функция, определенная выражением

$$\|Y\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |Y_k|^p}, \quad (2)$$

где $Y \in V$ и $p \in \mathbb{R}$, является непрерывно дифференцируемой относительно параметра p для всех векторов $Y \in V$ и $p \neq 0$, и ее производная неположительная величина

$$d\|Y\|_p/dp \leq 0 \text{ для всех } Y \in V \text{ и } p \neq 0. \quad (3)$$

Доказательство леммы. Дифференцирование логарифма (2) относительно параметра p позволяет получить следующее выражение для производной

$$d\|Y\|_p/dp = -\frac{\|Y\|_p}{p^2 \sum_k |Y_k|^p} \sum_k |Y_k|^p \left(\ln \sum_m |Y_m|^p - \ln |Y_k|^p \right). \quad (4)$$

Так как $\ln \sum_m |Y_m|^p \geq \ln |Y_k|^p$, (3) следует из (4).

Для доказательства непрерывной дифференцируемости (2) удобно рассмотреть отдельно два случая, а именно - когда $p > 0$ и $p < 0$.

В первом случае удобно переписать (4) следующим образом:

$$d\|Y\|_p/dp = -\frac{\|Y\|_p \ln \|Y\|_p}{p} + \frac{\|Y\|_p}{p^2 \sum_k |Y_k|^p} \sum_k |Y_k|^p \ln |Y_k|^p. \quad (5)$$

Когда $Y_k = 0$, во втором слагаемом (5) появляется неопределенность $\lim_{|Y_k| \rightarrow 0} |Y_k|^p \ln |Y_k|^p = 0^p \cdot \ln 0^p = 0 \cdot (-\infty)$. Использование правила Лопиталья дает

$\lim_{|Y_k| \rightarrow 0} |Y_k|^p \ln|Y_k|^p = 0$. Поэтому, когда $p > 0$, производная (4) существует с любым вектором Y , и $d\|Y\|_p/dp = 0$, когда $Y=0$.

Во втором случае удобно переписать (4) следующим образом:

$$d\|Y\|_p/dp = -\frac{\|Y\|_p \ln\|Y\|_p}{p} + \frac{1}{p} \sum_k \frac{|Y_k|^p}{\sum_m |Y_m|^p} \|Y\|_p \ln|Y_k|. \quad (6)$$

Если $p < 0$ и $Y_k = 0$, тогда $\|Y\|_p = 0$ и $|Y_k|^p = \infty$. Поэтому больше неопределенностей возникает в (6). Использование правила Лопиталья для первого слагаемого дает $\lim_{\|Y\|_p \rightarrow 0} \|Y\|_p \ln\|Y\|_p = 0$. Для множителей второго слагаемого имеются следующие неравенства $|Y_k|^p / \sum_m |Y_m|^p < 1$, и $\|Y\|_p \ln|Y_k| < |Y_k| \ln|Y_k|$, когда $p < 0$. Использование правила Лопиталья для последнего выражения дает $\|Y\|_p \ln|Y_k| = 0$, когда $Y_k = 0$. Поэтому, когда $p < 0$, производная (4) также существует с любым вектором Y , и $d\|Y\|_p/dp = 0$, когда $Y=0$.

Поскольку производная (4) существует с любым Y для всех $p \neq 0$, функция (2) непрерывно дифференцируема относительно параметра p для всех $p \neq 0$. Лемма доказана.

Следствие. Для функций, определенных выражением (2), выполняется следующее соотношение

$$\|Y\|_{p_k} \leq \|Y\|_{p_m} \text{ для всех } Y \in V \text{ и } p_k > p_m : p_k p_m > 0. \quad (7)$$

Приложение Е

Расчетные выражения НЛПР- $B_{W\infty}$ модели

Исходная задача:

$$\min t \quad (1a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + tdY) = 0; \quad (1б)$$

$$C_k dY_k - 1 \leq 0, \quad k \in SC; \quad (1в)$$

$$-C_k dY_k - 1 \leq 0, \quad k \in SC; \quad (1г)$$

$$tdY_k - dY_k^M \leq 0, \quad k \in SC; \quad (1д)$$

$$dY_k^m - tdY_k \leq 0, \quad k \in SC. \quad (1е)$$

где dY_k^m и dY_k^M - соответственно нижний и верхний пределы изменения управляющего воздействия tdY_k ; C_k - его весовой коэффициент в норме.

Модифицированная задача будет:

$$\min t \quad (2a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + tdY) = 0; \quad (2б)$$

$$C_k dY_k - 1 + S_k^+ = 0; \quad (2в)$$

$$-C_k dY_k - 1 + S_k^- = 0; \quad (2г)$$

$$S_k^+ \geq 0; \quad (2д)$$

$$S_k^- \geq 0; \quad (2е)$$

$$tdY_k - dY_k^M + S_k^M = 0, \quad S_k^M \geq 0; \quad (2ж)$$

$$dY_k^m - tdY_k + S_k^m = 0, \quad S_k^m \geq 0. \quad (2з)$$

Функцию Лагранжа этой задачи можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}
L = & t + \Delta F(X, Y + tdY)^T \lambda + \sum_{k \in SC} \gamma_k^+ (C_k dY_k - 1 + S_k^+) + \sum_{k \in SC} \gamma_k^- (-C_k dY_k - 1 + S_k^-) + \\
& + \sum_{k \in SC} \gamma_k^M (tdY_k - dY_k^M + S_k^M) + \sum_{k \in SC} \gamma_k^m (dY_k^m - tdY_k + S_k^m) - \\
& - \mu \sum (\ln S_k^+ + \ln S_k^- + \ln S_k^M + \ln S_k^m).
\end{aligned} \quad (3)$$

Необходимыми условиями оптимальности первого порядка являются следующие уравнения:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + tdY) = 0; \quad (4a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (4б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum_{k \in SC} (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) dY_k = 0; \quad (4в)$$

$$\nabla_{dY_k} L = t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) + C_k \gamma_k^+ - C_k \gamma_k^- = 0; \quad (4г)$$

$$\partial L / \partial \gamma_k^+ = C_k dY_k - 1 + S_k^+ = 0; \quad (4д)$$

$$\partial L / \partial \gamma_k^- = -C_k dY_k - 1 + S_k^- = 0; \quad (4е)$$

$$\partial L / \partial S_k^+ = \gamma_k^+ - \mu / S_k^+ = 0; \quad (4ж)$$

$$\partial L / \partial S_k^- = \gamma_k^- - \mu / S_k^- = 0; \quad (4з)$$

$$\partial L / \partial \gamma_k^M = tdY_k - dY_k^M + S_k^M = 0; \quad (4и)$$

$$\partial L / \partial \gamma_k^m = dY_k^m - tdY_k + S_k^m = 0; \quad (4к)$$

$$\partial L / \partial S_k^M = \gamma_k^M - \mu / S_k^M = 0; \quad (4л)$$

$$\partial L / \partial S_k^m = \gamma_k^m - \mu / S_k^m = 0. \quad (4м)$$

Перепишем эти уравнения в порядке дальнейшего использования:

$$r_1 = C_k dY_k - 1 + S_k^+ = 0; \quad (5a)$$

$$r_2 = -C_k dY_k - 1 + S_k^- = 0; \quad (5б)$$

$$r_3 = \gamma_k^+ S_k^+ - \mu = 0; \quad (5в)$$

$$r_4 = \gamma_k^- S_k^- - \mu = 0; \quad (5г)$$

$$r_5 = t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) + C_k \gamma_k^+ - C_k \gamma_k^- = 0; \quad (5д)$$

$$r_6 = \Delta F_k(X, Y_k + tdY_k) = 0; \quad (5е)$$

$$r_7 = 1 + \sum_{k \in SC} (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) dY_k = 0; \quad (5ж)$$

$$r_8 = tdY_k - dY_k^M + S_k^M = 0; \quad (5з)$$

$$r_9 = dY_k^m - tdY_k + S_k^m = 0; \quad (5и)$$

$$r_{10} = S_k^M \gamma_k^M - \mu = 0; \quad (5к)$$

$$r_{11} = S_k^m \gamma_k^m - \mu = 0. \quad (5л)$$

Их линеаризованные уравнения будут следующие:

$$C_k \Delta dY_k + \Delta S_k^+ = -C_k dY_k + 1 - S_k^+; \quad (6a)$$

$$-C_k \Delta dY_k + \Delta S_k^- = C_k dY_k + 1 - S_k^-; \quad (6б)$$

$$\gamma_k^+ \Delta S_k^+ + \Delta \gamma_k^+ S_k^+ = -\gamma_k^+ S_k^+ + \mu; \quad (6в)$$

$$\gamma_k^- \Delta S_k^- + \Delta \gamma_k^- S_k^- = -\gamma_k^- S_k^- + \mu; \quad (6г)$$

$$t(\Delta \lambda_k + \Delta \gamma_k^M - \Delta \gamma_k^m) + \Delta t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) + C_k(\Delta \gamma_k^+ - \Delta \gamma_k^-) = \\ = -t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) - C_k \gamma_k^+ + C_k \gamma_k^-; \quad (6д)$$

$$\frac{\partial \Delta F_k}{\partial X} \Delta X + t \Delta dY_k + \Delta t dY_k = -\Delta F_k; \quad (6е)$$

$$\sum_{k \in SC} ((\Delta \lambda_k + \Delta \gamma_k^M - \Delta \gamma_k^m) dY_k + (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) \Delta dY_k) = -r_7; \quad (6ж)$$

$$\Delta t dY_k + t \Delta dY_k + \Delta S_k^M = -t dY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (6з)$$

$$- \Delta t dY_k - t \Delta dY_k + \Delta S_k^m = -dY_k^m + t dY_k - S_k^m; \quad (6и)$$

$$\Delta S_k^M \gamma_k^M + S_k^M \Delta \gamma_k^M = \mu - S_k^M \gamma_k^M; \quad (6к)$$

$$\Delta S_k^m \gamma_k^m + S_k^m \Delta \gamma_k^m = \mu - S_k^m \gamma_k^m. \quad (6л)$$

Из (6а)-(6б) следует:

$$\Delta S_k^+ = -C_k \Delta dY_k - C_k dY_k + 1 - S_k^+; \quad (7а)$$

$$\Delta S_k^- = C_k \Delta dY_k + C_k dY_k + 1 - S_k^-. \quad (7б)$$

Подстановка (7а)-(7б) в (6в)-(6г) дает:

$$\Delta \gamma_k^+ = \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} (C_k \Delta dY_k + C_k dY_k - 1) + \frac{\mu}{S_k^+};$$

$$\Delta \gamma_k^- = \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} (-C_k \Delta dY_k - C_k dY_k - 1) + \frac{\mu}{S_k^-}. \quad (7в)$$

Поэтому

$$\Delta \gamma_k^+ - \Delta \gamma_k^- = \frac{\mu}{S_k^+} - \frac{\mu}{S_k^-} + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) (C_k \Delta dY_k + C_k dY_k) - \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-}. \quad (7г)$$

Из (6з)-(6и) можно получить:

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (7д)$$

$$\Delta S_k^m = \Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k - S_k^m. \quad (7е)$$

Подстановка (7д)-(7е) в (6к)-(6л) дает:

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (-\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M); \quad (7ж)$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (\Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k). \quad (7з)$$

Поэтому

$$\Delta\gamma_k^M - \Delta\gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (\Delta t dY_k + t \Delta dY_k + t dY_k) - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m. \quad (7и)$$

Подстановка (7г) и (7и) в (6д) дает

$$\Delta dY_k = \left[\begin{array}{l} -t \Delta \lambda_k - \Delta t \left[\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k \right] - \\ -t \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m \right] - \\ -C_k \left[\frac{\mu}{S_k^+} - \frac{\mu}{S_k^-} + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k dY_k - \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right] - \\ -t (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) - C_k \gamma_k^+ + C_k \gamma_k^- \end{array} \right] / D_k = \quad (7к)$$

$$= -\frac{t}{D_k} \Delta \lambda_k - R t_k \Delta t + R_k.$$

$$\text{где } D_k = \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2 + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k^2; \quad R t_k = \frac{\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k}{D_k};$$

$$R_k = \frac{-t \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m \right] - C_k \left[\frac{\mu}{S_k^+} - \frac{\mu}{S_k^-} + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k dY_k - \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right] - t (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) - C_k \gamma_k^+ + C_k \gamma_k^-}{D_k}.$$

Подстановка (7к) в (6е) дает

$$\frac{\partial \Delta F_k}{\partial X} \Delta X - \frac{t^2}{D_k} \Delta \lambda_k + (dY_k - t R t_k) \Delta t = -\Delta F_k - R_k t. \quad (8а)$$

Подстановка (7к) в (7и) дает

$$\Delta \gamma_k^M - \Delta \gamma_k^m = -\frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2}{D_k} \Delta \lambda_k + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (dY_k - t R t_k) \Delta t + \quad (8б)$$

$$+ \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + t \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (R_k + dY_k) - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m.$$

В свою очередь подстановка (8б) в (6ж) дает

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in SC} \left[dY_k \left(1 - \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2}{D_k} \right) - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) \frac{t}{D_k} \right] \Delta \lambda_k + \\
& + \sum_{k \in SC} \left[dY_k \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (dY_k - tRt_k) - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) Rt_k \right] \Delta t = \\
& = -r_7 - \sum_{k \in SG} dY_k \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + t \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (R_k + dY_k) - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m \right] - \\
& - \sum_{k \in SC} (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) R_k. \tag{8B}
\end{aligned}$$

Проверка. Матрица полученной базисной системы должна быть симметричной. Поэтому коэффициент при $\Delta \lambda_k$ в (8B) должен совпадать с коэффициентом при Δt в (8A). Для (8B) получается следующее

$$\begin{aligned}
& dY_k \left[1 - \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2}{D_k} \right] - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) \frac{t}{D_k} = \\
& = dY_k \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2 + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k^2 - \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2}{D_k} - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) \frac{t}{D_k} = \\
& = dY_k \frac{\left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k^2}{D_k} - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) \frac{t}{D_k}.
\end{aligned}$$

С другой стороны для (8A)

$$\begin{aligned}
dY_k - tRt_k &= dY_k - \frac{t \left[\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k \right]}{D_k} = \\
&= \frac{dY_k D_k - t \left[\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k \right]}{D_k} = \\
&= \frac{dY_k \left[\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2 + \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k^2 \right] - \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t^2 dY_k}{D_k}
\end{aligned}$$

$$-\frac{t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m)}{D_k} = \frac{dY_k \left(\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) C_k^2}{D_k} - \frac{t(\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m)}{D_k}.$$

Т.е. получено одно и то же выражение.

Поэтому базисная система будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 \\ J & -\frac{t^2}{D_k} & dY_k - tRt_k \\ 0 & (dY_k - tRt_k)^T & H_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_X L \\ \Delta F_k + tR_k \\ \nabla_t L + RL_t \end{bmatrix}, \quad (8\Gamma)$$

где

$$H_{tt} = \sum_{k \in SG} \left[dY_k \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (dY_k - tRt_k) - (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) R_k \right];$$

$$RL_t = \sum_{k \in SG} dY_k \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + t \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) (R_k + dY_k) - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m \right]$$

$$+ \sum_{k \in SG} (\lambda_k + \gamma_k^M - \gamma_k^m) R_k.$$

После решения базисной системы (8Г) изменение оставшихся переменных находятся из выражений:

$$\Delta dY_k = -\frac{t}{D_k} \Delta \lambda_k - R_k \Delta t + R_k;$$

$$\Delta \gamma_k^+ = \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} (C_k \Delta dY_k + C_k dY_k - 1) + \frac{\mu}{S_k^+};$$

$$\Delta \gamma_k^- = \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} (-C_k \Delta dY_k - C_k dY_k - 1) + \frac{\mu}{S_k^-};$$

$$\Delta S_k^+ = -C_k \Delta dY_k - C_k dY_k + 1 - S_k^+;$$

$$\Delta S_k^- = C_k \Delta dY_k + C_k dY_k + 1 - S_k^-;$$

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M - S_k^M;$$

$$\Delta S_k^m = \Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k - S_k^m;$$

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \gamma_k^M - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} \Delta S_k^M;$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \gamma_k^m - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \Delta S_k^m.$$

Приложение Ж

Расчетные выражения НЛПР-Б_{w1} модели

Исходная задача:

$$\min t \quad (1a)$$

при условиях

$$\Delta F(X, Y + t(dY^+ - dY^-)) = 0; \quad (1б)$$

$$\sum_{k \in SC} C_k (dY_k^+ + dY_k^-) - 1 = 0; \quad (1в)$$

$$dY_k^+ \geq 0, \quad k \in SC; \quad (1г)$$

$$dY_k^- \geq 0, \quad k \in SC; \quad (1д)$$

$$tdY_k^+ - dY_k^M \leq 0, \quad k \in SC; \quad (1е)$$

$$dY_k^m + tdY_k^- \leq 0, \quad k \in SC, \quad (1ж)$$

где dY_k^m и dY_k^M - соответственно нижний и верхний пределы изменения управляющего воздействия tdY_k ; C_k - его весовой коэффициент в норме.

Функцией Лагранжа для задачи (1) будет

$$\begin{aligned} L = & t + \Delta F(X, Y + t(dY^+ - dY^-))^T \lambda + \rho \left(\sum_{k \in SC} C_k (dY_k^+ + dY_k^-) - 1 \right) + \\ & + \sum_{k \in SC} \gamma_k^+ (-dY_k^+ + S_k^+) + \sum_{k \in SC} \gamma_k^- (-dY_k^- + S_k^-) + \\ & + \sum_{k \in SC} \gamma_k^M (tdY_k^+ - dY_k^M + S_k^M) + \sum_{k \in SC} \gamma_k^m (dY_k^m + tdY_k^- + S_k^m) - \\ & - \mu \sum (\ln S_k^+ + \ln S_k^- + \ln S_k^M + \ln S_k^m). \end{aligned} \quad (2)$$

Необходимые условия оптимальности первого порядка могут быть представлены в виде:

$$\nabla_{\lambda} L = \Delta F(X, Y + t(dY^+ - dY^-)) = 0; \quad (3a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (3б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum_{k \in SC} (\lambda_k + \gamma_k^M) dY_k^+ - \sum_{k \in SC} (\lambda_k - \gamma_k^m) dY_k^- = 0; \quad (3в)$$

$$\nabla_{dY_k^+} L = t(\lambda_k + \gamma_k^M) - \gamma_k^+ + C_k \rho = 0; \quad (3г)$$

$$\nabla_{dY_k^-} L = -t(\lambda_k - \gamma_k^m) - \gamma_k^- + C_k \rho = 0; \quad (3д)$$

$$\partial L / d\gamma_k^+ = -dY_k^+ + S_k^+ = 0; \quad (3е)$$

$$\partial L / d\gamma_k^- = -dY_k^- + S_k^- = 0; \quad (3ж)$$

$$\partial L / \partial S_k^+ = \gamma_k^+ - \mu / S_k^+ = 0, \Rightarrow \gamma_k^+ S_k^+ - \mu = 0; \quad (3з)$$

$$\partial L / \partial S_k^- = \gamma_k^- - \mu / S_k^- = 0, \Rightarrow \gamma_k^- S_k^- - \mu = 0; \quad (3и)$$

$$\nabla_{\rho} L = \sum_{k \in SC} C_k (dY_k^+ + dY_k^-) - 1 = 0; \quad (3к)$$

$$\partial L / d\gamma_k^M = t dY_k^+ - dY_k^M + S_k^M = 0; \quad (3л)$$

$$\partial L / d\gamma_k^m = dY_k^m + t dY_k^- + S_k^m = 0; \quad (3м)$$

$$\partial L / \partial S_k^M = \gamma_k^M - \mu / S_k^M = 0; \quad (3н)$$

$$\partial L / \partial S_k^m = \gamma_k^m - \mu / S_k^m = 0. \quad (3о)$$

Линеаризованные уравнения для (3) будут:

$$\Delta t(\lambda_k + \gamma_k^M) + t(\Delta \lambda_k + \Delta \gamma_k^M) - \Delta \gamma_k^+ + C_k \Delta \rho = -t(\lambda_k + \gamma_k^M) + \gamma_k^+ - C_k \rho; \quad (5а)$$

$$-\Delta t(\lambda_k - \gamma_k^m) - t(\Delta \lambda_k - \Delta \gamma_k^m) - \Delta \gamma_k^- + C_k \Delta \rho = t(\lambda_k - \gamma_k^m) + \gamma_k^- - C_k \rho; \quad (5б)$$

$$\gamma_k^+ \Delta S_k^+ + \Delta \gamma_k^+ S_k^+ = -\gamma_k^+ S_k^+ + \mu; \quad (5в)$$

$$\gamma_k^- \Delta S_k^- + \Delta \gamma_k^- S_k^- = -\gamma_k^- S_k^- + \mu; \quad (5г)$$

$$-\Delta dY_k^+ + \Delta S_k^+ = dY_k^+ - S_k^+; \quad (5д)$$

$$-\Delta dY_k^- + \Delta S_k^- = dY_k^- - S_k^-; \quad (5е)$$

$$\frac{\partial \Delta F_k}{\partial X} \Delta X + t(\Delta dY_k^+ - \Delta dY_k^-) + (dY_k^+ - dY_k^-) \Delta t = -\Delta F_k; \quad (5ж)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in SC} (\Delta \lambda_k + \Delta \gamma_k^M) dY_k^+ + \sum_{k \in SC} (\lambda_k + \gamma_k^M) \Delta dY_k^+ \\ & - \sum_{k \in SC} (\Delta \lambda_k - \Delta \gamma_k^m) dY_k^- - \sum_{k \in SC} (\lambda_k - \gamma_k^m) \Delta dY_k^- = -r; \end{aligned} \quad (5з)$$

$$\sum_{k \in SC} C_k (\Delta dY_k^+ + \Delta dY_k^-) = -rr; \quad (5и)$$

$$\Delta t dY_k^+ + t \Delta dY_k^+ + \Delta S_k^M = -t dY_k^+ + dY_k^M - S_k^M; \quad (5к)$$

$$\Delta t dY_k^- + t \Delta dY_k^- + \Delta S_k^m = -dY_k^m - t dY_k^- - S_k^m; \quad (5л)$$

$$\Delta S_k^M \gamma_k^M + S_k^M \Delta \gamma_k^M = \mu - S_k^M \gamma_k^M; \quad (5м)$$

$$\Delta S_k^m \gamma_k^m + S_k^m \Delta \gamma_k^m = \mu - S_k^m \gamma_k^m. \quad (5н)$$

Из (5д)-(5е) можно получить:

$$\Delta S_k^+ = \Delta dY_k^+ + dY_k^+ - S_k^+; \quad (6а)$$

$$\Delta S_k^- = \Delta dY_k^- + dY_k^- - S_k^-. \quad (6б)$$

Из (5в)-(5г) с учетом (6а)-(6б) можно получить:

$$\Delta \gamma_k^+ = -\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} (\Delta dY_k^+ + dY_k^+) + \frac{\mu}{S_k^+}; \quad (6в)$$

$$\Delta \gamma_k^- = -\frac{\gamma_k^-}{S_k^-} (\Delta dY_k^- + dY_k^-) + \frac{\mu}{S_k^-}. \quad (6г)$$

Из (5к)-(5л) следует:

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k^+ - t \Delta dY_k^+ - t dY_k^+ + dY_k^M - S_k^M; \quad (6д)$$

$$\Delta S_k^m = -\Delta t dY_k^- - t \Delta dY_k^- - t dY_k^- - dY_k^m - S_k^m. \quad (6е)$$

Подстановка (6д)-(6е) в (5м)-(5н) дает:

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (-\Delta t dY_k^+ - t \Delta dY_k^+ - t dY_k^+ + dY_k^M); \quad (6ж)$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (-\Delta t dY_k^- - t \Delta dY_k^- - t dY_k^- - dY_k^m). \quad (6з)$$

Подстановка (6в) и (6ж) в (5а) дает

$$\begin{aligned} & \left(t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+} \right) \Delta dY_k^+ + t \Delta \lambda_k + \left(\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+ \right) \Delta t + C_k \Delta \rho = \\ & = -t \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (-t dY_k^+ + dY_k^M) \right] + \left[-\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} dY_k^+ + \frac{\mu}{S_k^+} \right] - t (\lambda_k + \gamma_k^M) + \gamma_k^+ - C_k \rho. \end{aligned} \quad (6и)$$

Подстановка (6г) и (6з) в (5б) дает

$$\begin{aligned} & \left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right) \Delta dY_k^- - t \Delta \lambda_k - \left(\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^- \right) \Delta t + C_k \Delta \rho = \\ & = -t \left[\frac{\mu}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^m + t dY_k^-) \right] + \left[-\frac{\gamma_k^-}{S_k^-} dY_k^- + \frac{\mu}{S_k^-} \right] + t (\lambda_k - \gamma_k^m) + \gamma_k^- - C_k \rho. \end{aligned} \quad (6к)$$

Решение (6и) и (6к) относительно ΔdY_k^+ и ΔdY_k^- можно представить как

$$\begin{bmatrix} \Delta dY_k^+ \\ \Delta dY_k^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^+ \\ A_k^- \end{bmatrix} \Delta \lambda_k + \begin{bmatrix} B_k^+ \\ B_k^- \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} C_k^+ \\ C_k^- \end{bmatrix} \Delta \rho + \begin{bmatrix} D_k^+ \\ D_k^- \end{bmatrix}, \quad (7a)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^+ &= (-) \frac{t}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}}; & A_k^- &= \frac{t}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)}; \\ B_k^+ &= (-) \frac{\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}}; & B_k^- &= \frac{\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^-}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)}; \\ C_k^+ &= (-) \frac{C_k}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}}; & C_k^- &= (-) \frac{C_k}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)}; \\ D_k^+ &= \frac{-t \left[\frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (-t dY_k^+ + dY_k^M) \right] + \left[-\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} dY_k^+ + \frac{\mu}{S_k^+} \right] - t(\lambda_k + \gamma_k^M) + \gamma_k^+ - C_k \rho}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}}; \\ D_k^- &= \frac{-t \left[\frac{\mu}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^m + t dY_k^-) \right] + \left[-\frac{\gamma_k^-}{S_k^-} dY_k^- + \frac{\mu}{S_k^-} \right] + t(\lambda_k - \gamma_k^m) + \gamma_k^- - C_k \rho}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)}. \end{aligned}$$

Подстановка (7a) в (5ж) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta F_k}{\partial X} \Delta X + t(A_k^+ - A_k^-) \Delta \lambda_k + [dY_k^+ - dY_k^- + t(B_k^+ - B_k^-)] \Delta t + t(C_k^+ - C_k^-) \Delta \rho &= (76) \\ &= -\Delta F_k - t(D_k^+ - D_k^-). \end{aligned}$$

Подстановка (7a) в (6ж) дает

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_k^M &= t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} A_k^+ \Delta \lambda_k + \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (dY_k^+ + t B_k^+) \Delta t + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} C_k^+ \Delta \rho + \\ &+ \frac{\mu}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (t dY_k^+ - dY_k^M + t D_k^+), \end{aligned} \quad (7b)$$

Подстановка (7a) в (6з) дает

$$\Delta \gamma_k^m = t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} A_k^- \Delta \lambda_k + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^- + t B_k^-) \Delta t + t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} C_k^- \Delta \rho + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^m + t dY_k^- + t D_k^-) + \frac{\mu}{S_k^m}. \quad (7c)$$

Подстановка (7а) и (7в)-(7г) в (5з) дает

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in SC} \left[dY_k^+ \left(1 + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} A_k^+ \right) - dY_k^- \left(1 - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} A_k^- \right) + (\lambda_k + \gamma_k^M) A_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) A_k^- \right] \Delta \lambda_k + \\
& + \sum_{k \in SC} \left[dY_k^+ \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (dY_k^+ + tB_k^+) + dY_k^- \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^- + tB_k^-) + (\lambda_k + \gamma_k^M) B_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) B_k^- \right] \Delta t + \\
& + \sum_{k \in SC} \left[t \left(dY_k^+ \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} C_k^+ + dY_k^- \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} C_k^- \right) + (\lambda_k + \gamma_k^M) C_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) C_k^- \right] \Delta \rho = \\
& = -r - \sum_{k \in SC} \left[dY_k^+ \left\langle \frac{\mu}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (t dY_k^+ - dY_k^M + t D_k^+) \right\rangle + dY_k^- \left\langle \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^m + t dY_k^- + t D_k^-) + \frac{\mu}{S_k^m} \right\rangle + \right. \\
& \left. + (\lambda_k + \gamma_k^M) D_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) D_k^- \right]. \quad (7д)
\end{aligned}$$

Подстановка (7а) в (5и) дает

$$\sum_{k \in SC} C_k (A_k^+ + A_k^-) \Delta \lambda_k + \sum_{k \in SC} C_k (B_k^+ + B_k^-) \Delta t + \sum_{k \in SC} C_k (C_k^+ + C_k^-) \Delta \rho = -rr - \sum_{k \in SC} C_k (D_k^+ + D_k^-). \quad (7е)$$

Выполним проверку коэффициентов в (7д), учитывая, что

1) Из-за симметричности базисной матрицы коэффициенты при $\Delta \lambda_k$

должны соответствовать коэффициентам при Δt в (7б). Действительно:

$$\left[dY_k^+ - dY_k^- + t(B_k^+ - B_k^-) = dY_k^+ + tB_k^+ - (dY_k^- + tB_k^-) \right];$$

$$\begin{aligned}
dY_k^+ + tB_k^+ &= dY_k^+ - t \frac{\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}} = \\
&= dY_k^+ + \left(\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+ \right) A_k^+ = dY_k^+ \left(1 + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} \right) A_k^+ + (\lambda_k + \gamma_k^M) A_k^+;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dY_k^- + tB_k^- &= dY_k^- + t \frac{\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^-}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)} = \\
&= dY_k^- + \left(\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^- \right) A_k^- = dY_k^- \left(1 - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} A_k^- \right) + (\lambda_k - \gamma_k^m) A_k^-;
\end{aligned}$$

2) коэффициенты при $\Delta\rho$ должны соответствовать коэффициентам при Δt в (7е). Действительно:

$$\begin{aligned} C_k B_k^+ + C_k B_k^- &= C_k (-) \frac{\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+}{t^2 \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^+}{S_k^+}} + C_k \frac{\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^-}{\left(t^2 \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} + \frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \right)} = \\ &= \left(\lambda_k + \gamma_k^M + t \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+ \right) C_k^+ - \left(\lambda_k - \gamma_k^m - t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^- \right) C_k^- = \\ &= t \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^+ C_k^+ + t \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^- C_k^- \right) + (\lambda_k + \gamma_k^M) C_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) C_k^-. \end{aligned}$$

Выполним проверку коэффициентов в (7е). Коэффициенты при $\Delta\lambda_k$ должны соответствовать коэффициентам при $\Delta\rho$ в (7б). Действительно

$$t(C_k^+ - C_k^-) = C_k A_k^+ + C_k A_k^-.$$

Таким образом, базисная система решаемых линейных уравнений будет:

$$\frac{\partial \Delta F_k}{\partial X} \Delta X + t(A_k^+ - A_k^-) \Delta \lambda_k + [dY_k^+ - dY_k^- + t(B_k^+ - B_k^-)] \Delta t + t(C_k^+ - C_k^-) \Delta \rho = \quad (8a)$$

$$= -\Delta F_k - t(D_k^+ - D_k^-);$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in SC} C_k (A_k^+ + A_k^-) \Delta \lambda_k + \sum_{k \in SC} C_k (B_k^+ + B_k^-) \Delta t + \sum_{k \in SC} C_k (C_k^+ + C_k^-) \Delta \rho = \\ = -rr - \sum_{k \in SC} C_k (D_k^+ + D_k^-), \end{aligned} \quad (8б)$$

или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 & 0 \\ J & t(A_k^+ - A_k^-) & dY_k^+ - dY_k^- & t(C_k^+ - C_k^-) \\ 0 & dY_k^+ - dY_k^- & H_{tt} & \sum_{k \in SC} C_k (B_k^+ + B_k^-) \\ 0 & t(C_k^+ - C_k^-) & \sum_{k \in SC} C_k (B_k^+ + B_k^-) & \sum_{k \in SC} C_k (C_k^+ + C_k^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \\ \Delta \rho \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_X L \\ \Delta F_k + t(D_k^+ - D_k^-) \\ \nabla_t L + Rt \\ \left(\nabla_\rho L + \sum_{k \in SC} C_k (D_k^+ + D_k^-) \right) \end{bmatrix}, \quad (8г)$$

где

$$H_{tt} = \sum_{k \in SC} \left[dY_k^+ \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (dY_k^+ + tB_k^+) + dY_k^- \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^- + tB_k^-) + (\lambda_k + \gamma_k^M) B_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) B_k^- \right];$$

$$Rt = \sum_{k \in SC} \left[dY_k^+ \left\langle \frac{\mu}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} (tdY_k^+ - dY_k^M + tD_k^+) \right\rangle + dY_k^- \left\langle \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} (dY_k^m + tdY_k^- + tD_k^-) + \frac{\mu}{S_k^m} \right\rangle + \right. \\ \left. + (\lambda_k + \gamma_k^M) D_k^+ - (\lambda_k - \gamma_k^m) D_k^- \right].$$

После решения базисной системы исключенные переменные находятся из выражений:

$$\begin{bmatrix} \Delta dY_k^+ \\ \Delta dY_k^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^+ \\ A_k^- \end{bmatrix} \Delta \lambda_k + \begin{bmatrix} B_k^+ \\ B_k^- \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} C_k^+ \\ C_k^- \end{bmatrix} \Delta \rho + \begin{bmatrix} D_k^+ \\ D_k^- \end{bmatrix}; \quad (9a)$$

$$\Delta S_k^+ = \Delta dY_k^+ + dY_k^+ - S_k^+; \quad (9б)$$

$$\Delta S_k^- = \Delta dY_k^- + dY_k^- - S_k^-; \quad (9в)$$

$$\Delta \gamma_k^+ = -\frac{\gamma_k^+}{S_k^+} \Delta S_k^+ - \gamma_k^+ + \frac{\mu}{S_k^+}; \quad (9г)$$

$$\Delta \gamma_k^- = -\frac{\gamma_k^-}{S_k^-} \Delta S_k^- - \gamma_k^- + \frac{\mu}{S_k^-}; \quad (9д)$$

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k^+ - t \Delta dY_k^+ - t dY_k^+ + dY_k^M - S_k^M; \quad (9е)$$

$$\Delta S_k^m = -\Delta t dY_k^- - t \Delta dY_k^- - dY_k^m - t dY_k^- - S_k^m; \quad (9ж)$$

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \gamma_k^M - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} \Delta S_k^M; \quad (9з)$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \gamma_k^m - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \Delta S_k^m. \quad (9и)$$

Приложение 3

Расчетные выражения НЛПР-Б_{W2} модели с $tg\varphi=const$

Исходная задача:

$$\min t \quad (1a)$$

при условиях

$$\Delta F\left(X, Y + t\left(dY^{P^T}, tg\varphi dY^{P^T}\right)^T\right) = 0; \quad (1б)$$

$$\left(\sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k^{P^2} - 1\right) / 2 = 0; \quad (1в)$$

$$tdY_k - dY_k^M \leq 0, \quad k \in SC; \quad (1г)$$

$$dY_k^m - tdY_k \leq 0, \quad k \in SC, \quad (1д)$$

где $tg\varphi dY_k^P = dY_k^O$; dY_k^m и dY_k^M - соответственно нижний и верхний пределы изменения управляющего воздействия tdY_k ; C_k - его весовой коэффициент в норме.

Функция Лагранжа для этой задачи будет следующая

$$\begin{aligned} L = t + \Delta F\left(X, Y + t\left(dY^{P^T}, tg\varphi dY^{P^T}\right)^T\right) \lambda + \rho \left(\sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k^{P^2} - 1\right) / 2 + \\ + \sum_{k \in SC} \gamma_k^M (tdY_k - dY_k^M + S_k^M) + \sum_{k \in SC} \gamma_k^m (dY_k^m - tdY_k + S_k^m) - \mu \sum (\ln S_k^M + \ln S_k^m). \end{aligned} \quad (2)$$

Необходимыми условиями оптимальности первого порядка являются:

$$\Delta F\left(X, Y + t\left(dY^{P^T}, tg\varphi dY^{P^T}\right)^T\right) = 0; \quad (3a)$$

$$\nabla_X L = [J]^T \lambda = 0; \quad (3б)$$

$$\nabla_t L = 1 + \sum_{k \in SC} (\lambda_k^S + \gamma_k^M - \gamma_k^m) dY_k^P = 0; \quad (3в)$$

$$\nabla_{dY_k} L = t(\lambda_k^S + \gamma_k^M - \gamma_k^m) + \rho C_k^2 dY_k^P = 0; \quad (3г)$$

$$\nabla_{\rho} L = \left(\sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k^{P^2} - 1\right) / 2 = 0; \quad (3д)$$

$$\partial L / \partial \gamma_k^M = tdY_k - dY_k^M + S_k^M = 0; \quad (3е)$$

$$\partial L / d\gamma_k^m = dY_k^m - tdY_k + S_k^m = 0; \quad (3ж)$$

$$\partial L / \partial S_k^M = \gamma_k^M - \mu / S_k^M = 0; \quad (3з)$$

$$\partial L / \partial S_k^m = \gamma_k^m - \mu / S_k^m = 0, \quad (3и)$$

где $\lambda_k^S = \lambda_k^P + \lambda_k^O tg \varphi_k$.

Умножая (3г) на Y_k^P и суммируя по k с учетом (3в) и (3д), можно получить $\rho = t$. Поэтому уравнение (3г) можно переписать как

$$(\lambda_k^S + \gamma_k^M - \gamma_k^m) + C_k^2 dY_k^P = 0. \quad (3к)$$

Отсюда следует, что уравнения (3в) и (3д) эквивалентны, поэтому можно воспользоваться только одним из них, например, (3д), при этом для простоты записи будем использовать dY , вместо dY^P .

Перепишем уравнения в порядке дальнейшего использования:

$$r_{10} = S_k^M \gamma_k^M - \mu = 0; \quad (4а)$$

$$r_{11} = S_k^m \gamma_k^m - \mu = 0; \quad (4б)$$

$$r_8 = tdY_k - dY_k^M + S_k^M = 0; \quad (4в)$$

$$r_9 = dY_k^m - tdY_k + S_k^m = 0; \quad (4г)$$

$$\lambda_k^S + \gamma_k^M - \gamma_k^m + C_k^2 dY_k = 0; \quad (4д)$$

$$\Delta F(X, Y + t(dY^T, tg \varphi dY^T)^T) = 0; \quad (4е)$$

$$\nabla_{\rho} L = (\sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k^2 - 1) / 2 = 0. \quad (4ж)$$

Линеаризованные уравнения (4) будут:

$$\Delta tdY_k + t\Delta dY_k + \Delta S_k^M = -tdY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (5а)$$

$$- \Delta tdY_k - t\Delta dY_k + \Delta S_k^m = -dY_k^m + tdY_k - S_k^m; \quad (5б)$$

$$\Delta S_k^M \gamma_k^M + S_k^M \Delta \gamma_k^M = \mu - S_k^M \gamma_k^M; \quad (5в)$$

$$\Delta S_k^m \gamma_k^m + S_k^m \Delta \gamma_k^m = \mu - S_k^m \gamma_k^m; \quad (5г)$$

$$\Delta tdY_k + t\Delta dY_k + \Delta S_k^M = -tdY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (5д)$$

$$- \Delta tdY_k - t\Delta dY_k + \Delta S_k^m = -dY_k^m + tdY_k - S_k^m; \quad (5е)$$

$$\Delta \lambda_k^S + \Delta \gamma_k^M - \Delta \gamma_k^m + C_k^2 \Delta dY_k = 0, \quad (5ж)$$

$$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial X} \Delta X + t \Delta dY_k + \Delta t dY_k = -\Delta P_k; \quad (5з)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial X} \Delta X + t \Delta dY_k \operatorname{tg} \varphi_k + \Delta t dY_k \operatorname{tg} \varphi_k = -\Delta Q_k; \quad (5и)$$

$$\sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k \Delta dY_k = -\nabla_\rho L. \quad (5к)$$

Из (5а)-(5б) следует:

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (6а)$$

$$\Delta S_k^m = \Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k - S_k^m. \quad (6б)$$

Подстановка (6а)-(6б) в (5в)-(5г) дает:

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} \left(-\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M \right); \quad (6в)$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \left(\Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k \right). \quad (6г)$$

Поэтому

$$\Delta \gamma_k^M - \Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} + \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) \left(\Delta t dY_k + t \Delta dY_k + t dY_k \right) - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m. \quad (6д)$$

Подстановка (6д) в (5ж) дает

$$\Delta dY_k = -\frac{\Delta \lambda_k^S}{D_k} - \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) dY_k}{D_k} \Delta t + R_k, \quad (6ж)$$

где

$$D_k = \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t + C_k^2; \quad R_k = (-) \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) t dY_k + \frac{\mu}{S_k^M} - \frac{\mu}{S_k^m} - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} dY_k^M - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} dY_k^m}{D_k}.$$

Подстановка (6ж) в (5з)-(5и) дает:

$$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial X} \Delta X - \frac{t}{D_k} \Delta \lambda_k^S + \frac{C_k^2 dY_k}{D_k} \Delta t = -\Delta P_k - t R_k; \quad (6з)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial X} \Delta X - \frac{t}{D_k} \operatorname{tg} \varphi_k \Delta \lambda_k^S + \frac{C_k^2 dY_k}{D_k} \operatorname{tg} \varphi_k \Delta t = -\Delta Q_k - t R_k \operatorname{tg} \varphi_k. \quad (6и)$$

Подстановка (6ж) в (5к) дает

$$\sum_{k \in SC} \frac{C_k^2 dY_k}{D_k} \Delta \lambda_k^S + \sum_{k \in SC} \frac{C_k^2 \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) dY_k^2}{D_k} \Delta t = \nabla_{\rho} L + \sum_{k \in SC} C_k^2 dY_k R_k. \quad (6к)$$

Таким образом, базисная система линеаризованных уравнений будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} H & J^T & 0 \\ J & \begin{matrix} -\frac{t}{D_k} & -t \frac{tg\varphi}{D_k} \\ -t \frac{tg\varphi}{D_k} & -t \frac{tg\varphi^2}{D_k} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{C_k^2 dY_k}{D_k} \\ \frac{C_k^2 dY_k}{D_k} tg\varphi \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} \frac{C_k^2 dY_k^T}{D_k} & \frac{C_k^2 dY_k^T}{D_k} tg\varphi^T \end{matrix} & \sum_{k \in SC} \frac{C_k^2 \left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) dY_k^2}{D_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta \lambda \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_X L \\ -(\Delta P + tR_k) \\ -(\Delta Q + tR_k tg\varphi_k) \\ \left(\sum_{k \in SC} C_k^2 R_k dY_k \right) \\ +\nabla_{\rho} L \end{bmatrix}. \quad (7)$$

После решения этой системы, исключенные переменные определяются из выражений:

$$\Delta dY_k = -\frac{\Delta \lambda_k^S}{D_k} - \frac{\left(\frac{\gamma_k^M}{S_k^M} + \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \right) dY_k}{D_k} \Delta t + R_k; \quad (8а)$$

$$\Delta S_k^M = -\Delta t dY_k - t \Delta dY_k - t dY_k + dY_k^M - S_k^M; \quad (8б)$$

$$\Delta S_k^m = \Delta t dY_k + t \Delta dY_k - dY_k^m + t dY_k - S_k^m; \quad (8в)$$

$$\Delta \gamma_k^M = \frac{\mu}{S_k^M} - \gamma_k^M - \frac{\gamma_k^M}{S_k^M} \Delta S_k^M; \quad (8г)$$

$$\Delta \gamma_k^m = \frac{\mu}{S_k^m} - \gamma_k^m - \frac{\gamma_k^m}{S_k^m} \Delta S_k^m. \quad (8д)$$