Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи

Верг

Веретельникова Ирина Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОТСУТСТВИИ ТРЕНДА И КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Лемешко Борис Юрьевич

Новосибирск – 2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В аппарате прикладной математической статистики значительное место занимает множество критериев проверки статистических гипотез, цель которых заключается в желании убедиться в том, что данные в наблюдаемом ряду измерений некоторой случайной величины не связаны какими-то случайными или неслучайными закономерностями. Под временным рядом понимается последовательность $\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$ результатов измерений значений некоторой переменной, произведенных, например, через равные промежутки времени [98].

В такого рода критериях проверяется гипотеза о том, что анализируемая выборка представляет собой выборку независимых одинаково распределённых случайных величин. Если проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, то можно считать, что мы имеем дело со случайной величиной, полностью описываемой некоторым (неизвестным) законом распределения.

Если гипотеза H_0 отклоняется, то между измерениями могут существовать случайные и неслучайные связи. Временные ряды могут отражать наличие тренда, наличие систематической составляющей, сезонной составляющей, а также случайной составляющей (шума). При этом под трендом понимается основная тенденция изменения временного ряда, направление преимущественного движения исследуемой переменной. С анализом временных рядов сталкиваются при обработке измерений в технических областях, в экономике, сельском хозяйстве, метеорологии [73]. Методы анализа и построения моделей для временных рядов или определения характера тренда лежат за рамками настоящей диссертации.

Таким образом, признаком наличия в наблюдаемой случайной последовательности измерений некоторой неслучайной закономерности может являться отклонение проверяемой гипотезы об отсутствии тренда. Для проверки такого рода гипотезы в разное время предложено множество параметрических и непараметрических критериев. Однако имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев, не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев.

Достаточно полный перечень критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда, представлен в работе [88], которую можно рассматривать как справочное пособие, охватывающее самое широкое (в отечественных источниках по прикладной статистике) множество критериев проверки статистических гипотез. Естественно, что книга [88] не дает ответа на сформулированные выше вопросы. Более того, пользоваться ею надо осторожно из-за большого числа опечаток и ошибок, допущенных в описаниях критериев и в примерах их применения.

Основной предпосылкой, обеспечивающей корректное применение параметрических критериев, как правило, является предположение о нормальном законе распределения шума, что далеко не всегда выполняется на практике. Возникает вопрос, что произойдет с распределением статистики параметрического критерия в случае нарушения предположения о нормальности? Насколько будут оставаться корректными выводы, осуществляемые на основании классических результатов? И как поступать, если очевидно, что нельзя использовать классические результаты?

Использование непараметрических критериев зачастую опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных или асимптотических распределений статистик [77, 79, 99], используемых в процедуре проверки гипотезы. В случае непараметрических критериев проблема зачастую усугубляется из-за ярко выраженной дискретности статистик [78, 81, 97, 98]. В таких ситуациях использование при проверке гипотезы предельного (асимптотического) распределения статистики вместо имеющего место реального распределения этой статистики может приводить к неверному выводу.

За последние 80-90 лет предложено и рассмотрено множество критериев, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда. В работе Фишера (Fisher R.A) [19] рассматривается модификация критерия автокорреляции, представляющая из себя сумму коэффициентов корреляции первого и второго порядков.

Статистика критерия Вальда-Вольфовица, предложенного в [20], основана на коэффициенте сериальной корреляции. В работе Флайне и Килена (Fligner M.A., Killeen T.J.) [20] была отмечена возможность построения непараметрического аналога сериального коэффициента корреляции. Такой аналог, а также ранговый критерий сериальной корреляции Вальда-Вольфовица рассматривались Горбуновой А.А в [23].

В работах Холина (Hollin M.) [28 – 29], посвященных изучению проблемы использования рангов в критериях проверки гипотез об отсутствии тренда, предложены в некоторые обобщения рангового критерия Вальда-Вольфовица и знакового критерия кумулятивной суммы.

В работе Хсу (Hsu D.A.) [33] описан критерий для обнаружения сдвига дисперсий, позволяющий определить точку изменения дисперсии в случае принадлежности наблюдений нормальному закону. Проблемой обнаружения сдвига дисперсии (характеристики рассеяния) в неизвестной точке занимался Шей (Hsieh H.K.) [32].

Исследованиями распределений статистик ряда параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда, а также сравнительным анализом мощности критериев по отношению к ряду альтернатив занимались Лемешко Б.Ю. [98], Комиссарова А.А. [89], Щеглов А.Е. [120]. С проверкой гипотез об отсутствии тренда связаны работы [1, 4, 7, 11, 15, 16, 17, 22, 24, 26, 44, 50, 52, 65, 67].

Помимо вопроса о наличии неслучайной закономерности в наблюдаемой случайной последовательности измерений часто встает вопрос о неизменности или, наоборот, об изменении статистических свойств некоторого объекта, процесса и т.п. после целенаправленного изменения фактора или факторов (методики, технологии и т.д.), неявным образом влияющих на исследуемый объект [94]. Подобные задачи естественно возникают при сличении результатов лабораторных измерений или аттестации средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. Такие задачи решают с использованием критериев проверки гипотез об однородности (об однородности законов, об однородности математических ожиданий, об однородности дисперсий).

Очевидно, что критерии однородности можно использовать для проверки гипотез об отсутствии тренда, разбивая анализируемый ряд наблюдений на части и проверяя гипотезу об однородности этих частей. Однако автору не известно об упоминаниях в литературе о таком подходе, что связано, по-видимому, с наличием проблем, затрудняющих применение на практике, в частности, k-выборочных критериев однородности законов.

В прикладной математической статистике накопился достаточно обширный арсенал критериев (параметрических и непараметрических), предназначенных для проверки гипотез однородности распределений двух выборок [94].

Необходимо отметить, что для проверки гипотезы однородности законов на практике, как правило, используются либо двухвыборочный критерий Смирнова [75], либо двухвыборочный критерий Лемана–Розенблатта, предложенный в работе [38], и исследованный в [51]. Предпочтительность использования данных критериев для проверки однородности обсуждалась Орловым А.И. [112]. В русскоязычной литературе практически не упоминается применение двухвыборочного критерия Андерсона–Дарлинга [49] (Андерсона–Дарлинга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга [53]. Исключение составляют исследования в диссертациях Постовалова С.Н. [113] и Филоненко П.А. [115].

В работах [92, 40] Б.Ю. Лемешко и С. Б. Лемешко исследовали распределения статистик и мощность критериев Смирнова и Лемана–Розенблатта при ограниченных объемах выборок, уточнили объемы, начиная с которых можно реально пользоваться предельными распределениями, выяснили характер альтернатив, относительно которых тот или иной критерий имеет преимущество в мощности. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшая себя в аналогичных работах [93, 91, 39, 80], базирующаяся, в основном, на методе статистического моделирования.

Среди публикаций, направленных на проверку гипотез однородности, следует отметить работы Лемешко Б.Ю. [80, 94, 100,], Миркина Е. П. [91], Макарова А.А., Симонова Г.И. [110] и др. [23, 35, 18, 2, 9, 43, 45, 46, 10, 3, 6, 8, 54, 55].

Кроме упомянутых выше критериев однородности можно указать непараметрические критерии, предложенные в работах Жанга (Zhang J.) [69, 71], которые дают возможность сравнивать k выборок.

Следует заметить, что применение k-выборочных критериев однородности на практике сдерживается тем, что, в лучшем случае, известны лишь критические значения статистик для соответствующих k, как, например, для критерия Андерсона–Дарлинга. Распределения статистик критериев Жанга [69, 70, 71, 72] зависят от объёмов выборок, поэтому их применение невозможно без использования методов статистического моделирования.

Любого исследователя в связи с необходимостью решения задачи статистического анализа всегда интересует критерий, обладающий большей мощностью, хотя в зависимости от конкурирующих гипотез предпочтительными по мощности могут быть различные критерии. Любого исследователя интересуют «действительные» свойства критериев и то, когда и при каких условиях (при выполнении каких стандартных предположений) он может получить корректные выводы, используя классические результаты. С другой стороны, он заинтересован в возможности осуществления корректных выводов и в ситуациях, когда стандартные предположения нарушаются.

Следует констатировать, что в настоящий момент имеющиеся знания о реальных свойствах множества критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда, или множества критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности законов, не позволяют ответить на вопрос о том, какой или какие критерии предпочтительнее для применения. А имеющийся арсенал программных средств не гарантирует с применением соответствующих критериев корректных и информативных выводов с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Цель и задачи исследований. Основная цель диссертационной работы заключалась в расширении знаний о свойствах, распределениях статистик и мощности групп критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математических ожиданиях, об отсутствии тренда в дисперсиях, об однородности законов, а также в обеспечении корректности применения соответствующих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений.

В соответствии с поставленной целью для рассматриваемых групп критериев на базе разрабатываемого программного обеспечения и методов статистического моделирования решались следующие задачи:

- исследование влияния объемов выборок n на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0, построение моделей предельных распределений для статистик некоторых критериев;
- для критериев с известными предельными распределениями статистик уточнение значений n, начиная с которых можно использовать асимптотическое (предельное) распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения статистики, имеющего место при данном n;
- для параметрических критериев определение характера влияния на распределения статистик (при справедливости H_0) нарушения стандартного предположения о нормальности;
- оценивание мощности критериев относительно близких конкурирующих гипотез и проведение сравнительного анализа критериев;

- исследование влияния ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев;
- реализация возможности корректного применения множества рассмотренных критериев в условиях нарушения стандартных предположений и/или ограниченной точности измерений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Методы исследования. Исследования опирались на развиваемые компьютерные технологии исследования статистических закономерностей, в основе которых лежит методика статистического моделирования [103] и развиваемое программное обеспечение [34].

Научная новизна диссертационной работы заключается:

– в результатах исследования свойств и распределений статистик рассмотренных критериев при ограниченных объемах выборок, при ограниченной точности измерений, в выявленных достоинствах и недостатках отдельных критериев;

– в предложенной модификации рангового критерия Вальда-Вольфовица, для которой ликвидировано существенное смещение распределения статистики относительно стандартного нормального закона;

– в построенной на основании результатов статистического моделирования приближенной модели предельного распределения G-статистики критерия Хсу;

– в результатах сравнительного анализа мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании;

– в результатах сравнительного анализа мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии;

– в построенных на основе результатов статистического моделирования моделях предельных распределений для предложенных k-выборочных вариантов критериев, опирающихся на применение к каждой паре анализируемых выборок двувыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита;

– в результатах сравнительного анализа мощности рассмотренных k-выборочных критериев проверки однородности законов;

- в возможности корректного применения множества всех рассмотренных критериев в условиях нарушения стандартных предположений и/или ограниченной точности измерений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Личный творческий вклад автора в совместных публикациях заключается:

– в разработке программного обеспечения для исследования методами статистического моделирования распределений статистик рассматриваемых множеств критериев проверки статистических гипотез и применения этих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений с использованием интерактивного режима моделирования распределений статистик;

– в оценке мощности рассматриваемых множеств критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании и критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии, в проведении сравнительного анализа мощности этих групп критериев;

– в разработке модификации рангового критерия Вальда-Вольфовица;

– в разработке новых многовыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита для проверки однородности распределений;

– в построении моделей предельных распределений для новых многовыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита;

– в проведении сравнительного анализа мощности рассмотренного множества k-выборочных критериев проверки однородности законов.

Практическая ценность и реализация результатов. Разработанные алгоритмы моделирования распределений статистик и применения критериев для проверки гипотезы отсутствия тренда и k-выборочных критериев проверки однородности законов реализованы в трех последовательно зарегистрированных версиях (5.2, 5.3 и 5.4) программы ЭВМ – «Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика» (свидетельства о государственной регистрации № 2014661513, № 2015663326, № 2018666213).

Результаты диссертационных исследований и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе, в научных исследованиях и при решении задач статистического анализа в различных приложениях.

Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (проекты № 2.541.2014/К и № 1.1009.2017/4.6).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Содержание диссертации соответствует п. 5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

К основным результатам, выносимым на защиту, относятся:

– результаты исследования свойств и распределений статистик рассмотренных критериев при ограниченных объемах выборок;

– модификация рангового критерия Вальда-Вольфовица, ликвидирующая смещение распределения статистики относительно стандартного нормального закона;

– построенная приближенная модель для предельного распределения G-статистики критерия Хсу;

– результаты сравнительного анализа мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании и мощности рассмотренных критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии;

– построенные модели предельных распределений для предложенных k-выборочных вариантов критериев, опирающихся на применение двувыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита;

– результаты сравнительного анализа мощности рассмотренных k-выборочных критериев проверки однородности законов.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

– корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования при исследовании свойств и распределений статистик рассмотренных критериев;

– совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались на международном семинаре “Applied Methods of Statistical Analysis”, Новосибирск, 2015г. и 2017г.; международном форуме по стратегическим технологиям “International Forum on Strategic Technology, IFOST-2016”, Новосибирск, 2016 г.; республиканской научно-практической конференции “СТАТИСТИКА и её применения-2017”, Ташкент, Узбекистан, 2017г.; международной научно-технической конференции “Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017)”, Москва, 2017г.; международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”, Новосибирск, 2014г., 2016г., 2018г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013г., 2014г., 2015г., 2016г., 2018г., 2019г.; международном семинаре “Mathematics, statistics and computation to support measurement quality”, Санкт-Петербург, 2018 г.; международной научно-практической конференции “Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике”, Санкт-Петербург, 2013г., 2014г.; международной конференции “Вычислительная математика и математическая геофизика”, Новосибирск, 2018г.; Всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технология. Инновации”, Новосибирск, 2012г., 2013г. и 2017г.

Публикации. По результатам исследований опубликованы 27 печатных работ, в том числе: 3 статьи в научных журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК РФ, 6 статьей в рецензируемых трудах международных конференций, индексируемых в Web of Sciences и/или Scopus, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, 15 публикаций в материалах международных и российских конференций.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения, списка литературы из 120 наименований и трех приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 203 страницы, включая 62 таблицы и 81 рисунок.

Краткое содержание работы. В первой главе сформулированы постановки задач проверки гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния), проверки гипотезы об однородности законов. Формулируются общие цели исследований, направленные на уточнение знаний о свойствах, о распределениях статистик и мощности рассматриваемых групп критериев, ориентированных на проверку соответствующих гипотез, формулируются цели, направленные на обеспечение корректности применения соответствующих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений.

Во второй главе исследуется множество рассматриваемых параметрических и непараметрических критериев об отсутствии тренда в средних. Исследуются распределения статистик. Находятся оценки мощности критериев относительно некоторых близких конкурирующих гипотез, и проводится сравнительный анализ мощности. Отмечаются особенности и недостатки некоторых критериев.

В третьей главе рассматривается множество параметрических и непараметрических критериев об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния, проводятся исследования распределений статистик, находятся оценки мощности и проводится и сравнительный анализ мощности.

В четвертой главе рассматривается множество k-выборочных критериев проверки однородности законов. Исследуются распределения статистик известных k-выборочных критериев и предложенных автором. Для последних на основании результатов статистического моделирования распределений статистик строятся модели для предельных распределений. Находятся оценки мощности критериев, проводится сравнительный анализ мощности множества k-выборочных критериев.

В пятой главе кратко описано назначение и возможности (с примерами применения) разработанных в рамках развиваемой программной системы «Интервальная статистика для Windows» программных модулей, позволяющих с использованием методов статистического моделирования исследовать распределения статистик рассматриваемого множества критериев, а также применять эти критерии. Подчеркивается, что корректное применение рассматриваемых критериев обеспечивается, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений и ограниченной точности регистрируемых данных с вычислением оценки p_{value} по полученному в результате моделирования распределению статистики.

В заключении приводится перечень основных результатов исследований.

Автор выражает глубокую признательность за ценные советы и оказанную помощь в написании диссертации своему научному руководителю д.т.н., профессору Лемешко Борису Юрьевичу, научным консультантам д.т.н., доценту Чимитовой Екатерине Владимировне, к.т.н. Лемешко Станиславу Борисовичу и коллективу кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ.

1 СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОТСУТСТВИИ ТРЕНДА И ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ

1.1 Общие сведения о проверке статистических гипотез

Введем для дальнейшего использования следующие обозначения:

- $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из n наблюдений одномерной непрерывной случайной величины;
- $x_{(j)}$ – j-я порядковая статистика выборки;

Статистической *гипотезой* называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Обычно она обозначается H_0 и называется *основной* или *нулевой*.

С каждым используемым для проверки гипотезы H_0 критерием связана статистика S, которая представляет собой некоторую меру для измерения вероятности соответствия (несоответствия) анализируемых выборок проверяемой гипотезе H_0. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Область значений статистики S разбивается на два подмножества, которые представляют собой *доверительную область*, попадание статистики S в которую влечет за собой принятие основной гипотезы H_0, и *критическую область*, попадание статистики S в которую приводит к отклонению основной гипотезы H_0 и принятию конкурирующей гипотезы H_1.

Заметим, что неотклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что реальное положение вещей, возможно, не очень сильно отличается от предполагаемого состояния, соответствующего H_0. В таких случаях принято считать, что объем выборки не достаточен, чтобы выявить различие.

Случайность выборки предполагает возможность ошибок в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов [85]:

- *Ошибка 1-го род*а – событие, состоящее в том, что гипотеза H_0 отвергается, когда она справедлива. При проверке гипотез вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), как правило, задают, допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.
- *Ошибка 2-го рода* – событие, состоящее в том, что гипотеза H_0 принимается, когда верна конкурирующая гипотеза H_1, β – вероятность ошибки второго рода.

Статистические критерии делятся на правосторонние, левосторонние и двусторонние. Соответственно, критическая область Ω_α в случае унимодальной плотности распределения статистики критерия S может быть трех типов:

- правосторонней $\Omega_\alpha = \left(S_{1-\alpha}, +\infty\right)$;
- левосторонней $\Omega_\alpha = \left(-\infty, S_\alpha\right)$;
- двусторонней $\Omega_\alpha = \left(-\infty, S_{\alpha/2}\right) \cup \left(S_{1-\alpha/2}, +\infty\right)$.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int\limits_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0), \tag{1.1}$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики при справедливости H_0.

Для используемых на практике критериев в благоприятных случаях известны асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии справедливости гипотезы H_0 (или распределения статистик при конкретных объёмах выборок n). Но в большинстве ситуаций, когда распределения статистик существенно зависят от объёмов выборок n, информация о законе распределения статистики бывает представлена лишь таблицей процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$). Критическое значение $S_{1-\alpha}$ вычисляют в соответствии с $G(S|H_0)$ или берут из соответствующей таблицы процентных точек.

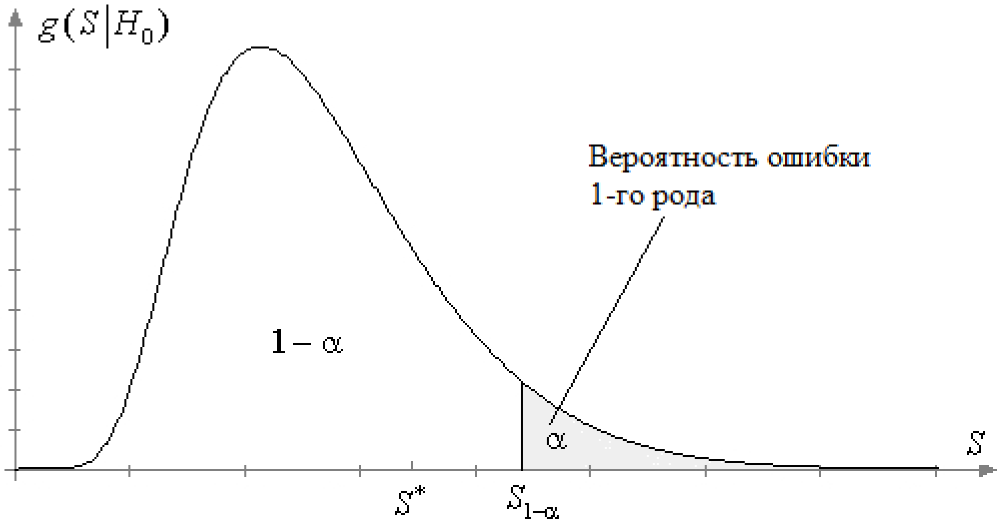


Рисунок 1.1 – Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

В случае правостороннего критерия в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$. На рисунке 1.1 значение статистики S^* меньше критического значения $S_{1-\alpha}$, попадает в доверительную область, а значит, гипотеза не будет отвергнута.

Больше информации о степени соответствия выборки теоретическому закону можно почерпнуть из достигнутого уровня значимости p_{value} – вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости H_0:

$$p_{value} = P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0). \qquad (1.2)$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо анализируемые выборки согласуются с проверяемой гипотезой, так как по существу представляет собой вероятностную меру истинности нулевой гипотезы (см. рис. 1.2). Проверяемую гипотезу H_0 не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

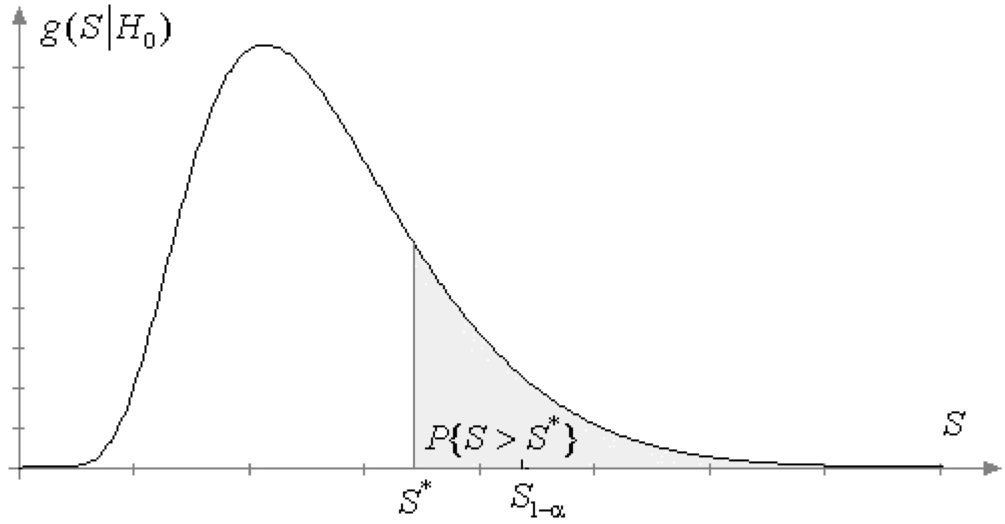


Рисунок 1.2 – Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

На практике при проверке статистической гипотезы пользователь (исследователь) может столкнуться с одной из следующих проблем.

Во-первых, при ограниченных объемах выборок распределение статистики $G(S|H_0)$ критерия может существенно отличаться от известного предельного (асимптотического) распределения, имеющего место при справедливости гипотезы H_0, Использование предельного закона взамен «истинного» может привести к неверным статистическим выводам. При этом минимальный объем выборок, начиная с которого различие между «истинным» и предельным распределениями является несущественным, неизвестен.

Во-вторых, когда асимптотические (предельные) распределения статистик неизвестны, таблицы процентных точек составлены, как правило, для весьма ограниченного числа объемов выборок. Поэтому возникают проблемы с вычислением достигнутого уровня значимости и формированием статистического вывода о результатах проверки статистической гипотезы при объемах выборок, не представленных в таблицах процентных точек.

Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. Если же гипотеза H_1 задана и имеет некоторый конкретный вид, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β.

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1)ds .$$

На рисунке 1.3 для правостороннего критерия $g(s \mid H_0)$ отображает плотность распределения статистики s при справедливости гипотезы H_0, а $g(s \mid H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

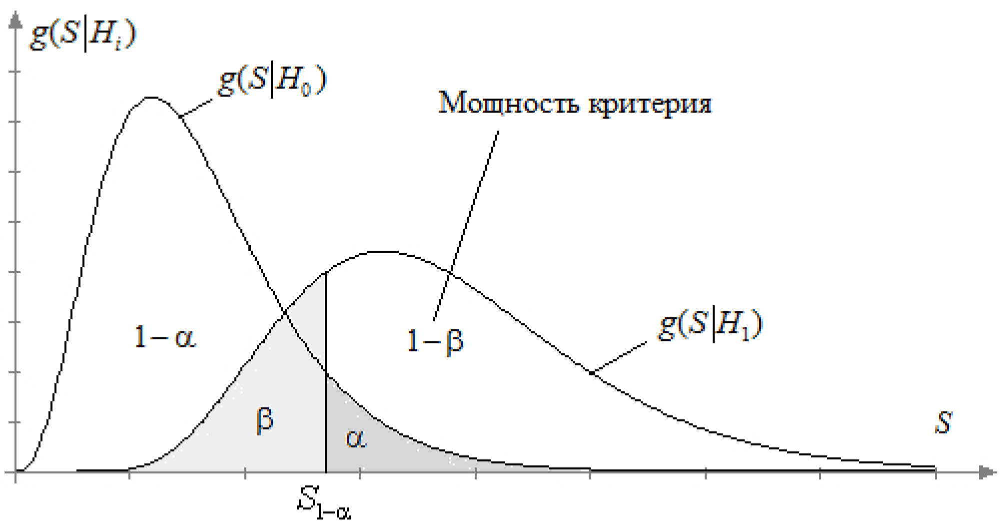


Рисунок 1.3 – Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рисунке 1.3 плотности распределений статистики $g(s \mid H_0)$ и $g(s \mid H_1)$ должны быть максимально “раздвинуты”. Очевидно, что чем большей мощностью обладает критерий, тем он предпочтительней.

Как правило, в аппарате прикладной математической статистики для проверки конкретной гипотезы H_0 предложен целый ряд критериев. Такие критерии опираются на различные статистики, измеряющие отклонение эмпирических данных от проверяемой гипотезы H_0. В этой связи всегда возникает вопрос выбора наиболее предпочтительного (наиболее мощного) критерия. К сожалению, в таком рассматриваемом ряду критериев (за редчайшим исключением) всегда отсутствует равномерно наиболее мощный критерий, обладающий наибольшей мощностью относительно любой конкурирующей гипотезы H_1. Более токо порядок предпочтительности по мощности для ряда критериев может меняться в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Поэтому сравнение критериев по мощности оказывается возможным только относительно конкретных (групп) конкурирующих гипотез.

Исследование мощности критериев аналитическими методами всегда оказывается очень сложной задачей, связанной с исследованием распределений статистик при справедливости конкурирующей гипотезы H_1, а полученные ими в редких случаях решения, к сожалению, имеют весьма малую ценность для практического использования. Поэтому в последние десятилетия исследования мощности критериев, как правило, осуществляются с упором на применение методов статистического моделирования.

При наличии в математическом аппарате целого ряда критериев, предназначенных для проверки определённой гипотезы H_0, на практике порой используются только некоторые из них и это не всегда критерии, обладающие лучшими свойствами. В рассматриваемом ряду критериев могут находиться параметрические критерии, требующие выполнения предположения о принадлежности наблюдений нормальному закону, и непараметрические. В случае непараметрических критериев условие о принадлежности наблюдений нормальному закону отсутствует, но для корректности их применения определенные предположения должны выполняться. Зачастую в приложениях статистические критерии используются в условиях нарушения стандартных предположений, обуславливающих возможность их применения, что приводит к некорректности статистических выводов.

Причинами такого состояния являются следующие:

1. Отсутствует доступная информация о существовании соответствующего математического аппарата (о соответствующих критериях).

2. Реальные свойства критериев при ограниченных объёмах анализируемых выборок (и/или при ограниченной точности представления данных) могут существенно отличаться от асимптотических свойств.

3. Отсутствует информация о распределениях статистик многих критериев при справедливости проверяемой гипотезы, что ограничивает возможность применения этих критериев. В связи с этим приходится опираться на ограниченные таблицы критических значений, что делает выводы менее информативными.

4. Отсутствует доступная информация о том, что происходит с критериями (с распределениями их статистик) в условиях нарушения стандартных предположений.

5. Отсутствует информация о достоинствах и недостатках отдельных критериев, о преимуществе в мощности тех или иных критериев из группы критериев, ориентированных на проверку одной и той же гипотезы, что позволило бы выбрать наиболее предпочтительный критерий.

6. Отсутствует программное обеспечение для использования соответствующих критериев, гарантирующего корректность выводов, как в условиях стандартных предположений, так и при их нарушении (в условиях конкретных приложений).

1.2 Критерии проверки гипотез об отсутствии тренда в средних

При проверке гипотезы об отсутствии тренда проверяемая гипотеза H_0 заключается в том, что анализируемая выборка, возможно, наблюдаемый временной ряд значений $x_1, x_2, ..., x_n$ представляет собой выборку взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями. Проверяемая гипотеза H_0 должна отклоняться при наличии любых закономерностей, вероятностных и функциональных, связывающих наблюдаемые значения: при коррелированности случайных величин, при наличии функциональной зависимости, выраженной в виде тренда в математическом ожидании и/или тренда в дисперсии. Отклонение гипотезы H_0 не отвечает на вопрос, по какой причине, и может являться предметом дальнейшего анализа.

Различают группы критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании и на проверку гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии.

При проверке отсутствия тренда в математическом ожидании задача формулируется следующим образом. Проверяется гипотеза $H_0: \mu_i = \mu$, $i = 1, 2, ..., n$, о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним μ, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда $H_1: |\mu_{i+1} - \mu_i| > 0$, $i = 1, 2, ..., n-1$ [97].

Существует целый ряд параметрических и непараметрических критериев, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании (тренда в средних значениях).

Основной предпосылкой, обеспечивающей корректное применение параметрических критериев, как правило, является предположение о принадлежности наблюдений нормальному закону распределения, что далеко не всегда выполняется на практике.

Использование непараметрических критериев опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных и асимптотических распределений статистик, используемых в процедуре проверки гипотезы.

В случае непараметрических критериев проблема применения зачастую усугубляется ярко выраженной дискретностью статистики. В таких ситуациях использование при проверке гипотезы предельного (асимптотического) распределения статистики вместо реального распределения этой статистики также может приводить к неверному выводу.

Несмотря на наличие множества публикаций, связанных с описанием критериев, можно констатировать недостаточность имеющейся информации о свойствах критериев, их достоинствах и недостатках, о предпочтительности в мощности тех или иных. Отсутствует информация о поведении распределений статистик критериев при ограниченных объемах выборок, об их изменении при нарушении предположения о нормальности. Всё это препятствует корректному применению множества критериев в приложениях.

В связи с вышесказанным для исследования множества критериев проверки гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, сформулированы следующие цели:

1) выяснить, как влияет объем выборки на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0;

2) уточнить, начиная с каких значений n, можно использовать асимптотическое (предельное) распределение статистики соответствующего критерия (при условии существования такого распределения) вместо действительного распределения статистики, имеющего место при данном n;

3) для параметрических критериев выяснить, как влияет на распределения статистик (при справедливости H_0) нарушение стандартного предположения о нормальности;

4) получить оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам и на основании сравнительного анализа указать, применение каких критериев является предпочтительным в тех или иных ситуациях;

5) реализовать возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Анализ мощности критериев (в основном) проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых одинаково распределенных случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались модели с заданием линейного [58, 81] и периодического тренда:

$$x_i = a \cdot t_i + b \cdot \sin(2k\pi t_i) + \xi_i .$$

Здесь ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые по заданному закону (например, по стандартному нормальному закону), $t \in [0,1]$. В этом случае справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $a = 0$, $b = 0$. Отсутствию периодической составляющей тренда соответствует значение параметра $b = 0$, а отсутствию линейной – $a = 0$. Моменты отсчетов t_i вычислялись в соответствии с выражением $t_i = (i-1)\Delta t$, где шаг $\Delta t = 1/n$ связывался с объемом выборки n. При этом, если не указывалась конкретная параметрическая модель закона, то псевдослучайные величины ξ_i генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом.

В ходе настоящих исследований, являющихся развитием работ [98, 97], были рассмотрены следующие параметрические критерии [81]: автокорреляции, его модификация (нормированная сумма коэффициентов корреляции первого и второго порядков), Люнга-Бокса, Морана, Дюффа-Роя, Вальда-Вольфовица, Хсу и знаково-ранговый критерий Холлина. Также был рассмотрен ряд непараметрических критериев: ранговый и сериальный критерии Вальда-Вольфовица, критерии инверсий, Бартелса, Фостера-Стюарта, Кокса-Стюарта, кумулятивной суммы, Рамачандрана-Ранганатана. Описания данных критериев, особенности их применения и оценки мощностей рассмотрены в материалах трудов следующих международных конференций: АПЭП 2014 (на русском и английском языках), семнадцатой международной научно-практической конференции “Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике”, Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование 2014” [77].

1.3 Критерии проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях

При проверке отсутствия тренда в характеристиках рассеивания предполагается, что наблюдается ряд значений $x_1, ..., x_n$ взаимно независимых случайных величин. Проверяется гипотеза об отсутствии тренда в дисперсии $H_0: \sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, ..., n$, о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со среднеквадратическим отклонением σ, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда $H_1: |\sigma_{i+1} - \sigma_i| > 0$, $i = 1, 2, ..., n-1$ [62].

При проверке отсутствия сдвига в дисперсии (в характеристиках рассеяния) предполагается, что наблюдаемая последовательность измерений $x_1, ..., x_n$ имеет одно и то же среднее μ. Проверяется гипотеза H_0: $\sigma_1^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 неизвестно) против конкурирующей гипотезы

$$H_1: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma_0^2; \ \sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+2}^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \delta \ (\delta > 0),$$

утверждающей, что значение дисперсии меняется в некоторой неизвестной точке, то есть k неизвестно ($1 \le k \le n-1$).

С применением рассматриваемого множества параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсиях (в характеристиках рассеяния) связаны те же проблемы, что указаны выше для критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математических ожиданиях. Наличие указанных проблем ограничивает область корректного применения соответствующих критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсиях. Следует учесть, что параметрические критерии проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсиях более чувствительны к нарушению стандартного предположения о нормальности наблюдаемых величин.

Необходимо добавить, что для ряда критериев отсутствует информация о распределениях статистик, в связи с чем приходится опираться на краткие таблицы критических значений. Это ограничивает возможность применения соответствующих критериев.

К сожалению, имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев, не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев. Отсутствует информация о сравнительной мощности критериев, что не позволяет выбрать наиболее предпочтительный критерий.

В связи с указанными фактами для исследования множества критериев проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях (в характеристиках рассеяния) сформулированы следующие цели:

1) выяснить влияние объема выборки на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0;

2) уточнить, начиная с каких значений n, можно использовать асимптотическое (предельное) распределение статистики соответствующего критерия (при условии существования такого распределения) вместо действительного распределения статистики, имеющего место при данном n;

3) для параметрических критериев выяснить, как влияет на распределения статистик (при справедливости H_0) нарушение стандартного предположения о принадлежности наблюдений нормальному закону;

4) получить оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам и на основании сравнительного анализа ука-

зать, применение каких критериев является предпочтительным в тех или иных ситуациях;

5) реализовать возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений (при законах, отличных от нормального) с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Сравнительный анализ мощности критериев в работе проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации, соответствующие наличию тренда в дисперсии [62].

При анализе мощности критериев, предназначенных для обнаружения изменения дисперсии в неизвестной точке, в качестве конкурирующих гипотез (при нормальном распределении случайных величин) рассматривались близкие к H_0 гипотезы, когда в некоторый момент стандартное отклонение увеличивалось на 5, 10, 15%.

Для конкурирующей гипотезы с наличием линейного тренда в характеристиках рассеяния наблюдаемого ряда случайных величин (изменение масштабного параметра) на интервале $t \in [0,1]$ случайные величины будем моделировать в соответствии с соотношением [83]

$$x_i = \xi_i (1 + c t_i),$$

где $c \in (-1, \infty)$, $t_i = (i-1)\Delta t$, $\Delta t = 1/n$ Справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $c = 0$.

В случае наличия периодического тренда в характеристиках рассеяния случайные величины могут моделироваться, в соответствии с соотношением

$$x_i = \xi_i (1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i))$$

при $|d| < 1$. В случае смешанного тренда – в соответствии с выражением

$$x_i = \xi_i (1 + c t_i + d \sin(2k\pi t_i)),$$

при $|d| < 1$, если $c \ge 0$, и при $|d| < 1 + c$, если $c \in (-1, 0)$. Отсутствию периодической составляющей в тренде соответствует значение параметра $d = 0$, а отсутствию линейной – $c = 0$.

При проверке тренда в характеристиках рассеяния в процессе данной работы были исследованы непараметрические критерии Кокса-Стюарта, Фостера-Стюарта, критерии с метками Клотца и Сэвиджа и параметрический критерий Хсу с *H*- и *G*-статистиками. Результаты работы были опубликованы в трудах международных конференций «Актуальные проблемы электронного приборостроения» АПЭП-2016 (на русском и английском языках) [62, 83], “Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach” – AMSA’2015 [63] и Российской НТК «Обработка информации и математическое моделирование» 2015 г. [78].

1.4 Критерии однородности распределений

Близкими по смыслу к критериям проверки гипотез об отсутствии тренда являются критерии однородности. Различают критерии проверки гипотез об однородности законов, критерии однородности средних, критерии однородности дисперсий. В некоторых случаях статистики критериев однородности аналогичны статистикам, используемым в соответствующих критериях проверки гипотез об отсутствии тренда.

Задача проверки гипотезы об однородности законов, соответствующих k выборкам, формулируется следующим образом [94]. Имеется k выборок

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}, \quad \ldots, \quad x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k},$$

где n_i – объём i-й выборки, $i = \overline{1,k}$. Проверяется гипотеза о том, что все выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е.

$$H_0:\ F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) = F(x)$$

при любом x. Конкурирующая гипотеза может иметь вид

$$H_1:\ F_i(x) \neq F_j(x)$$

для некоторых $i \neq j,\ i, j \leq k$.

Как правило, на практике при решении задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) используется либо двухвыборочный критерий Смирнова [75], либо двухвыборочный критерий Лемана–Розенблатта [75, 38]. Предпочтительность использования данных критериев для проверки однородности обсуждалась в [112]. В русскоязычной литературе практически не упоминается применение двухвыборочного критерия Андерсона–Дарлинга [49] (Андерсона–Дарлинга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга [53].

Использование в приложениях *k*-выборочных критериев сдерживается тем, что распределения их статистик неизвестно. В лучшем случае, известны лишь критические значения статистик для соответствующих значений числа сравниваемых выборок *k*, как в случае критерия Андерсона–Дарлинга.

Предложенные в работах Жанга [69, 71] непараметрические критерии со статистиками Z_{K}, Z_{A}, Z_C являются развитием критериев однородности Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга и также позволяют анализировать *k* выборок. Распределений статистик этих критериев также неизвестны и зависят от объёмов выборок. Для преодоления этого недостатка автор критериев изначально предлагал использовать метод Монте–Карло. Учитывая, что критерии однородности Жанга относительно некоторых альтернатив обладают преимуществом в мощности [94], то использование метод Монте–Карло для оценки p_{value} делает применение этих критериев очень перспективным

Исключение в ряду *k*-выборочных критериев составляет лишь критерий однородности χ^2, для которого известны асимптотические распределения статистики при справедливости H_0.

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) постоянно сталкиваются при анализе случайных ошибок средств измерений, при статистическом управлении качеством процессов. Такая задача естественно возникает при проверке средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок измерений не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. При обработке экспериментального материала очень часто эту задачу приходится решать технологам, медикам, биологам [94].

При исследовании k-выборочных критериев проверки гипотез об однородности законов преследовались следующие цели:

1) исследовать реальные свойства распределений статистик k-выборочных критериев Жанга и критерия χ^2 при ограниченных объемах выборок;

2) построить варианты k-выборочных критериев, опирающиеся на применение к совокупности всех возможных пар выборок двух-выборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга, и исследовать распределения статистик этих k-выборочных критериев в зависимости от числа анализируемых выборок;

3) опираясь на результаты статистического моделирования, построить модели, наилучшим образом описывающие предельные распределения k-выборочных вариантов критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга;

4) получить оценки мощности и провести сравнительный анализ рассмотренных k-выборочных критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам;

5) реализовать возможность применения совокупности k-выборочных критериев однородности с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Мощность рассматриваемых критериев однородности законов будет исследоваться методами статистического моделирования относительно трёх видов конкурирующих гипотез [96], связанных с изменением параметра сдвига, с изменением масштаба и относительно ситуации, когда одна из выборок принадлежит близкому, но другому закону (логистическому, а не нормальному).

1.5 О влиянии степени округления данных на свойства критериев

В связи со стремительным ростом накапливаемой информации в последнее время резко возрос интерес к методам анализа больших данных (Big Data), к поиску, извлечению и использованию скрытых в них закономерностей, в том числе вероятностных. При попытках применения для анализа больших выборок классического аппарата прикладной математической статистики сталкиваются со специфическими проблемами, ограничивающими возможности корректного применения методов оценивания и критериев проверки статистических гипотез.

И дело не только в том, что хорошо зарекомендовавшие себя на практике методы и алгоритмы становятся неэффективными (резко возрастает объем вычислений, ухудшается сходимость итерационных алгоритмов оценивания параметров и т.п.). Есть и другие объективные причины, препятствующие корректному применению многих статистических критериев.

Во-первых, многие популярные критерии проверки статистических гипотез не приспособлены даже для анализа выборок порядка тысячи наблюдений, так как информация о распределениях статистик этих критериев при справедливости проверяемой гипотезы представлена лишь краткими таблицами критических значений для некоторых объёмов выборок.

Во-вторых, можно обратить внимание на то, что применение критериев проверки гипотез, для которых известны предельные (асимптотические) распределения статистик, с ростом объёмов выборок всегда приводит к отклонению даже справедливой проверяемой гипотезы. Это характерно, например, для критериев согласия, для множества специальных критериев, применяемых для проверки гипотез о принадлежности выборок нормальному, равномерному и показательному законам и т.п. Корни этой проблемы, как показано в [101], связаны не только и не столько с ростом вычислительных затрат, сколько с ограниченной точностью представления анализируемых данных (с ограниченной точностью измерений). Влияние погрешности округлений на свойства критериев проверки гипотез ранее упоминалось в работах [13, 56, 57, 114].

В работе [101] методами статистического моделирования показано, что в случае регистрации анализируемых измерений с некоторой величиной округления Δ эмпирические распределения статистик $G_N(S_n|H_0)$ непараметрических критериев согласия, построенные при числе имитационных экспериментов N, начиная с некоторого n, при дальнейшем увеличение объема выборки n начинают отклоняться от предельного $G(S|H_0)$ (чем больше величина округления Δ, тем при меньшем n).

Как правило, объёмы выборок в Big Data (принадлежащие некоторому непрерывному закону распределения) практически неограничены, но сами данные представлены с ограниченной точностью (округлены с некоторым Δ). По сути, “нарушается предположение” о том, что наблюдается непрерывная случайная величина.

Как показано в работе в [101], при округлении с точностью до 1 в выборках, принадлежащих стандартному нормальному закону $N(0,1)$, может появляться 9 уникальных значений, при округлении с точностью до $\Delta = 0.1$– порядка 86 уникальных значений, с точностью до $\Delta = 0.01$ – порядка 956, с точностью до $\Delta = 0.001$ – порядка 9 830.

В выборках непрерывной случайной величины наличие повторяющихся наблюдений связано лишь с ограниченной точностью измерений. Поэтому признаком возможного отклонения $G(S_n|H_0)$ от предельного распределения $G(S|H_0)$ может служить присутствие в выборке значительной доли повторяющихся значений. Нелишне заметить, что имеется целый ряд критериев, для которых наличие в выборке даже пары одинаковых значений является основанием для отклонения H_0.

Подобная же проблема препятствуют корректности применения к большим выборкам различных критериев проверки гипотез об однородности (однородности законов, однородности дисперсий, в меньшей степени, однородности средних). В случае критериев однородности причина кроется в неравноточности измерений в сравниваемых выборках.

Для многих задач, возникающих в приложениях, когда данные (измерения) фиксируются с существенной степенью округления, в выборках оказывается относительно много повторяющихся наблюдений. В таких ситуациях реальные распределения $G(S_n|H_0)$ статистик критериев (при данной степени округления Δ) могут быть далёкими от предельных $G(S|H_0)$ распределений и могут существенно отличаться от $G(S_n|H_0)$, имеющих место в ситуации без округления измерений. Причем такая ситуация может наблюдаться и при относительно малых объёмах выборок.

Следует заметить, снижение точности регистрации данных (увеличение степени округления), как правило, приводит к снижению мощности критериев при распознавании близких конкурирующих гипотез.

Из вышесказанного вытекает еще одна цель настоящей работы – исследовать, как степень округления (ограниченная точность измерений) может влиять на свойства (распределения статистик и мощность) рассматриваемых критериев проверки гипотез об отсутствии тренда и критериев однородности при относительно небольших объёмах выборок. Результаты этих исследований имеют существенное значение для обеспечения корректности статистических выводов с использованием рассматриваемых критериев.

Выводы по главе 1

В данной главе были рассмотрены используемые в диссертационной работе основные понятия и определения, применяемые при проверке статистических гипотез.

Сформулированы постановки задач проверки гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния), проверки гипотезы об однородности законов.

Отмечено, что для проверки такого рода гипотез в разное время предложены соответствующие множества параметрических и непараметрических критериев. Однако имеющиеся источники не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев, не содержат четких рекомендаций, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов.

Для уточнения знаний о свойствах, о распределениях статистик и мощности групп критериев, ориентированных на проверку соответствующих гипотез, для обеспечения корректности применения соответствующих критериев, в том числе, в условиях нарушения стандартных предположений, сформулированы общие цели исследований, заключающиеся в следующем.

1) исследовать влияние объема выборок на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0;

2) для критериев с известными предельными распределениями статистик уточнить, начиная с каких значений n, можно использовать асимптотическое (предельное) распределение статистики соответствующего критерия вместо действительного распределения статистики, имеющего место при данном n;

3) для параметрических критериев выяснить, как влияет на распределения статистик (при справедливости H_0) нарушение стандартного предположения о нормальности;

4) получить оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам и на основании сравнительного анализа указать, применение каких критериев является предпочтительным в тех или иных ситуациях;

5) реализовать возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value};

6) исследовать влияние ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев, обеспечить корректность выводов в условиях изменившихся распределений статистик.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОТСУТСТВИИ ТРЕНДА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ

2.1 Введение

В данной главе приводятся результаты исследования методами статистического моделирования распределений статистик критериев, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании. Отмечаются особенности применения, достоинства и недостатки критериев. Для параметрических критериев исследуется поведение распределений статистик в условиях нарушения стандартных предположений о нормальности данных. По результатам сравнительного анализа мощности критериев относительно близких альтернатив, связанных с наличием линейного и периодического тренда в средних значениях, выявляется наиболее предпочтительный критерий.

Анализ мощности критериев проводился в ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда).

В качестве конкурирующих гипотез рассматривались модели с заданием линейного [58, 81] и периодического тренда вида:

$$X_i = a \cdot t_i + b \cdot \sin(2k\pi t_i) + \xi_i ,$$

где ξ_i представляют собой независимые случайные величины, распределённые по заданному закону (например, по стандартному нормальному), $t \in [0,1]$. Справедливой проверяемой гипотезе H_0 в данной модели соответствуют значения параметров $a = 0$, $b = 0$. Отсутствию периодической составляющей тренда соответствует значение параметра $b = 0$, а отсутствию линейной – $a = 0$. Моменты отсчетов t_i вычислялись в соответствии с выражением $t_i = (i-1)\Delta t$, где шаг $\Delta t = 1/n$ связывался с объемом выборки n. При этом, если не указывалась конкретная параметрическая модель закона, псевдослучайные величины ξ_i, генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом.

Мощность критериев исследовалась относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом при заданных значениях параметра a= 0.5; 1.5; 4. Соответствующие конкурирующие гипотезы обозначены в дальнейшем как:

H_1: $X_i = 0.5t_i + \xi_i$;

H_2: $X_i = 1.5t_i + \xi_i$;

H_3: $X_i = 4t_i + \xi_i$.

Примеры реализации временных рядов при тренде с параметром $a = 0.5$ и $a = 4$ и объемах выборки $n = 100$ приведены на рисунке 2.1.

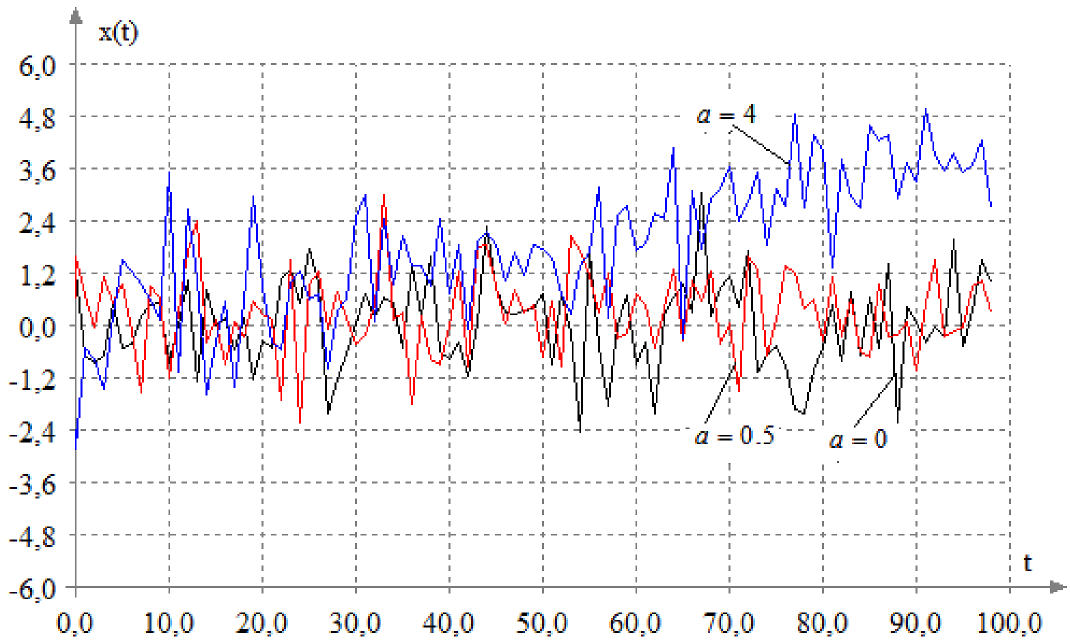


Рисунок 2.1 – Линейный тренд при $a = 0, 0.5, 4$

При анализе мощности относительно периодического тренда в математическом ожидании рассматривались конкурирующие гипотезы:

H_4: $X_i = 0.5\sin(2\pi t_i) + \xi_i$;

H_5: $X_i = 0.25\sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i$;

H_6: $X_i = 0.5\sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i$;

H_7: $X_i = \sin(4 \cdot 2\pi t_i) + \xi_i$.

Примеры реализации временных рядов при справедливости H_0 и H_4 представлены на рисунке 2.2, а при справедливости H_0 и H_7 – на рисунке 2.3.

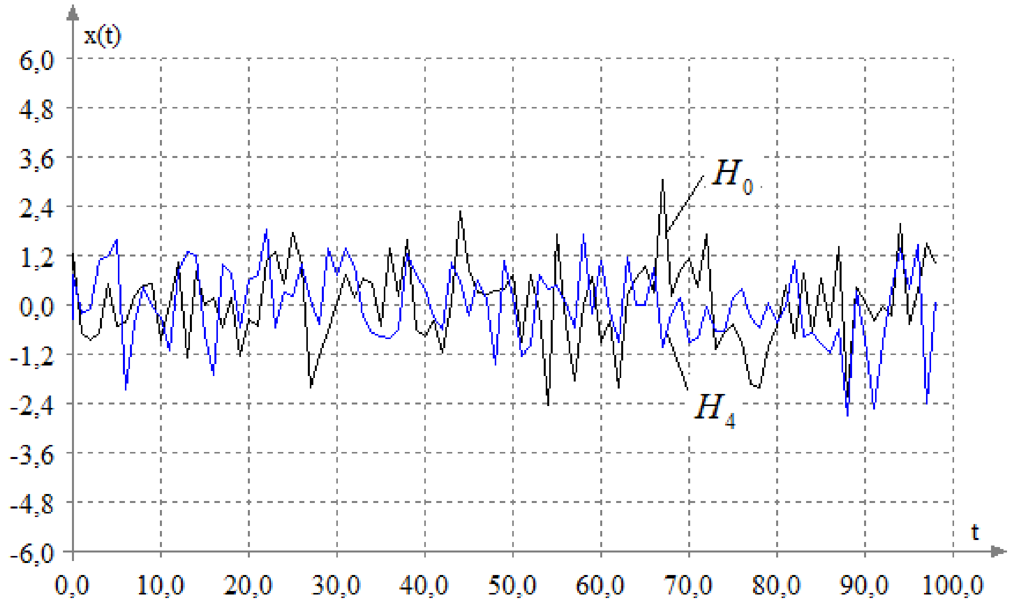


Рисунок 2.2 – Периодический тренд в математическом ожидании при H_4

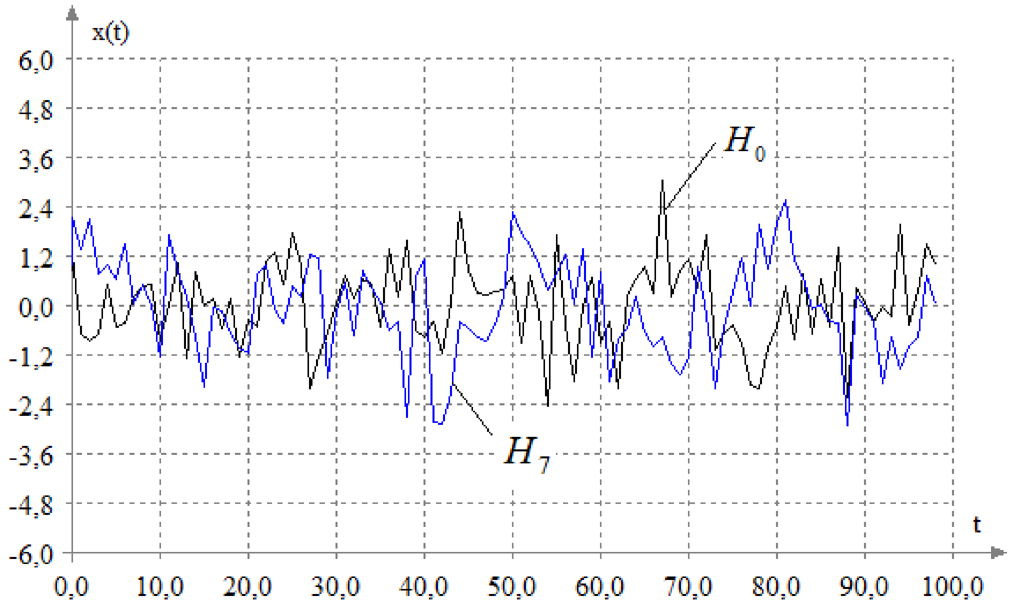


Рисунок 2.3 – Периодический тренд в математическом ожидании при H_7

В разделе 2.2 методами статистического моделирования исследуются свойства и мощность множества параметрических и непараметрических критериев, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании.

2.2 Исследование критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании

2.2.1 Критерий автокорреляции

Наличие коррелированности может говорить о существовании случайной- или неслучайной связи между элементами временного ряда. Если элементы выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ некоррелированы, то значение каждого ее элемента не должно зависеть от величины предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используется критерий со статистикой [37]

$$r_{1,n} = \frac{n\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + nX_1X_n}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}, \qquad (2.1)$$

представляющей собой оценку коэффициента корреляции первого порядка между элементами первичной выборки ($X_1, X_2, ..., X_n$) и элементами выборки, полученной из первичной сдвигом на одну позицию ($X_2, X_3, ..., X_n, X_1$).

При справедливости проверяемой гипотезы статистика $r_{1,n}$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_{1,n}] = -\frac{1}{n-1}, \quad D[r_{1,n}] = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2}.$$

Применяя критерий, обычно используют нормализованную статистику

$$r_{1,n}^* = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}}. \qquad (2.2)$$

Гипотеза о некоррелированности (об отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистик (2.1) и (2.2) соответственно.

Распределение статистики (2.2) быстро сходится к асимптотическому закону. Отличием распределения статистики (2.2) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь при $n > 45$ (см. рис. 2.4), когда реальное распределение статистики практически не отличается от асимптотического [97] (проверка осуществлялась при помощи критериев согласия, см. талб. 2.1).

Таблица 2.1 – Результаты проверки гипотезы согласия распределения статистики критерия автокорреляции (2.2) со стандартным нормальным законом $(n=50)$

Критерий	$r_{1,n}^*$	p_{value}
χ^2 Пирсона	6.2364	0.182
ω^2 Мизеса	0.3012	0.134
Ω^2 Мизеса	2.0797	0.084
Колмогорова	1.2587	0.083

Критерий автокорреляции относится к параметрическим критериям. Это означает, что распределения статистик (2.1) и (2.2) зависят от вида закона распределения вероятностей, которому принадлежат наблюдения (измерения) случайной величины. При нарушении стандартного предположения о принадлежности наблюдений нормальному закону распределения статистик (2.1) и (2.2), соответствующие справедливости проверяемой гипотезы H_0 становятся другими.

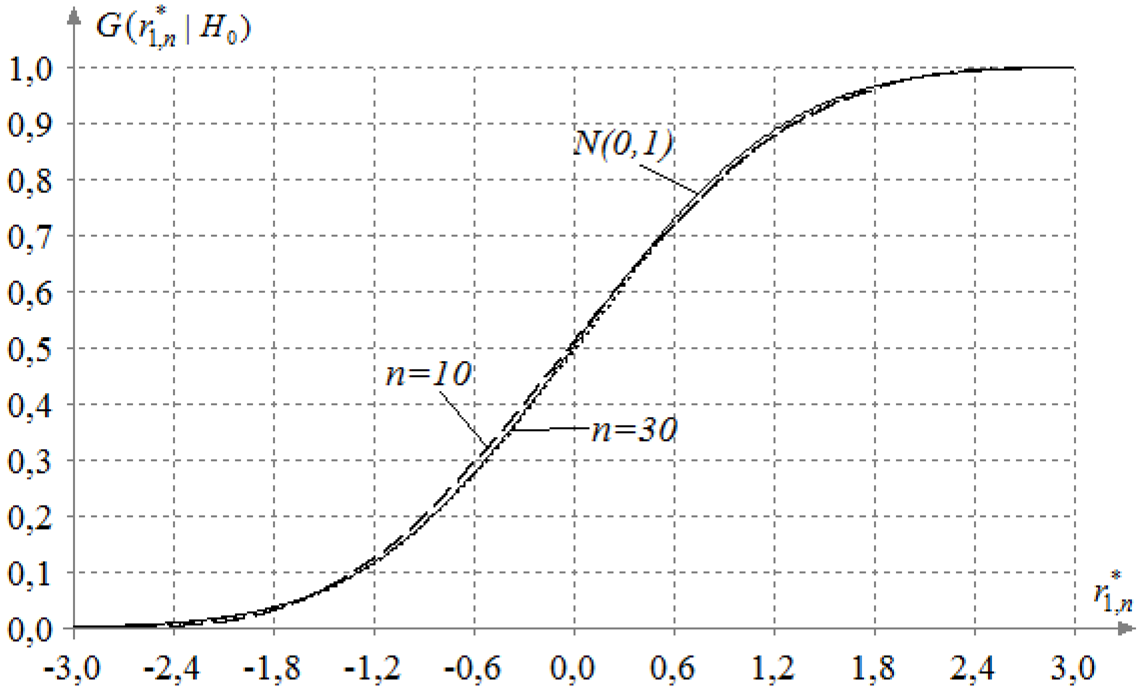


Рисунок 2.4 – Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (2.2) критерия автокорреляции

Распределения статистики (2.2) исследовались для ситуаций принадлежности случайной величины различным законам, в том числе в случае принадлежности наблюдений обобщенному нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right) \tag{2.3}$$

со значениями параметра формы θ_2 =0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 4; 8. При таком изменении параметра вид закона меняется от близкого к распределению Коши, до близкого к равномерному закону. При $\theta_2 = 2$ выражение (2.3) дает плотность нормального закона распределения. Полученные в результате моделирования распределения статистики критерия автокорреляции в случае принадлежности случайной величины законам распределения семейства (2.3) при различных параметрах формы представлены на рисунке 2.5.

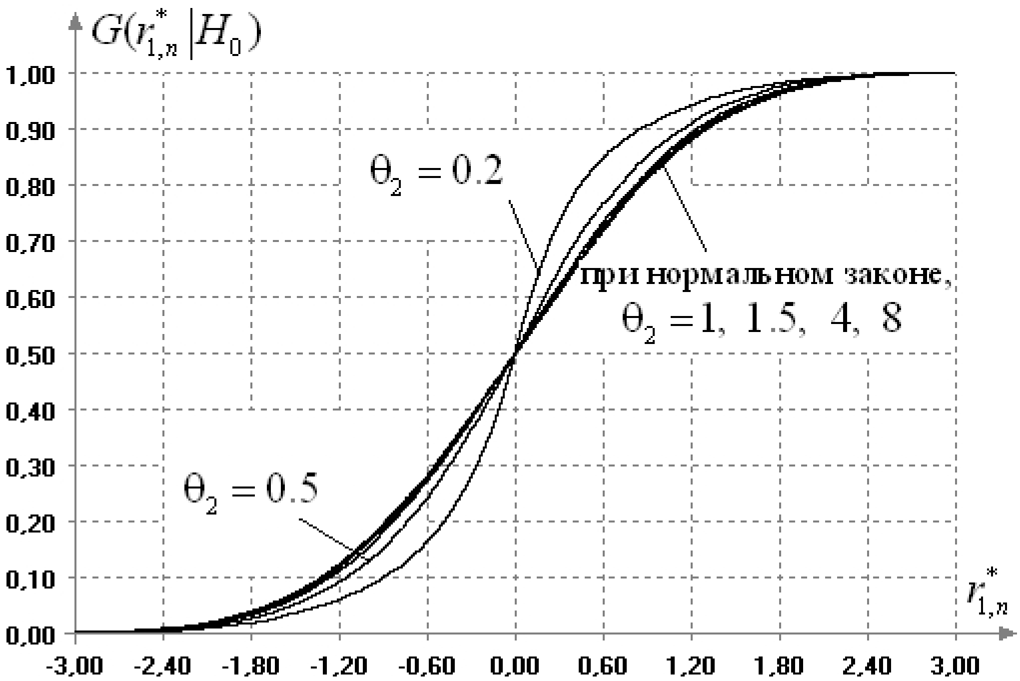


Рисунок 2.5 – Функции распределения статистики критерия автокорреляции в зависимости от параметра формы семейства (2.3) при $n = 25$

Как следует из представленной на рисунке картины, в случае принадлежности выборок $X_1, X_2, ..., X_n$ достаточно широкому кругу законов распределение статистики критерия автокорреляции существенно не отличается от распределения, имеющего место в случае принадлежности выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ нормальному закону. Если закон, которому принадлежат случайные величины, симметричен и с не слишком тяжелыми хвостами, то распределение статистики значимо не отличается от “классического”.

Отметим, что влияние закона распределения случайных величин на распределение статистики критерия автокорреляции такое же, как для критериев, связанных с проверкой гипотез о парной корреляции [102].

При сильной асимметричности закона распределения случайных величин (например, в случае показательного закона) распределение статистики становится отличным от “классического”. В то же время, асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значимо, чем “тяжесть” хвостов. В случае принадлежности выборок $X_1, X_2, ..., X_n$ асимметричным законам экстремальных значений (минимального или максимального) распределения статистики практически не отличаются от “классического”.

Аналогичную картину можно наблюдать для параметрических критериев, используемых при проверке гипотез об однородности средних, также проявляющих устойчивость к отклонениям от нормального закона распределения. Там тоже исключение имеет место для законов с «тяжелыми» хвостами и для ассиметричных законов [42, 100, 107, 108].

Оценки мощности критерия автокорреляции, полученные относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$ представлены в таблице 2.2.

Конкурирующие гипотезы $H_1 - H_7$ соответствуют наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании. В таблице приведены оценки мощности при объёмах выборок $n = 10, 25, 50, 100, 200, 300$ для заданных вероятностей ошибок 1-го рода $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$.

Оценки мощности для всех рассматриваемых в диссертации критериев получены при числе имитационных экспериментов $N = 10^6$.

Таблица 2.2 – Мощность критерия автокорреляции относительно гипотез $H_1 - H_7$

n	α	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.1	0.103	0.126	0.295	0.141	0.102	0.113	0.120
	0.05	0.051	0.066	0.175	0.077	0.051	0.056	0.104
	0.025	0.026	0.034	0.097	0.041	0.025	0.026	0.049
	0.01	0.011	0.015	0.043	0.018	0.010	0.009	0.014
25	0.1	0.105	0.191	0.837	0.180	0.098	0.102	0.216
	0.05	0.053	0.115	0.739	0.108	0.048	0.049	0.107
	0.025	0.027	0.070	0.631	0.065	0.0238	0.0236	0.048
	0.01	0.011	0.035	0.483	0.033	0.009	0.008	0.014
50	0.1	0.108	0.288	0.993	0.1	0.228	0.112	0.197
	0.05	0.056	0.194	0.985	0.05	0.147	0.058	0.120
	0.025	0.029	0.128	0.969	0.025	0.093	0.030	0.072
	0.01	0.012	0.073	0.935	0.01	0.05	0.013	0.036
100	0.1	0.113	0.455	1.000	0.320	0.123	0.308	0.950
	0.05	0.058	0.342	1.000	0.221	0.066	0.210	0.912
	0.025	0.030	0.251	1.000	0.150	0.036	0.141	0.862
	0.01	0.013	0.163	1.000	0.090	0.016	0.082	0.781
200	0.1	0.119	0.696	1.000	0.479	0.139	0.474	0.999
	0.05	0.064	0.588	1.000	0.364	0.078	0.359	0.997
	0.025	0.034	0.483	1.000	0.270	0.043	0.265	0.993
	0.01	0.015	0.360	1.000	0.176	0.020	0.172	0.983
300	0.1	0.126	0.838	1.000	0.609	0.155	0.606	1.000
	0.05	0.069	0.757	1.000	0.493	0.089	0.490	1.000
	0.025	0.037	0.669	1.000	0.390	0.051	0.387	1.000
	0.01	0.016	0.550	1.000	0.276	0.024	0.274	0.999

2.2.2 Критерий Морана

Статистика критерия Морана представляет собой одно из нормализующих преобразований статистики критерия автокорреляции (2.1) [48]:

$$r_{1,n}^{M} = (n-1)^{1/2} \frac{n r_{1,n} + 1}{n-2}. \tag{2.4}$$

Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших и малых значениях этой статистики.

Исследование распределений статистики (2.4) при справедливости проверяемой гипотезы в зависимости от объема анализируемых выборок в случае выполнения предположения о нормальности показало, что эти распределения достаточно хорошо согласуются со стандартным нормальным законом при $n > 50$ (см. рис. 2.6).

Проведенные исследования показали, что мощность критерия Морана эквивалентна мощности исходного критерия автокорреляции.

Распределения статистики критерия Морана (как и исходного критерия автокорреляции) зависят от вида закона, которому принадлежит анализируемая выборка, но достаточно устойчивы к нарушению предположения о принадлежности наблюдаемой случайной величины нормальному закону. Характер зависимости распределений статистики от вида наблюдаемого закона аналогичен зависимости распределения статистики (2.2): на отклонение распределения статистики от имеющего место при нормальном законе влияет асимметричность и "тяжелые хвосты" закона, соответствующего анализируемой выборке. В качестве примера на рисунке 2.7 показано распределение статистики Морана в случае принадлежности наблюдаемых величин семейству (2.3) с параметром формы $\theta_2 = 0.5$.

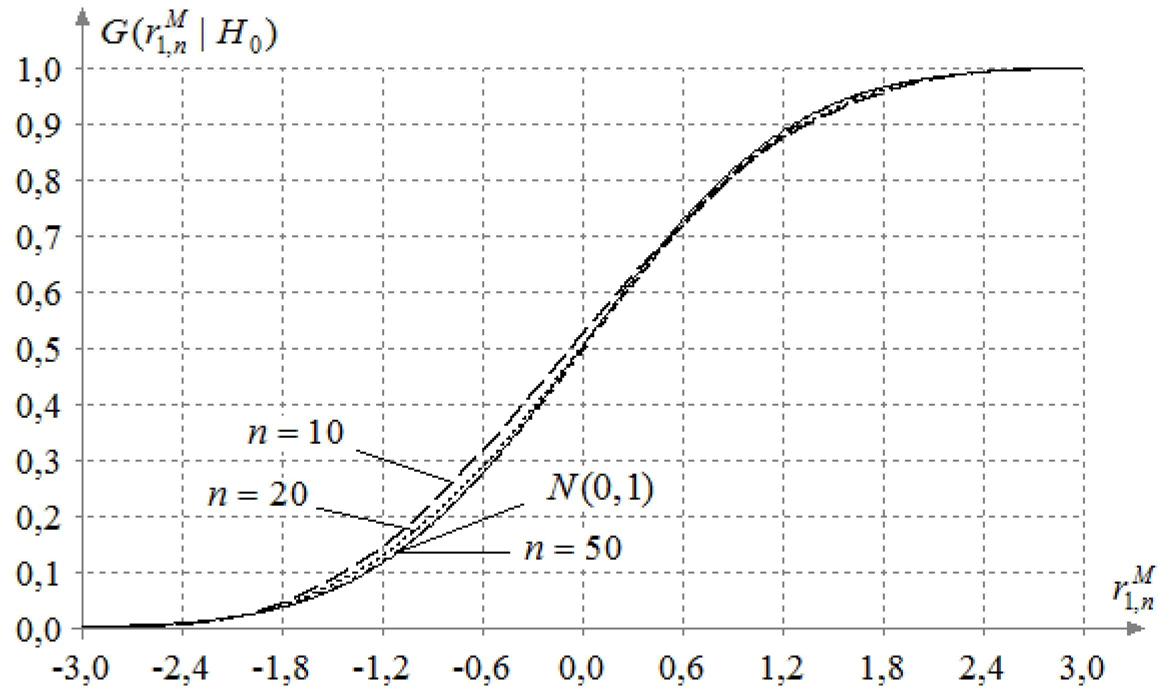


Рисунок 2.6 – Сходимость распределения статистики критерия Морана к стандартному нормальному закону

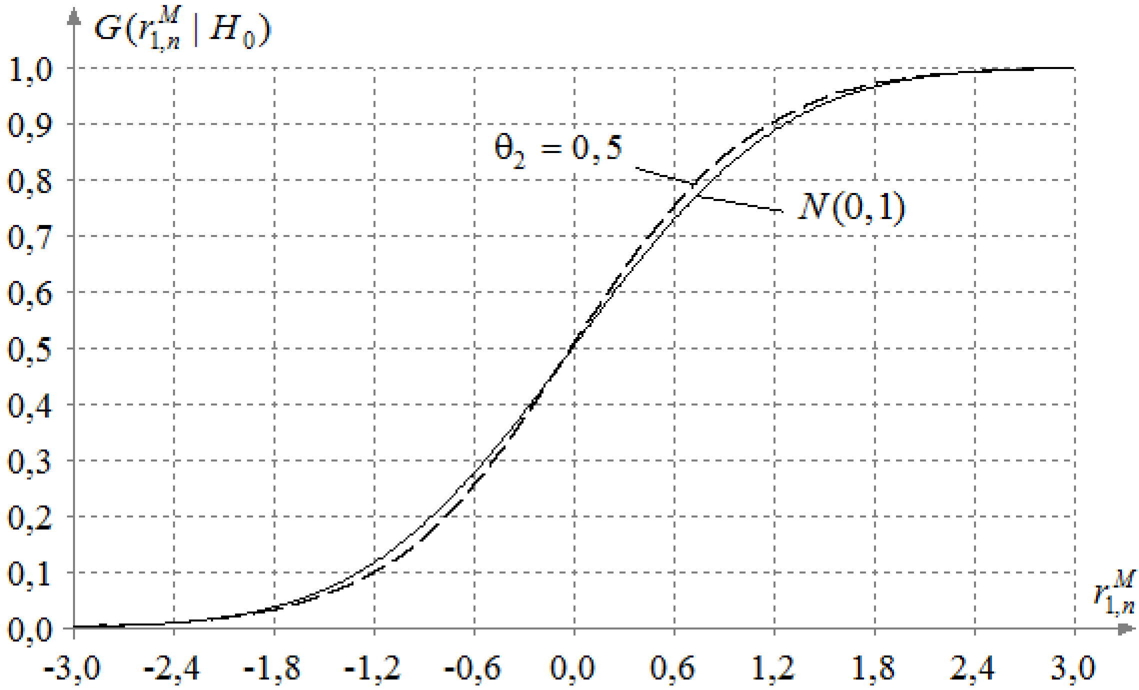


Рисунок 2.7 – Распределение статистики критерия Морана в случае семейства (2.3) с параметром формы $\theta_2 = 0.5$ при $n = 100$

2.2.3 Критерий Люнга–Бокса

Статистика критерия Люнга–Бокса представляет собой другое нормализующее преобразование статистики (2.1) [88]:

$$r_{1,n}^{LB} = \left[\frac{n(n+2)}{n-1} \right]^{1/2} r_{1,n} . \qquad (2.5)$$

Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших и малых значениях статистики.

Исследование распределения данной статистики показало, что оно *очень медленно сходится* к стандартному нормальному закону (см. рис. 2.8), в связи с чем использование последнего для определения достигаемого уровня значимости при ограниченных объёмах выборок приводит к большим ошибкам, что в свою очередь может являться причиной неверных выводов.

Как и исходный критерий автокорреляции, критерий Люнга–Бокса относится к параметрическим критериям, поэтому распределение его статистики зависит от закона, которому принадлежат анализируемые выборки. Эта зависимость аналогична той, что демонстрируется на рисунке 2.8.

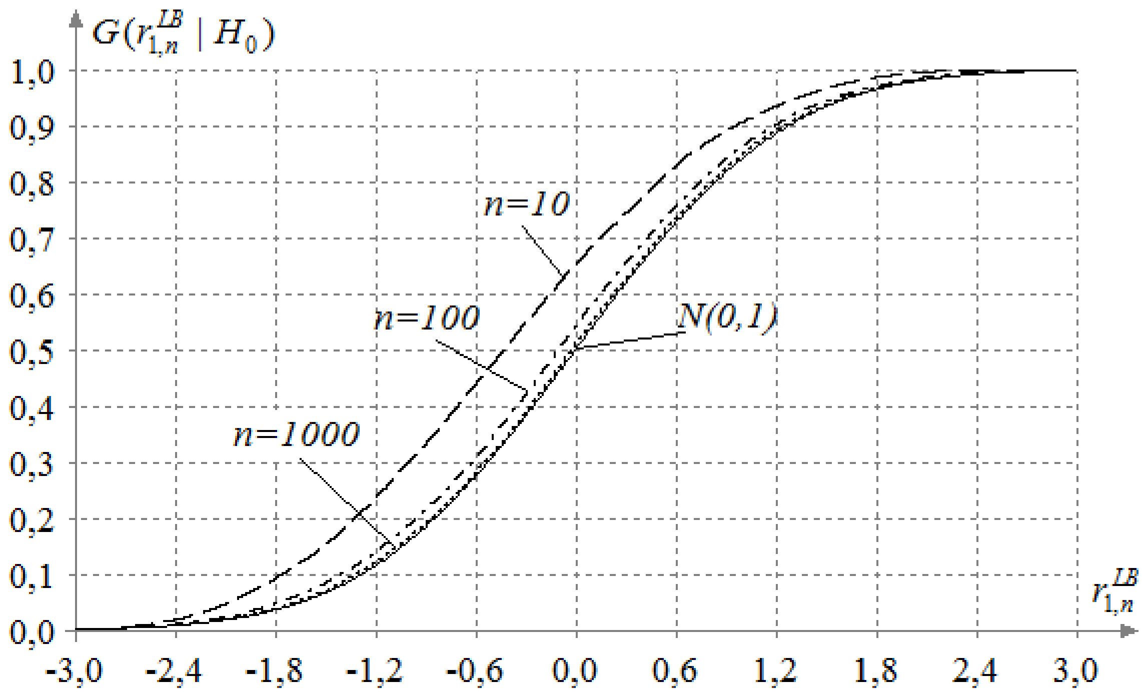


Рисунок 2.8 – Сходимость распределения статистики критерия Люнга–Бокса к стандартному нормальному закону

Плохая сходимость распределения статистики (2.5) к стандартному нормальному закону, используемому для вычисления достигаемого уровня значимости, делает нецелесообразной рекомендацию применения критерия Люнга–Бокса в приложениях.

Мощность критерия Люнга–Бокса эквивалентна мощности исходного критерия автокорреляции и критерия Морана.

2.2.4 Критерий Дюффа–Роя

Статистика критерия Дюффа–Роя представляет собой наиболее удачное нормализующее преобразование статистики (2.1) критерия автокорреляции [14]:

$$r_{1,n}^{DR} = \left[\frac{n-1}{n(n-2)} \right]^{1/2} (n r_{1,n} + 1). \qquad (2.6)$$

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

В диссертационной работе было получено, что при выполнении предположения о нормальности анализируемых выборок и справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда распределение статистики Дюффа–Роя быстро сходится к стандартному нормальному закону. Отличием распределения статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь при $n > 17$. Сходимость распределения статистики (2.6) к стандартному нормальному закону демонстрирует рисунок 2.9.

Критерии Морана, Дюффа–Роя и Люнга–Бокса являются модификациями критерия автокорреляции и обладают эквивалентными свойствами. При использовании реальных распределений статистик критериев результат проверки гипотезы по всем критериям приведет к одному и тому же достигаемому уровню значимости (p_{value}). Численные исследования подтверждают, что относительно заданных конкурирующих гипотез эти критерии обладают одинаковой мощностью.

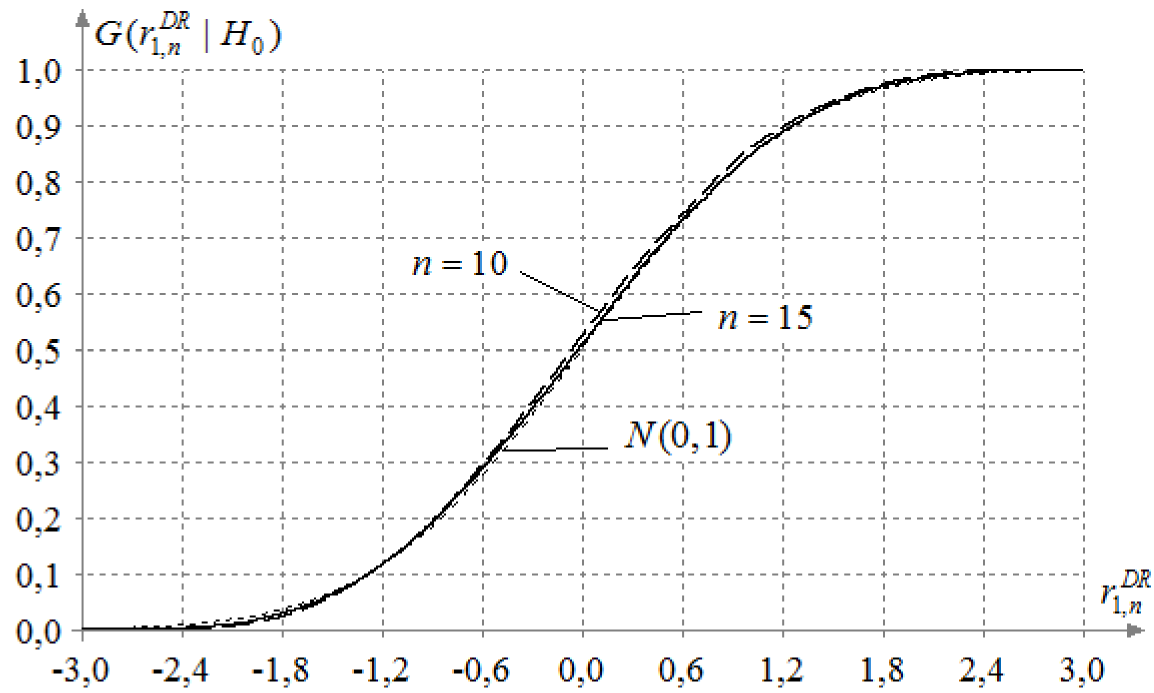


Рисунок 2.9 – Сходимость распределения статистики критерия Дюффа–Роя к стандартному нормальному закону

Так как распределение статистики Дюффа–Роя быстрее распределений статистик других модификаций сходится к стандартному нормальному закону, то целесообразно рекомендовать применение именно этой модификации.

Мощность критерия Дюффа–Роя эквивалентна мощности исходного критерия автокорреляции и мощности критериев Морана и Люнга–Бокса.

2.2.5 Модификация критерия автокорреляции

В работе [37] рассматривается модификация критерия автокорреляции, статистика которого представляет собой сумму оценок коэффициентов корреляции первого и второго порядков:

$$r_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \bar{X})(X_{i+1} - \bar{X}) + \sum_{i=1}^{n-2}(X_i - \bar{X})(X_{i+2} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \qquad (2.7)$$

При справедливой проверяемой гипотезе распределение статистики (2.7) асимптотически нормально со средним $E[r_{1,2}]$ и дисперсией $D[r_{1,2}]$, где

$$E[r_{1,2}] = -\frac{2n-3}{n(n-1)}, \qquad D[r_{1,2}] = \frac{2n^4 - 13n^3 + 15n^2 + 28n - 34}{n^2(n+1)(n-1)^2}.$$

Нормализованная статистика имеет вид

$$r_{1,2}^* = \frac{r_{1,2} - E[r_{1,2}]}{\sqrt{D[r_{1,2}]}}. \qquad (2.8)$$

Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

Сходимость распределения статистики (2.8) к стандартному нормальному закону N(0,1) при выполнении стандартного предположения о нормальности анализируемых данных иллюстрирует рисунок 2.10. Для разборчивости на рисунке не приведены распределения статистик при объемах выборок больше 100.

Проведенные в диссертационной работе исследования показали, что распределение статистики (2.8) не очень хорошо сходится к асимптотическому закону. Отличием распределения статистики (2.8) от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 200$, когда не отвергается гипотеза о согласии распределения статистики со стандартным нормальным законом. Проверка согласия полученных эмпирических распределений с нормальным законом осуществлялась в соответствии с [85, 116, 104, 117]. При меньших объемах выборок использование стандартного нормального закона в качестве распределения статистики может приводить к существенным ошибкам при вычислении достигнутого уровня значимости (p_{value}).

Это параметрический критерий и распределения его статистики также зависят от вида наблюдаемого закона случайных величин. Характер этой зависимости аналогичен картине, показанной на рисунке 2.4 для критерия автокорреляции. Существенные отклонения распределения статистики (2.8) от имеющих место при нормально распределенных случайных величинах проявляются в случае принадлежности наблюдений асимметричным законам или законам с «тяжёлыми хвостами».

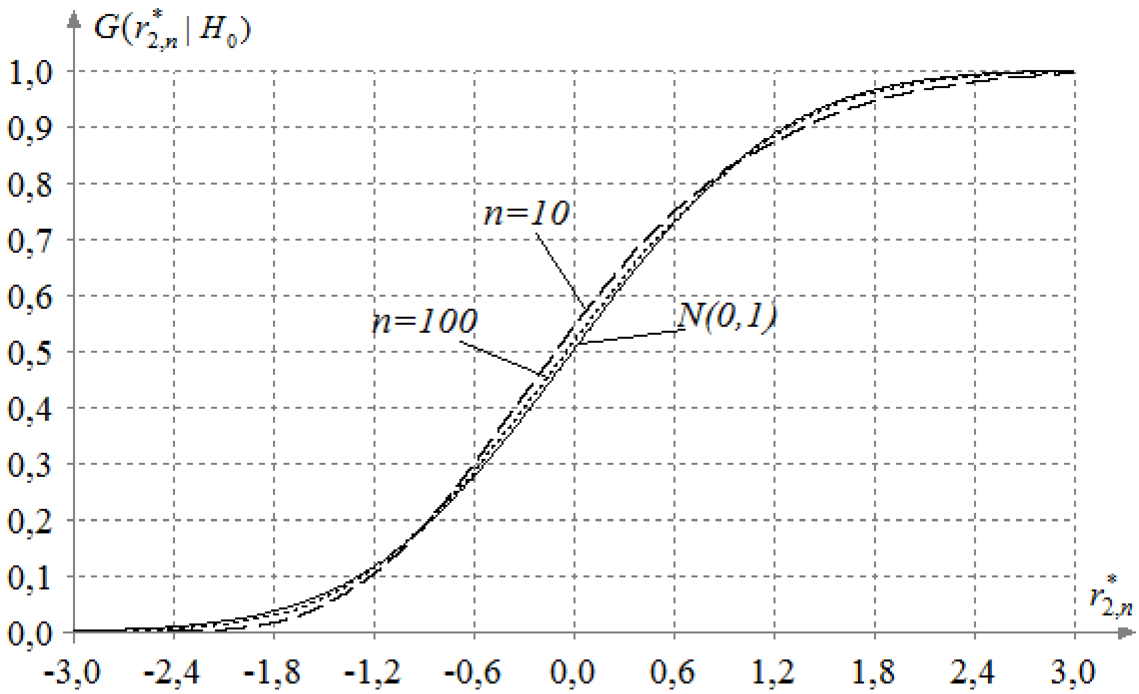


Рисунок 2.10 – Сходимость к $\mathrm{N}(0,1)$ распределения статистики (2.8)

В приложении А в таблицах А.1 и А.2 представлены оценки мощности модифицированного критерия автокорреляции относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании.

2.2.6 Критерий Вальда–Вольфовица

Статистика критерия Вальда–Вольфовица, предложенная в [66], основана на коэффициенте сериальной корреляции и имеет вид

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} + X_n X_1 .$$

Величина R_1 распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием

$$E[R_1] = (S_1^2 - S_2) / (n-1)$$

и дисперсией

$$D[R_1] = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4S_1^2 S_2 + 4S_1 S_3 + S_2^2 - 2S_4}{(n-1)(n-2)} - \frac{(S_1^2 - S_2)^2}{(n-1)^2},$$

где $S_r = X_1^r + ... + X_n^r$.

Нормализованная статистика

$$R_1^* = \frac{R_1 - E[R_1]}{\sqrt{D[R_1]}} \tag{2.9}$$

асимптотически распределена по стандартному нормальному закону $N(0,1)$.

Критерий Вальда–Вольфовица – двусторонний, гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики.

Проведенное в диссертационной работе исследование распределений статистики (2.9) в зависимости от объема выборки для случая выполнения предположения о нормальности анализируемых выборок показало быструю сходимость распределения статистики R_1^* к стандартному нормальному закону (см.

рис. 2.11). При объёмах выборок $n > 20$ отклонением распределения статистики (2.9) от стандартного нормального закона можно пренебречь.

Критерий Вальда–Вольфовица относится к параметрическим критериям. При нарушении основного предположения о нормальности анализируемых выборок распределение статистики (2.9) отличается от стандартного нормального закона. В качестве примера на рисунке 2.12 показаны распределения статистики (2.9) критерия Вальда–Вольфовица в случае принадлежности выборок семейству (2.3) со значениями параметра формы $\theta_2 = 0.2, 0.5, 1, 2, 4, 8$ при объеме выборок $n = 25$.

В то же время можно сделать вывод об относительной устойчивости критерия по отношению к отклонениям анализируемых данных от нормального закона. Лишь при асимметричности наблюдаемых законов и “тяжелых хвостах” при использовании данного критерия нельзя пренебрегать нарушением этого стандартного предположения.

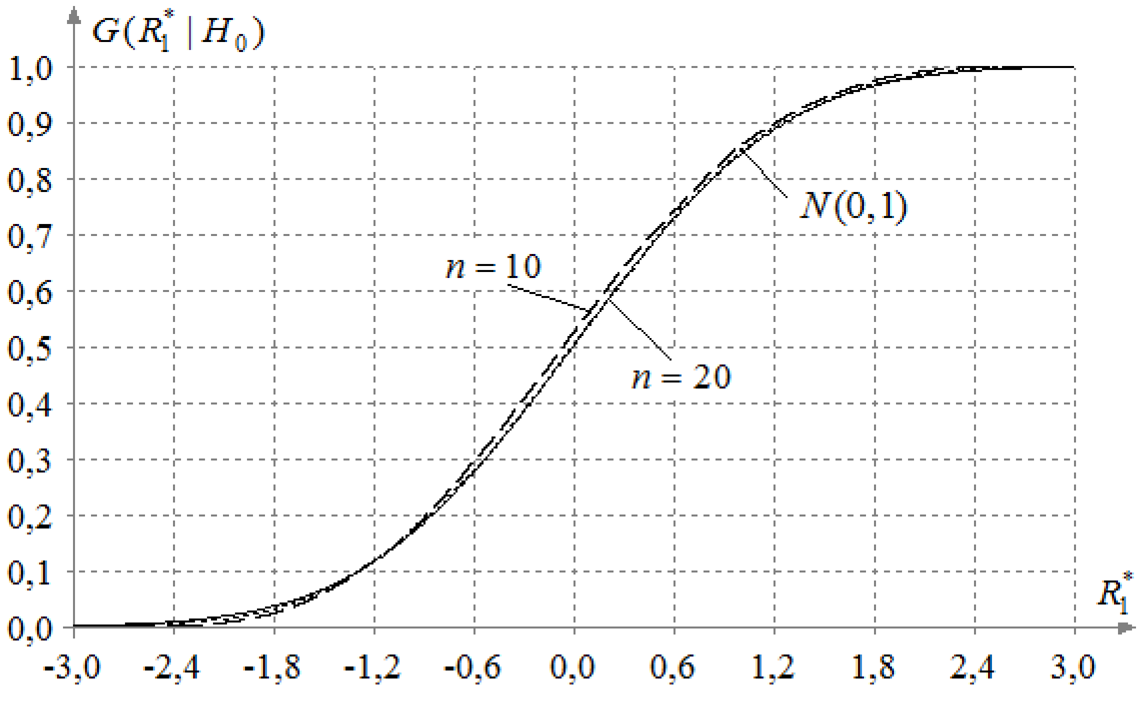


Рисунок 2.11 – Сходимость распределения статистики (2.9) критерия Вальда–Вольфовица к стандартному нормальному закону

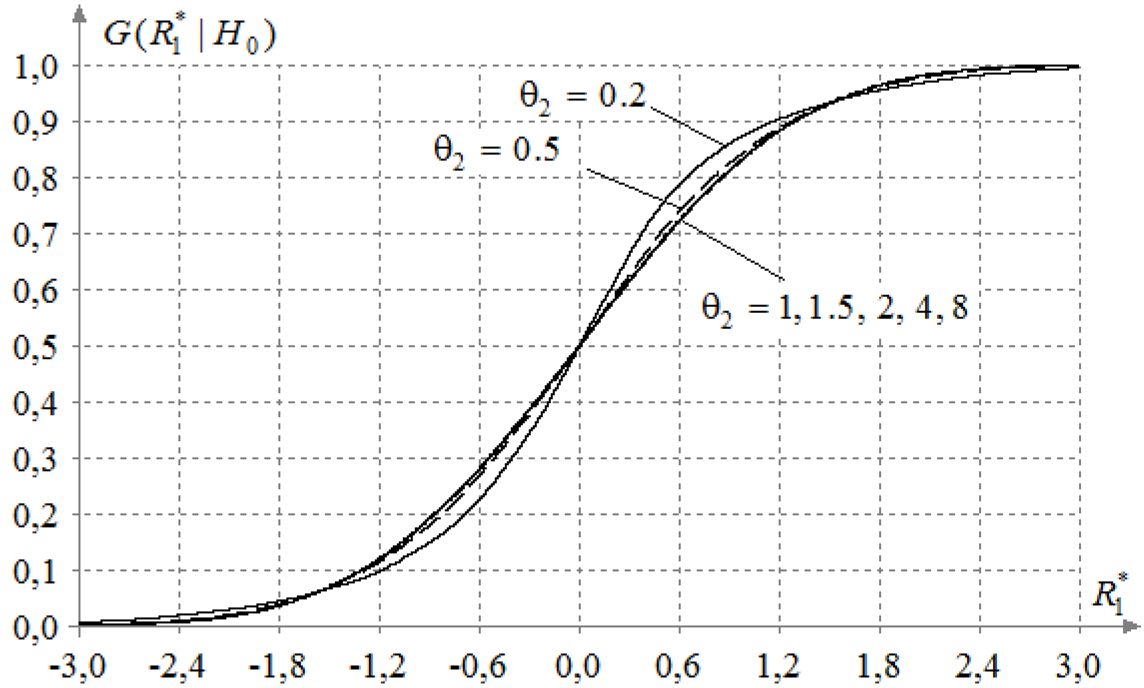


Рисунок 2.12 – Функции распределения статистики (2.9) критерия Вальда–Вольфовица в зависимости от параметра формы семейства (2.3) при $n = 25$

Заметим, что такая устойчивость характерна для многих параметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии корреляционных связей, или на проверку гипотез о математических ожиданиях, или на проверку гипотез о равенстве (об однородности) математических ожиданий случайных величин, соответствующих различным выборкам.

Оценки мощности критерия Вальда–Вольфовица относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблице А.3 и А.4 в приложении А. Можно отметить, что оценки мощности этого критерия не превосходят и практически совпадают с оценками мощности критерия автокорреляции.

2.2.7 Ранговый критерий Вальда–Вольфовица

В работе [66] была отмечена возможность построения непараметрического аналога сериального коэффициента корреляции. Пусть по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ построен вариационный ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$ (упорядоченный по возрастанию ряд элементов исходной выборки $X_1, X_2, ..., X_n$). Тогда рангом R_i измерения X_i является его номер в вариационном ряду.

Статистика рангового критерия сериальной корреляции Вальда–Вольфовица имеет вид [66]:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} \left(R_i - \frac{n+1}{2} \right) \left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2} \right). \qquad (2.10)$$

Распределение статистики (2.10) асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[R] = 0, \qquad D[R] = \frac{n^2 (n+1)(n-3)(5n+6)}{720}.$$

Критерий двусторонний, гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$R^* = \frac{R}{\sqrt{D[R]}}. \qquad (2.11)$$

Результаты статистического моделирования, проведенного автором диссертационной работы, показали, что дискретностью распределения статистики практически можно пренебречь. В то же время эти результаты показали, что распределения статистики (2.11) при ограниченных объёмах выборок существенно смещены относительно стандартного нормального закона и *очень медленно сходятся* к последнему (см. рис. 2.13).

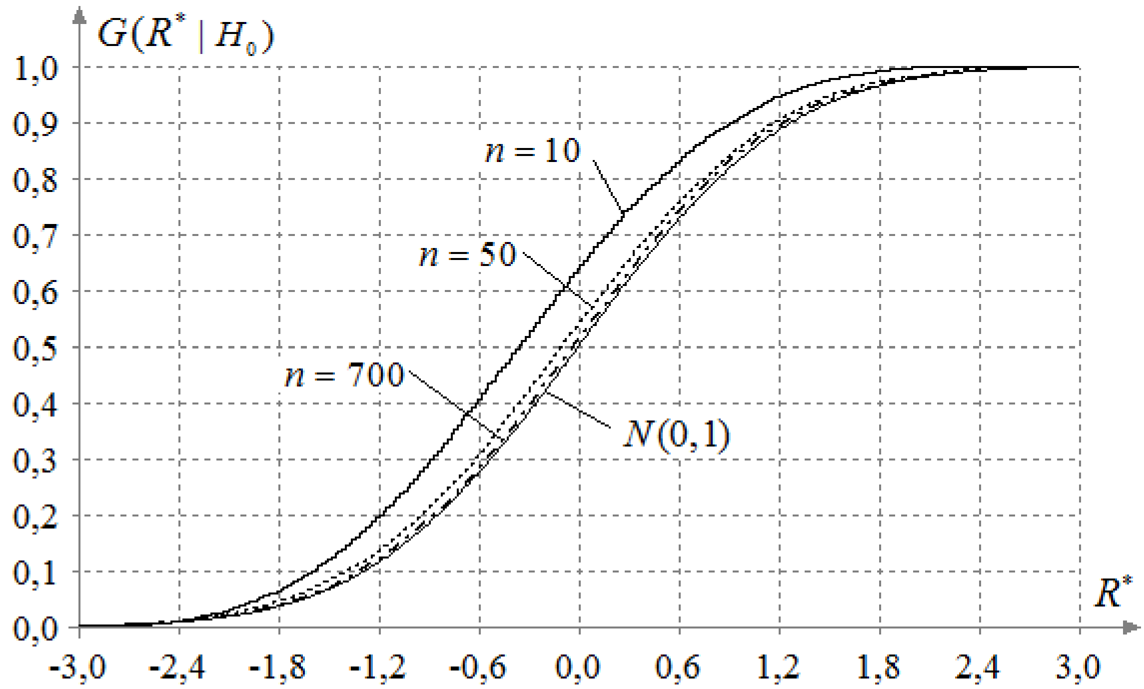


Рисунок 2.13 – Сходимость распределения статистики (2.11) к стандартному нормальному закону

Это означает, что при ограниченных объёмах выборок использование стандартного нормального закона для вычисления достигнутого уровня значимости (p_{value}) может приводить к неверному выводу относительно результатов проверки гипотезы.

Результаты исследования распределений статистики (2.11) при различных объемах выборок n, выполненные с использованием методов статистического моделирования, позволили автору диссертационной работы предложить [77] следующую модификацию статистики

$$R^{**} = R^{*} + 1.1216 n^{-0.523}. \tag{2.12}$$

Распределение модифицированной статистики (2.12) хорошо описывается стандартным нормальным законом уже при $n > 10$ (см. рис. 2.14).

Использование в ранговом критерии Вальда–Вольфовица модифицированной статистики (2.12) ликвидирует отмеченный выше (очень существенный) недостаток критерия со статистикой (2.11).

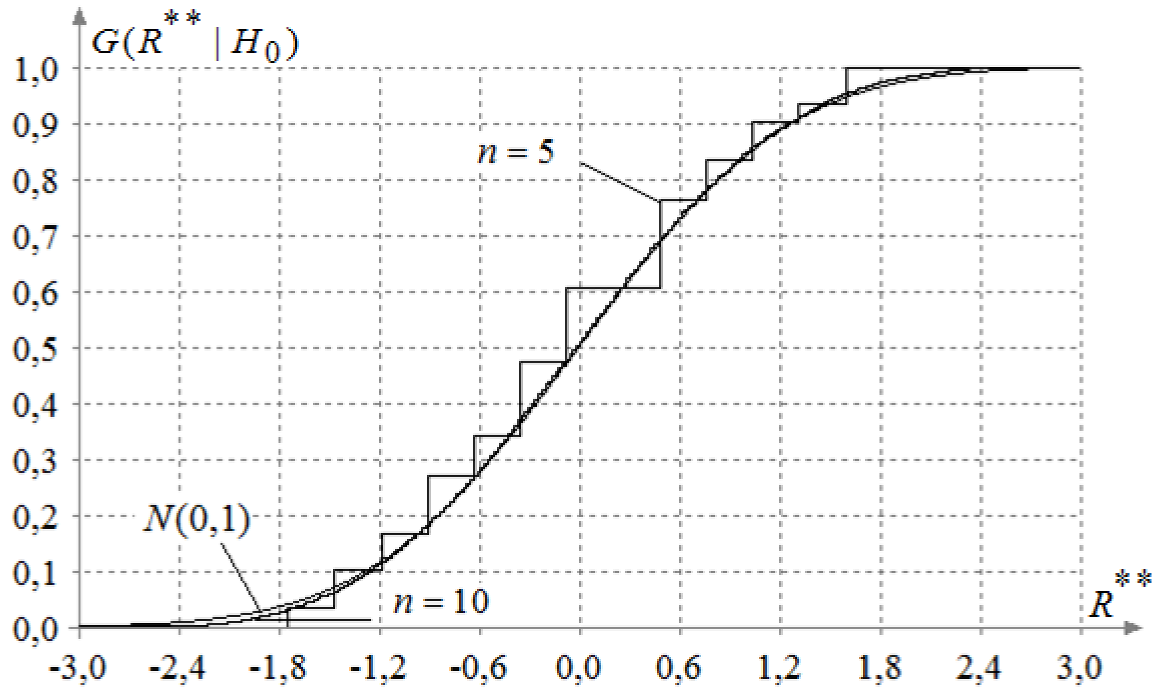


Рисунок 2.14 – Сходимость распределения статистики (2.12) к стандартному нормальному закону

Оценки мощности рангового критерия Вальда–Вольфовица относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблице А.5 и А.6 в приложении А.

Ранговый критерий показывает мощность даже несколько выше мощности критерия Вальда–Вольфовица.

2.2.8 Ранговый критерий Дюффа–Роя

В [13] предложен непараметрический аналог критерия автокорреляции, статистика которого имеет вид:

$$r_1 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)^2, \tag{2.13}$$

Распределение статистики (2.13) асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_1] = -\frac{1}{n}, \;\; D[r_1] = \frac{5n^3 - 19n^2 + 10n + 16}{5n^2(n-1)^2}.$$

Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$r_1^* = \frac{r_1 - E[r_1]}{\sqrt{D[r_1]}}. \tag{2.14}$$

Результаты моделирования показали, что при справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда распределение статистики рангового критерия Дюффа–Роя быстро сходится к стандартному нормальному закону. Отличие распределения статистики (2.14) от стандартного нормального закона можно не учитывать при $n > 17$. Дискретностью же распределения статистики можно практически пренебречь при $n > 10$.

Данный критерий по мощности эквивалентен ранговому критерию Вальда–Вольфовица: они обладают одинаковой мощностью и результаты проверки гипотезы приводят к одинаковым значениям p_{value}.

2.2.9 Критерий Бартелса

Пусть R_i – ранг наблюдения X_i в последовательности n измерений $X_1, X_2, ..., X_n$.

Статистика рангового критерия, предложенного Бартелсом [5], имеет вид

$$B = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - R_{i+1}\right)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)^2. \tag{2.15}$$

Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях нормализованной статистики

$$B^* = \frac{B - E[B]}{\sqrt{D[B]}} = \frac{B - 2}{2\sqrt{5/(5n+7)}} \tag{2.16}$$

которая в условиях отсутствия тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

Проведенные в диссертационной работе исследования показали, что распределение статистики (2.16) достаточно быстро сходится к стандартному нормальному закону (см. рис. 2.15) и практически при $n>10$ отличием его от стандартного нормального закона можно пренебречь.

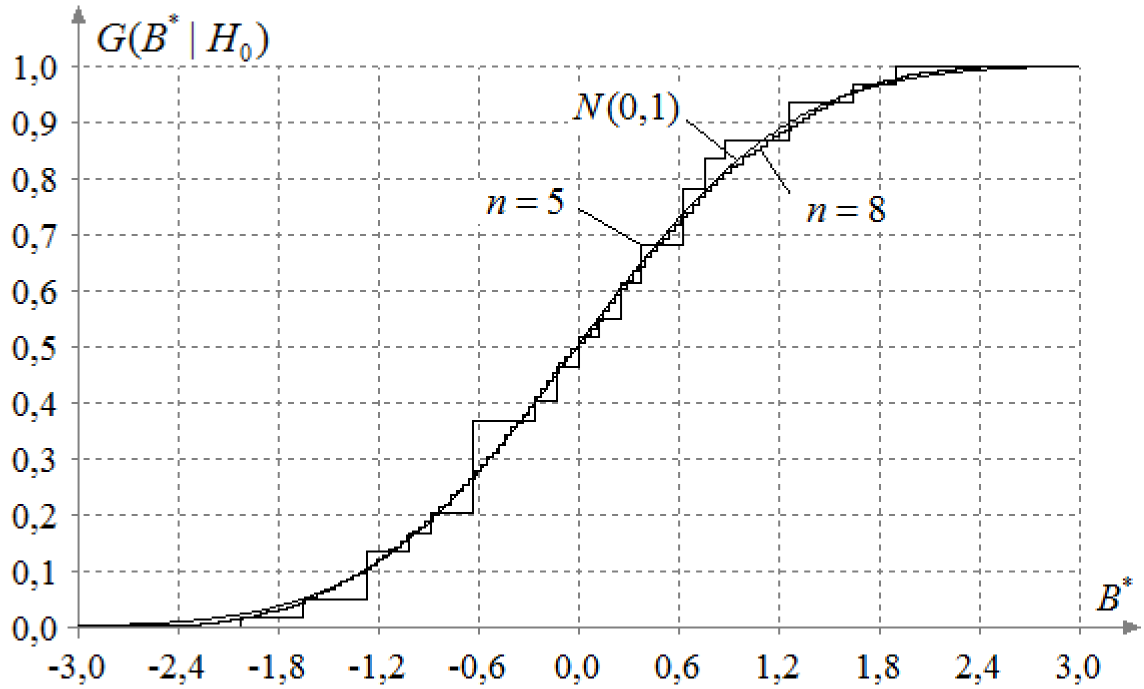


Рисунок 2.15 – Сходимость распределения статистики (2.16) к $N(0,1)$

Оценки мощности критерия Бартелса относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.7 и А.8 в приложении А.

Так как распределения статистики критерия Бартелса обладают существенной дискретностью, представленные в таблицах оценки мощности получены при аппроксимации дискретных распределений непрерывными. Как правило, эмпирические распределения статистик, полученные в результате моделировании в условиях справедливости проверяемой или конкурирующих гипотез, наилучшим образом приближались нормальным законом. Таким образом, в таблице представлены оценки «асимптотической мощности». Это позволяет сравнивать оценки мощности критерия Бартелса с мощностью других критериев. Подобный приём использован при вычислении оценок мощности ряда других критериев, распределения статистик которых обладают ярко выраженной дискретностью (Фостера–Стюарта, Кокса–Стюарта, сериальных критериев).

2.2.10 Критерий кумулятивной суммы

Данный непараметрический критерий проверки отсутствия тренда основан на сумме [47, 68]

$$V = \sum_{i=0}^{n} \delta(X_i - \tilde{X}), \tag{2.17}$$

где $\tilde{X}$ - выборочная медиана и $\delta(z)=1$, если $z \geq 0$, иначе $\delta(z)=-1$. Оценка $\tilde{X}$ находится по вариационному ряду $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$, соответствующему исходной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$: при n четном $\tilde{X} = (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2$; при n нечетном $\tilde{X} = x_{((n-1)/2+1)}$.

Статистикой критерия CS является число переходов через ноль суммы V. Критерий кумулятивной суммы является двусторонним: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $CS_{\alpha/2} \leq CS \leq CS_{1-\alpha/2}$. Критические значения статистики в виде $V_1 = CS_{\alpha/2}$ и $V_2 = CS_{1-\alpha/2}$ для заданных уровней значимости α = 0.1, 0.05, 0.01, полученные в результате статистического моделирования в данной работе, расширяющие таблицу, приведенную в [47], представлены в таблице А.9 приложения А. Решение отклонить гипотезу принимается при большом (большие значения статистики могут являться результатом наличия какой-то детерминированной зависимости) или малом (это может быть связано с наличием тренда во входных данных) числе переходов суммы V через ноль.

Как показано на рисунке 2.16, распределения статистики CS числа переходов кумулятивной суммы (2.17) через ноль отличаются большой дискретностью и сильно зависят от объема выборки. С этим связаны определённые проблемы применения критерия, так как для формирования корректного вывода о результатах проверки необходимо знание распределения и возможность вычисления достигнутого уровня значимости по этому распределению. При наличии только таблицы процентных точек такая возможность отсутствует.

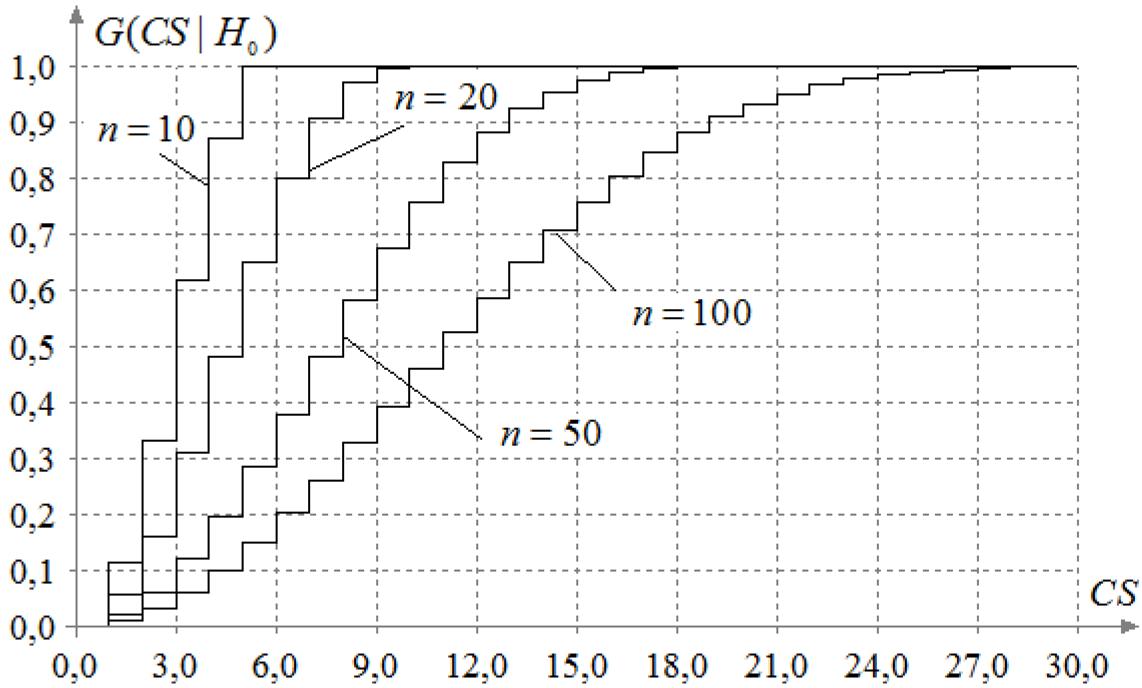


Рисунок 2.16 – Функции распределения статистики переходов кумулятивной суммы (2.17) через ноль при различных объемах выборок

Оценки мощности критерия кумулятивной суммы относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.10 и А.11 в приложении А.

2.2.11 Знаково-ранговый критерий Холлина

В работах [28, 27, 30, 31, 29] рассмотрены проблемы использования рангов в критериях проверки гипотез об отсутствии тренда. В [29] предложено некоторое обобщение рангового критерия Вальда–Вольфовица и знакового критерия кумулятивной суммы. Предложенный Холлиным знаково-ранговый критерий основан на статистике

$$r = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=2}^{n} \delta\left[(X_i - \tilde{X})(X_{i-1} - \tilde{X}) \right] R_i R_{i-1}, \qquad (2.18)$$

где k – коэффициент, зависящий от объема выборки (рекомендуемые автором значения k приведены в таблице 2.3); $\tilde{X}$ – выборочная медиана, определяемая по вариационному ряду $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, построенному по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ (при n четном $\tilde{X} = (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2$, при n нечетном $\tilde{X} = x_{((n-1)/2+1)}$); R_i – ранг величины $z_i = \left| X_i - \tilde{X} \right|$ в упорядоченном по возрастанию ряду значений $z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_n$;

$$\delta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ -1, & y < 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Таблица 2.3 – Значения k для рангово-знакового критерия Холлина

n	5	10	20	50	100	200	400
k	10.11	36.95	140.62	851.62	3370	13407	53480

Гипотеза об отсутствии тренда в ряду значений x_i не отклоняется, если $|r| < r_\alpha$.

Распределения статистики критерия (2.18) в зависимости от объема выборки показаны на рисунке 2.17. Критерий является двусторонним. В то же время, как можно видеть, распределения статистики критерия не являются симметричными относительно 0.

Поэтому при использовании критерия необходимо иметь в виду, что вследствие *асимметричности* распределения статистики использование представленных в [88] процентных точек *может приводить к некорректным статистическим выводам* (к ошибочным отклонениям справедливой гипотезы об отсутствии тренда).

Критерий Холлина не относится к параметрическим критериям. Однако проведенное исследование распределений статистики при различных параметрических моделях законов распределения наблюдаемых случайных величин (и справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда) позволяет сделать следующие замечания, которые целесообразно учитывать при использовании критерия.

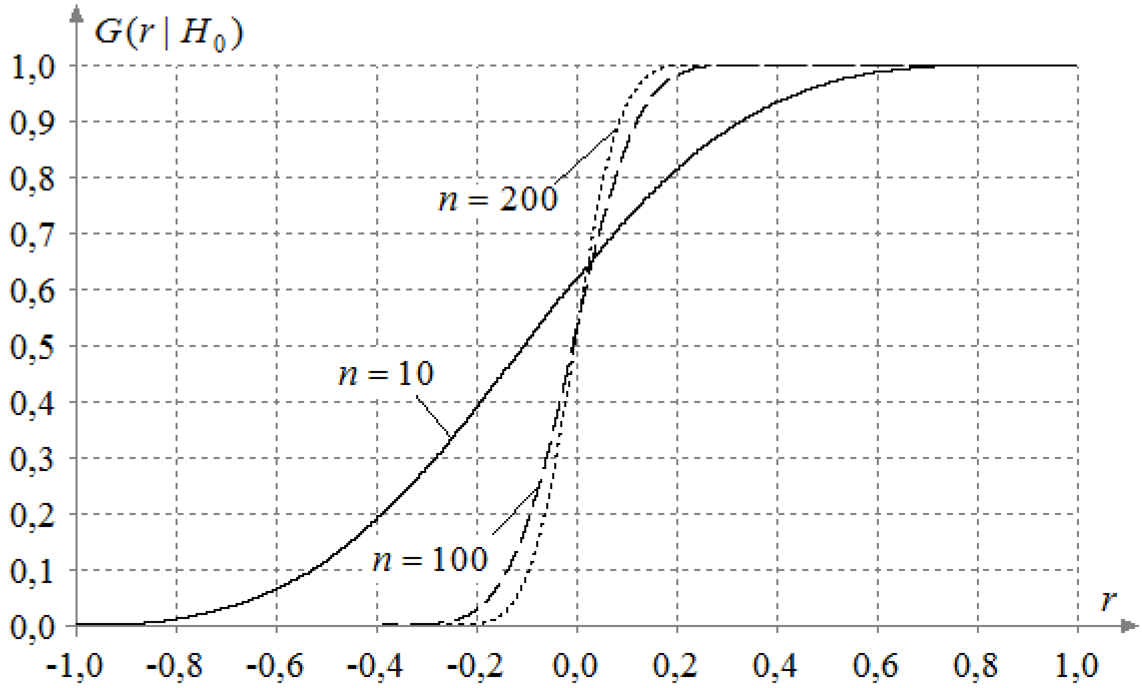


Рисунок 2.17 – Функции распределения статистики (2.18) критерия Холлина при различных объемах выборок

Исследования, проведенные автором данной диссертационной работы, показали, что в случае принадлежности выборок $X_1, X_2, ..., X_n$ симметричным законам распределения существенные отклонения наблюдаемого закона, например, от нормального практически не влияют на распределения статистики критерия.

В то же время асимметричность закона, которому соответствует наблюдаемая выборка $X_1, X_2, ..., X_n$, сильно сказывается на распределении статистики критерия (свойство непараметричности теряется).

Сказанное иллюстрирует рисунок 2.18, на котором приведены распределения статистики (2.18) в случае принадлежности выборок объёмом $n = 100$ семейству (2.3) с параметром формы $\theta_2 = 2$ и $\theta_2 = 0.5$, равномерному закону и экспоненциальному закону.

Оценки мощности критерия Холлина относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.12 и А.13 в приложении А.

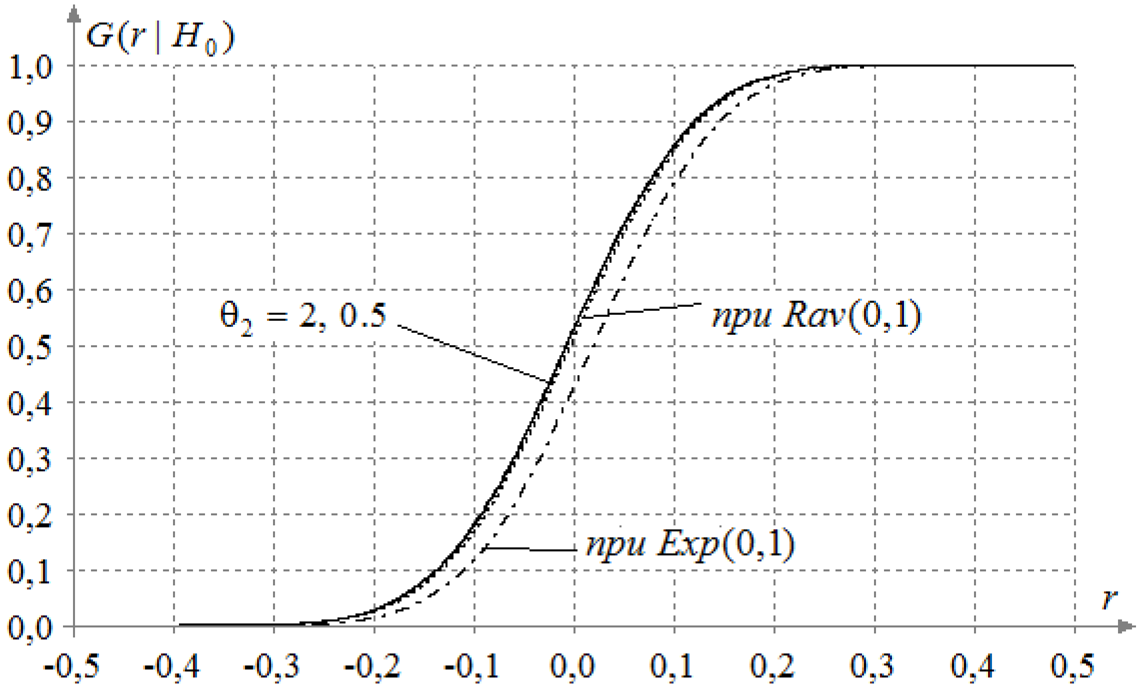


Рисунок 2.18 – Функции распределения статистики (2.18) критерия Холлина при $n = 100$ в зависимости от вида наблюдаемого закона

2.2.12 Критерии Фостера–Стюарта

В зависимости от вида используемой статистики этот непараметрический критерий может применяться для проверки гипотез об отсутствии тренда в средних значениях или в дисперсиях (в характеристиках рассеяния). Статистика критерия для обнаружения тренда в средних (в математическом ожидании) имеет вид [21]:

$$d = \sum_{i=2}^{n} d_i , \qquad (2.19)$$

где $d_i = u_i - l_i$;

$u_i = 1$, если $X_i > X_{i-1}, X_{i-2}, ..., X_1$, иначе $u_i = 0$;

$l_i = 1$, если $X_i < X_{i-1}, X_{i-2}, ..., X_1$, иначе $l_i = 0$.

Очевидно, что $-(n-1) \le d \le n-1$.

При отсутствии тренда нормализованная статистика

$$t = \frac{d}{\hat{\sigma}_d}, \quad \hat{\sigma}_d = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{2\ln n - 0.8456}. \qquad (2.20)$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза об отсутствии соответствующего тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики (2.20).

На самом деле областью значений статистики t является область дискретных значений. Исследование распределений статистик показало [97], что даже при достаточно больших объемах выборок порядка $n = 100, 200$ дискретные распределения статистик критерия *существенно отличаются от распределения Стьюдента* с n степенями свободы. На рисунке 2.19 показаны функции распределения статистики t (2.20), которые отличаются большей дискретностью. Следовательно, использование распределений Стьюдента для вычисления достигнутого уровня значимости вместо действительных (дискретных) распределений этих статистик может приводить к ошибкам.

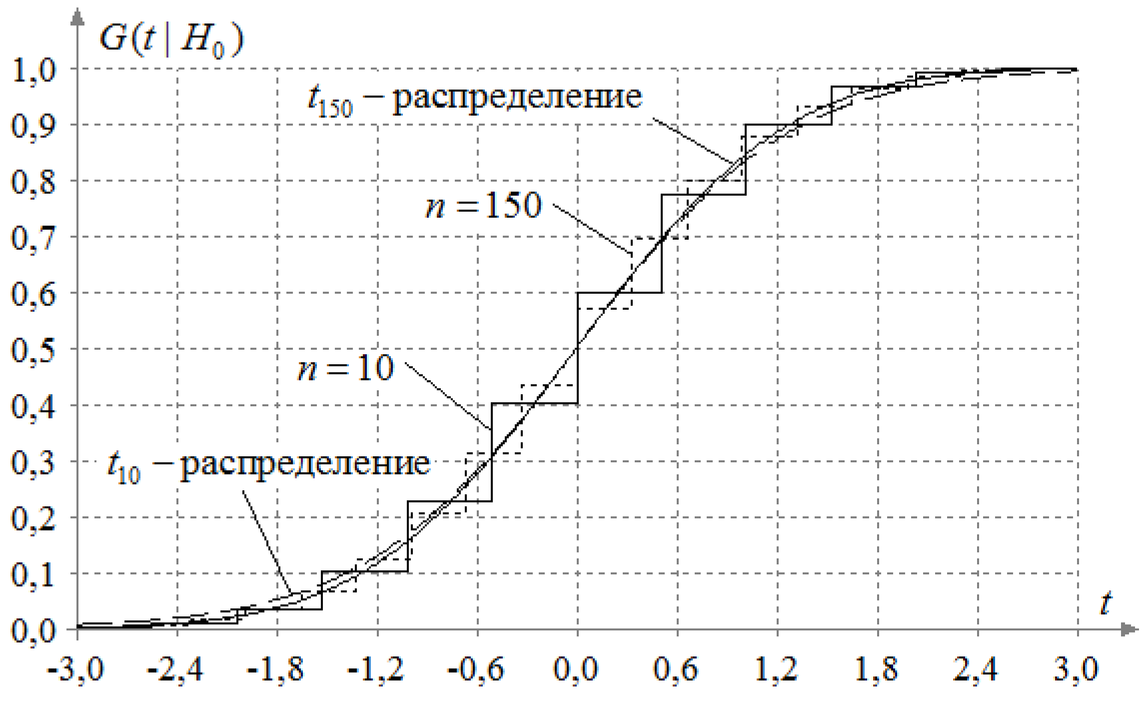


Рисунок 2.19 – Функции распределения статистики (2.20) критерия Фостера-Стюарта в зависимости от объёмов выборок

«Асимптотические» оценки мощности критерия Фостера–Стюарта со статистикой (2.20) относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.14 и А.15 в приложении А.

2.2.13 Критерий Кокса–Стюарта

Непараметрический критерий Кокса–Стюарта [12] может использоваться для проверки последовательности измерений $X_1, X_2, ..., X_n$ на предмет наличия тренда и в среднем, и в дисперсии.

Для проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних значениях по выборке объема n используется критерий со статистикой

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n - 2i + 1) h_{i,n-i+1},$$

где $h_{i,j} = 1$, если $X_i > X_j$, и $h_{i,j} = 0$, если $X_i \le X_j$ ($i < j$).

Нормализованная статистика

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \tag{2.21}$$

где

$$E[S_1] = \frac{n^2}{8},\ D[S_1] = \frac{n(n^2 - 1)}{24},$$

при справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Проведенные автором данной работы исследования методами статистического моделирования показали, что распределение статистики (2.21) является дискретным, и при малых n следует учитывать его отличие от стандартного нормального закона (см. рис. 2.20 при $n = 10$). Однако при $n > 40$ отличием распределения статистики (2.21) от стандартного нормального закона можно практически пренебречь.

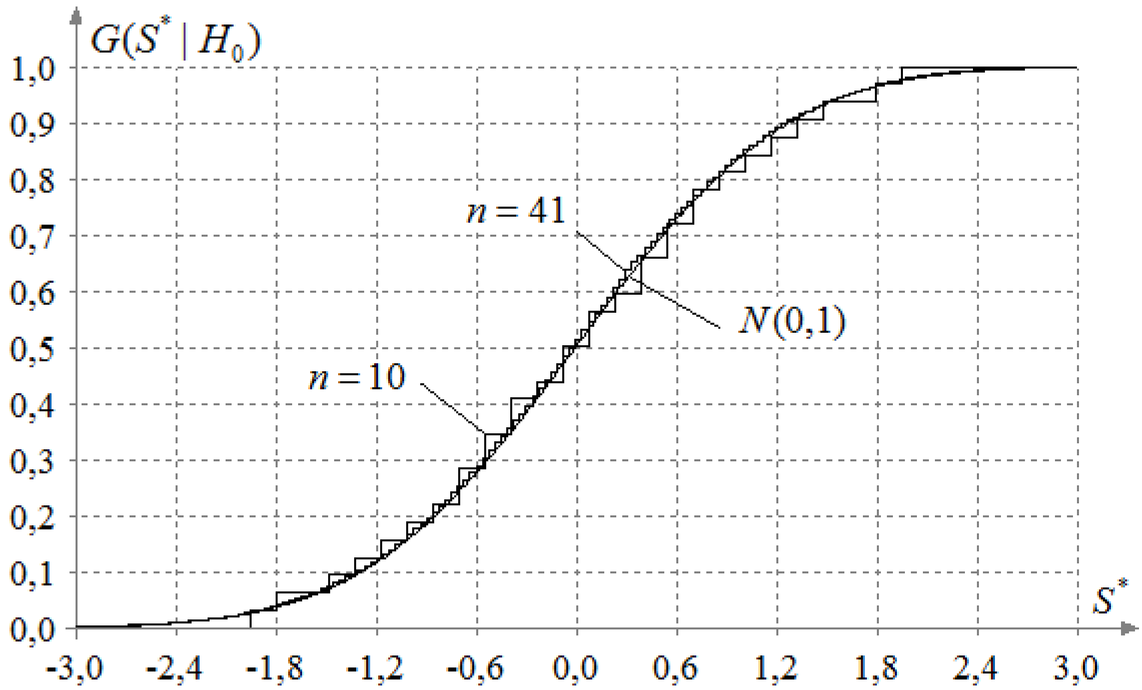


Рисунок 2.20 – Сходимость распределения статистики (2.21) критерия Кокса-Стюарта к стандартному нормальному закону

При меньших объемах выборок для вычисления достигнутого уровня значимости, соответствующего полученному значению статистики S_1^*, целесообразно использовать реальное распределение статистики, имеющее место при данном объеме выборки n.

«Асимптотические» оценки мощности критерия Кокса–Стюарта со статистикой (2.21) относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.16 и А.17 в приложении А.

2.2.14 Критерий инверсий

Инверсия имеет место, если в выборке значений $X_1, X_2, ..., X_n$, записанных в порядке их появления, за некоторым значением X_i следует меньшее по величине, т.е. $X_i > X_j$, где $i < j \le n$. Статистикой критерия случайности является общее число инверсий I в выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ [119].

Критерий двусторонний. Гипотеза об отсутствии тренда не отклоняется, если $I_{\alpha/2} < I < I_{1-\alpha/2}$. Число инверсий принимает целые значения, множество которых зависит от объема выборки.

Математическое ожидание и дисперсия статистики I имеют соответственно вид [119]:

$$E[I] = n(n-1)/4, \; D[I] = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72.$$

Нормализованная статистика

$$I^* = \frac{I - E[I]}{\sqrt{D[I]}} \qquad (2.22)$$

приближенно описывается стандартным нормальным законом. Гипотеза об отсутствии тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистики (2.22). Исследования показали, что при объемах выборок $n \ge 30$ дискретностью распределения статистики можно практически пренебречь (см. рис. 2.21) и опираться на стандартный нормальный закон как на распределение статистики.

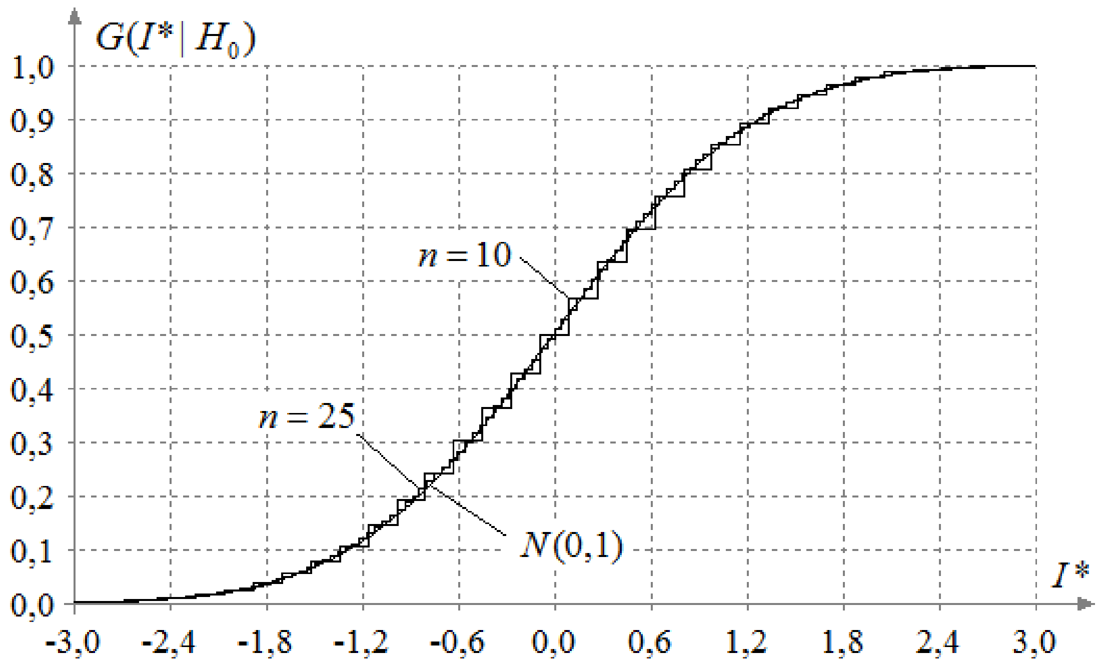


Рисунок 2.21 – Сходимость распределения статистики (2.22) к $N(0,1)$

Иногда рассматривают критерий со статистикой T, которая определяет число *обратных инверсий* ($X_i < X_j$, $i < j$), или критерий со статистикой $K = T - I$.

Оценки мощности критерия инверсий со статистиками I^*, K, T относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_3$, соответствующих наличию линейного тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, и относительно гипотез $H_4 - H_7$, соответствующих наличию периодического тренда представлены в таблицах А.18, А.19, А.20 в приложении А.

2.2.15 Сериальный критерий Вальда–Вольфовица

Пусть имеются выборки нескольких случайных величин. Упорядочим их по возрастанию в общей последовательности. Тогда под серией понимается последовательность элементов одной из этих выборок в упорядоченной по возрастанию объединенной выборке, ограниченная с обеих сторон элементами других выборок (если это на границах последовательности, то с одной стороны).

Статистика сериального критерия Вальда–Вольфовица формируется следующим образом. Пусть имеется выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ значений случайной величины X в порядке их появления, и пусть $\tilde{X}$ – выборочная медиана. Поставим в соответствие значениям $X_i \geq \tilde{X}$ символ a, а значениям $X_i < \tilde{X}$ – символ b. В результате получим последовательность символов a и b, состоящую из серий элементов a и b различной длины. В качестве статистики N_S сериального критерия Вальда–Вольфовица берётся общее число получившихся серий элементов a и b [66].

Проверяемая гипотеза H_0 об отсутствии тренда не отвергается с вероятностью α, если $N_{S,\alpha/2} < N_S < N_{S,1-\alpha/2}$. Критические значения $N_1 = N_{S,\alpha/2}$ и

$N_2 = N_{S,1-\alpha/2}$, полученные в результате статистического моделирования и расширяющие таблицу критических значений, приведенную в [75, 88], представлены в таблице А.21 приложения А.

Нормализованная статистика имеет вид

$$N_S^* = \frac{N_s - (2n_a n_b / (n_a + n_b) + 1)}{\sqrt{2n_a n_b (2n_a n_b - n_a - n_b) / ((n_a + n_b)^2 (n_a + n_b - 1))}}, \qquad (2.23)$$

где n_a и n_b – соответственно количества элементов a и b, соответствующих исходной последовательности $X_1, X_2, ..., X_n$. Очевидно, что n_a и n_b не превосходят величины $n/2$. В качестве аппроксимации распределения статистики (2.23) при $n_a, n_b > 20$ рекомендуется использовать стандартный нормальный закон. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших по модулю значениях статистики N_S^*.

Однако исследования распределений статистики (2.23) критерия показали, что даже при относительно больших объемах выборок ($n = 700$) дискретное распределение статистики существенно отличается от (непрерывного) стандартного нормального закона (см. рис. 2.22).

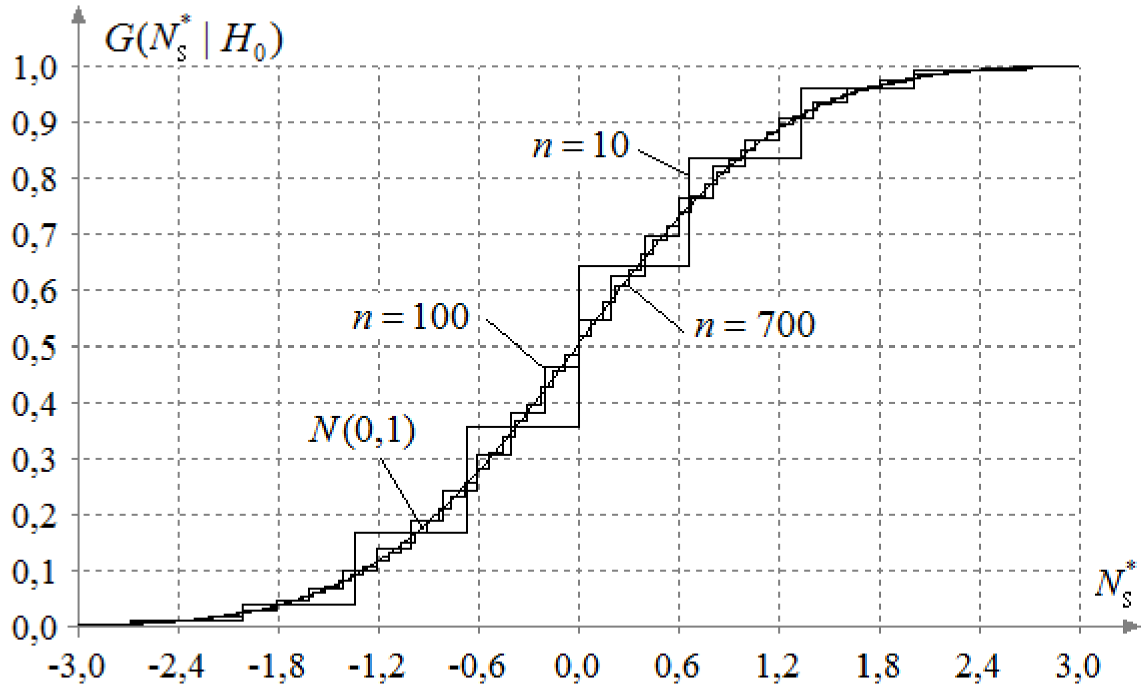


Рисунок 2.22 – Сходимость распределения статистики (2.23) сериального критерия Вальда-Вольфовица к нормальному закону

Поэтому для вычисления достигнутого уровня значимости (p_{value}) целесообразно использовать реальное распределение статистики. Это распределение может находиться, например, в результате интерактивного моделирования при заданном объеме выборки.

«Асимптотические» оценки мощности сериального критерия Вальда–Вольфовица со статистикой (2.23) относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.22 и А.23 в приложении А.

2.2.16 Критерий Рамачандрана–Ранганатана

В отличие от сериального критерия Вальда–Вольфовица, данный непараметрический критерий учитывает не только количество, но и длины серий.

Статистика критерия имеет вид [88]

$$RR = \sum_j j^2 n_j \,, \tag{2.24}$$

где j – длина серии, n – объем выборки, n_j – количество серий длины j.

Критерий правосторонний, гипотеза об отсутствии тренда отвергается при больших значениях статистики (2.24). Критические значения статистики приводятся в [119, 88] для объемов выборок $n = 6 \div 30$ с шагом 2, что затрудняет его использование. В приложении А приведена таблица А.24 процентных точек для статистики RR критерия Рамачандрана–Ранганатана.

Дискретные распределения статистики существенно зависят от объема выборки (см. рис. 2.23). Поэтому применение критерия для произвольных объёмов выборок сопряжено с понятными трудностями.

Для вычисления достигнутого уровня значимости можно опираться на реальное распределение статистики (2.24), получаемое в результате интерактивного моделирования (при данном объеме выборки).

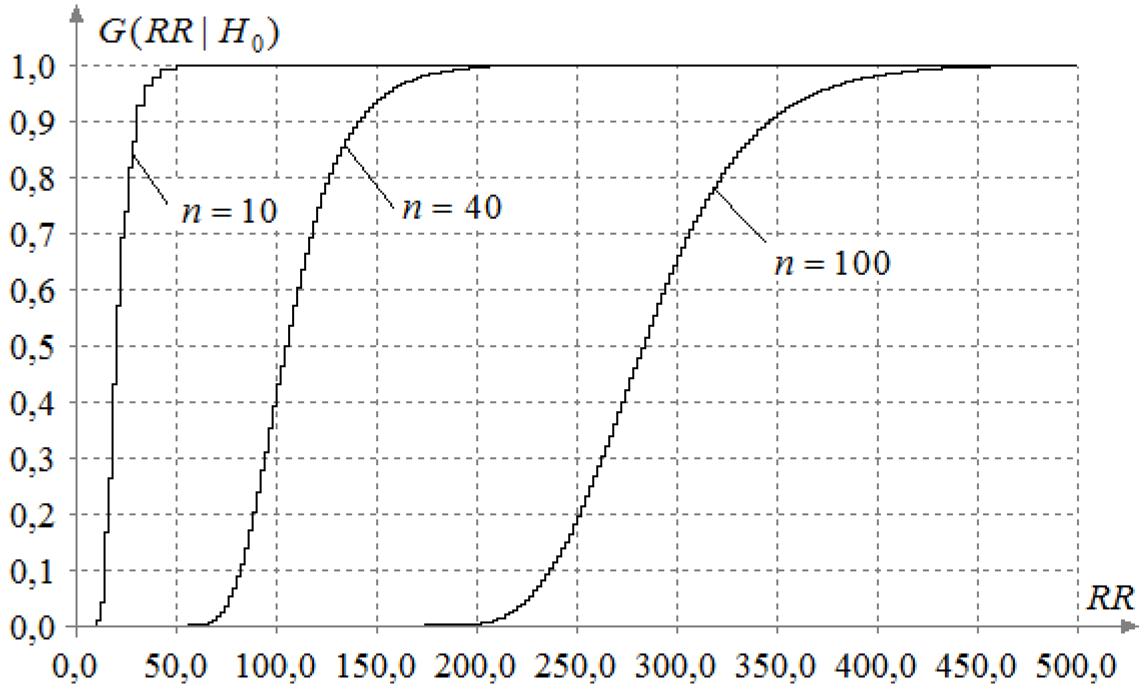


Рисунок 2.23 – Функции распределения статистики (2.24) критерия Рамачандрана–Ранганатана при различных объемах выборок

Оценки мощности критерия Рамачандрана–Ранганатана относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.25 и А.26 в приложении А.

2.2.17 Критерий числа серий знаков первых разностей

Для выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ вычисляются $n-1$ значений вида [118]

$$z_i = \begin{cases} -1, & x_{i+1} < x_i; \\ 1, & x_{i+1} > x_i; \\ 0, & x_{i+1} = x_i. \end{cases}$$

В ряду значений z_i фиксируется количество серий S, которое и является статистикой рассматриваемого критерия.

Гипотеза об отсутствии тренда не отклоняется при $S_1(\alpha) < S < S_2(\alpha)$. Таблица критических значений для статистики S доступна в [88, 109]. В приложении А приведена таблица А.27 процентных точек для статистики S критерия (нормированного) числа серий знаков первых разностей, полученная в результате статистического моделирования.

Утверждается, что при $n > 30$ распределение статистики S удовлетворительно аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E[S] = \frac{2n-1}{3}, \quad D[S] = \frac{16n-29}{90}.$$

В критерии, как правило, используют нормализованную статистику

$$S^* = \frac{S - E[S]}{\sqrt{D[S]}}, \tag{2.25}$$

приближенным распределением которой при справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда является стандартный нормальный закон. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях S^*.

Однако, применяя данный критерий, следует иметь в виду, что распределение его статистики, как и статистики критерия Вальда–Вольфовица, остается дискретным даже при больших объемах выборок n (см. рис. 2.24).

Отсюда следует, что при проверке гипотезы оценку достигнутого уровня значимости (p_{value}) предпочтительнее вычислять по действительному (дискретному) распределению данной статистики, а не по стандартному нормальному закону.

Оценки мощности критерия (нормированного) числа серий знаков первых разностей относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_7$, соответствующих наличию линейного и периодического тренда в математическом ожидании наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.28 и А.29 в приложении А.

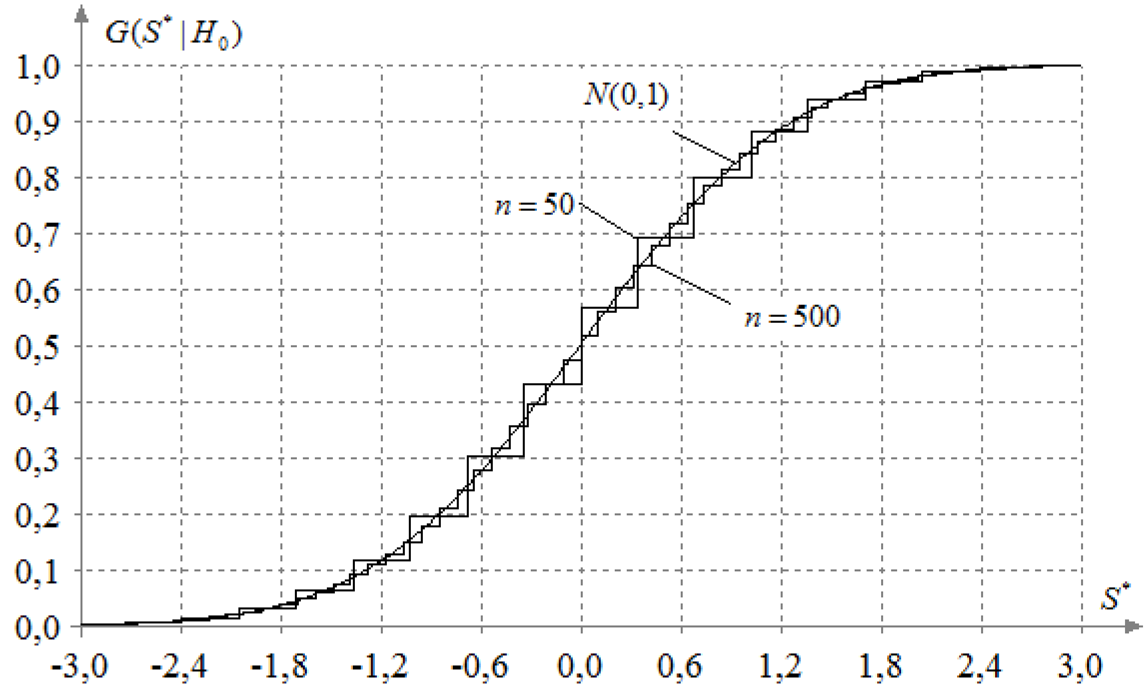


Рисунок 2.24 – Сходимость распределения статистики (2.25) критерия числа серий знаков первых разностей к нормальному закону

2.3 Сравнительный анализ критериев, используемых для проверки гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании

В таблице 2.4 приведены оценки мощности $1-\beta$ критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 (см. рис. 2.25), соответствующих наличию линейного тренда.

В таблице 2.5 приведены оценки мощности $1-\beta$ рассмотренных критериев относительно очень близких гипотез о наличии нелинейного (периодического) тренда в математическом ожидании (см. рис. 2.26). Оценки мощности получены при объёме выборок $n=100$, при заданной вероятности ошибки 1-го рода $\alpha = 0.1$ и числе имитационных экспериментов $N=10^6$.

Таблица 2.4 – Оценки мощности критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_3$

№ п/п	Критерий	Оценки мощности $1-\beta$ относительно гипотез наличия линейного тренда		
		H_1	H_2	H_3
1	Критерий обратных инверсий	0.403	0.994	1.000
2	Критерий K-инверсий	0.403	0.994	1.000
3	Критерий инверсий	0.401	0.994	1.000
4	Кокса–Стюарта	0.308	0.957	1.000
5	Рамачандрана–Ранганатана	0.139	0.291	0.984
6	Модификация критерия автокорреляции	0.125	0.651	1.000
7	Кумулятивной суммы	0.124	0.535	1.000
8	Фостера–Стюарта	0.117	0.310	0.798
9	Холлина	0.116	0.462	1.000
10	Критерий автокорреляции	0.113	0.455	1.000
11	Морана	0.113	0.455	1.000
12	Люнга–Бокса	0.113	0.455	1.000
13	Дюффа–Роя	0.113	0.455	1.000
14	Вальда–Вольфовица	0.113	0.455	1.000
15	Ранговый критерий Вальда–Вольфовица	0.112	0.461	1.000
16	Ранговый критерий Дюффа–Роя	0.112	0.455	1.000
17	Бартелса	0.112	0.461	1.000
18	Сериальный критерий Вальда–Вольфовица	0.109	0.291	0.997
19	Критерий числа серий знаков первых разностей	0.100	0.042	0.100

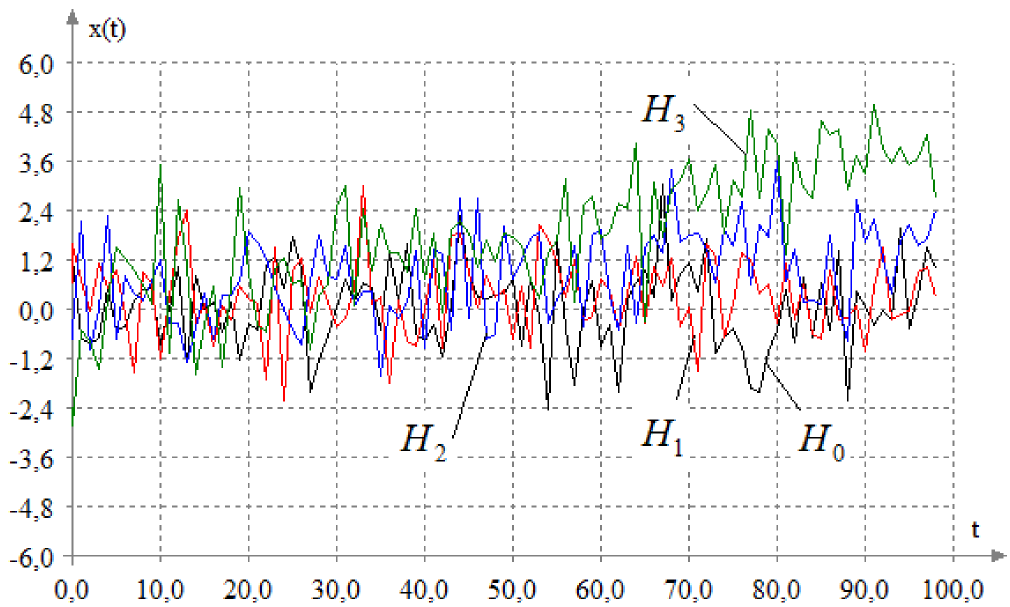


Рисунок 2.25 – Наложение линейного тренда на временной ряд

Таблица 2.5 – Оценки мощности критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании относительно конкурирующих гипотез $H_4 - H_7$

№ п/п	Критерий	Оценки мощности $1-\beta$ относительно гипотез наличия нелинейного тренда			
		H_4	H_5	H_6	H_7
1	Критерий инверсий	0.837	0.356	0.964	0.354
2	Критерий обратных инверсий	0.835	0.116	0.157	0.267
3	Критерий К-инверсий	0.835	0.116	0.157	0.267
4	Кокса–Стюарта	0.686	0.107	0.125	0.172
5	Модификация критерия автокорреляции	0.463	0.141	0.425	0.990
6	Рамачандрана–Ранганатана	0.344	0.172	0.407	0.947
7	Критерий автокорреляции	0.320	0.123	0.308	0.950
8	Морана	0.320	0.123	0.308	0.950
9	Люнга–Бокса	0.320	0.123	0.308	0.950
10	Дюффа–Роя	0.320	0.123	0.308	0.950
11	Вальда–Вольфовица	0.320	0.123	0.308	0.950
12	Ранговый критерий Вальда–Вольфовица	0.314	0.122	0.302	0.950
13	Ранговый критерий Дюффа–Роя	0.314	0.122	0.302	0.950
14	Холлина	0.313	0.122	0.302	0.950
15	Бартелса	0.311	0.122	0.299	0.948
16	Сериальный критерий Вальда–Вольфовица	0.203	0.115	0.196	0.762
17	Критерий числа серий знаков первых разностей	0.100	0.099	0.098	0.098
18	Фостера–Стюарта	0.086	0.082	0.107	0.113
19	Кумулятивной суммы	0.081	0.078	0.072	0.081

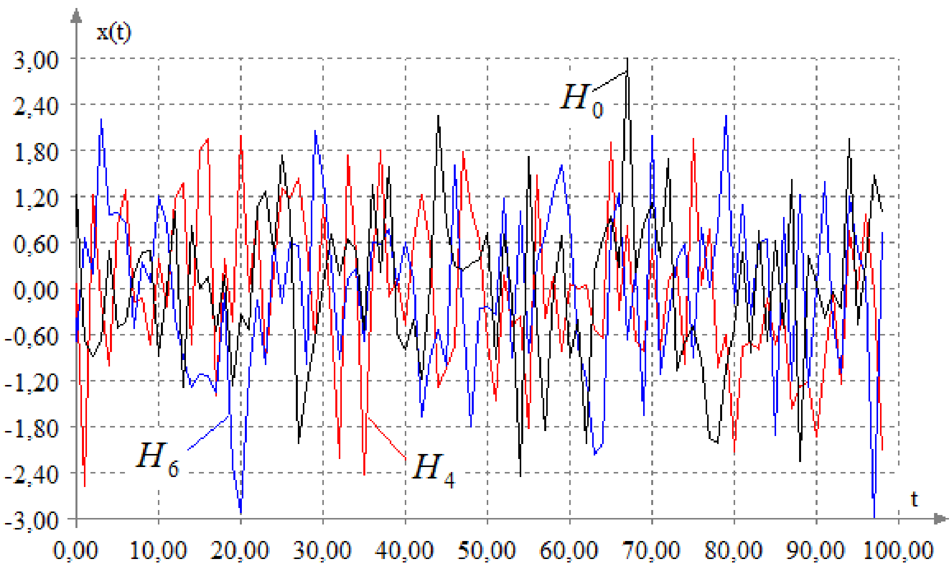


Рисунок 2.26 – Наложение периодического тренда на временной ряд

Относительно близкой конкурирующей гипотезы с линейным трендом в средних можно отметить явное преимущество критериев, опирающихся на подсчёт инверсий (см. табл. 2.3).

Далее следует критерий Кокса–Стюарта, затем, заметно уступая, модификация критерия автокорреляции и критерий Рамачандрана–Ранганатана.

Ниже расположена группа эквивалентных по мощности критериев (см. табл. 2.3, 2.4), в которую входят критерий автокорреляции и критерии, построенные на нормализующих преобразованиях его статистики (Морана, Люнга–Бокса, Дюффа–Роя). Из этих критериев наиболее предпочтительно применение критерия Дюффа–Роя, так как распределение его статистики при справедливости H_0 наилучшим образом аппроксимируется стандартным нормальным законом. К этой же группе можно отнести критерий Вальда–Вольфовица и знаково-ранговый критерий Холлина.

Практически не уступают упомянутой группе ранговые критерии Вальда–Вольфовица и Дюффа–Роя, являющиеся эквивалентными по мощности, и критерий Бартелса.

Очень низкую мощность демонстрируют сериальный критерий Вальда–Вольфовица и критерий числа серий знаков первых разностей. Из сериальных в лучшую сторону по мощности выделяется лишь критерий Рамачандрана–Ранганатана, учитывающий длины серий, но эффективное применение этого критерия затруднительно вследствие сильной зависимости распределения статистики от объема выборки.

В случае линейного тренда с более далёкими гипотезами по сравнению с H_1, упорядоченность критериев изменяется незначительно. Только критерии Рамачандрана–Ранганатана и Фостера-Стюарта смещаются вниз таблицы.

В таблице 2.4 приведены оценки мощности относительно конкурирующих гипотез, связанных с наличием нелинейного периодического тренда. Это достаточно близкие к H_0 гипотезы (см. рис. 2.26). Гипотезы $H_5 - H_7$ предполагают наличие периодического тренда с четырьмя периодами на участке наблюдения, а конкурирующей гипотезе H_4 соответствует только один период. Как показали исследования, с повышением частоты периодического тренда критерии инверсий хуже обнаруживают наложенный тренд, а, следовательно, мощность критериев падает.

Основные достоинства и недостатки критериев, применяемых при проверке гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, выявленные в процессе исследований, сведены в таблице 2.6, где критерии упорядочены по уменьшению мощности.

Таблица 2.6 – Основные достоинства и недостатки критериев, применяемых при проверке гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
1	Инверсий	Высокая мощность по отношению к линейному тренду. При $n \geq 30$ дискретностью нормализованных статистик можно пренебречь.	При $n < 30$ необходимо учитывать дискретность нормализованных статистик.
2	Обратных инверсий		
3	К-инверсий		
4	Кокса–Стюарта	Мощность выше среднего. При $n \geq 40$ дискретностью нормализованной статистики можно пренебречь.	При $n < 40$ необходимо учитывать дискретность нормализованной статистики.
5	Модификация критерия автокорреляции	Относительно неплохая мощность.	Отличием распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 200$.
6	Рамачандрана–Ранганатана	Относительно неплохая мощность.	Сильная зависимость распределения статистики от n. Необходимость использования таблицы критических значений.
7	Дюффа–Роя	При $n > 17$ отличием дискретного распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь.	Невысокая мощность критерия.
8	Автокорреляции	Отклонением распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь при $n > 30$.	Невысокая мощность критерия.

Продлжение таблицы 2.6

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
9	Морана		Невысокая мощность критерия. Отклонением распределения статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь лишь при $n > 50$.
10	Люнга–Бокса		Невысокая мощность критерия. Распределение статистики очень медленно сходится к стандартному нормальному закону.
11	Вальда–Вольфовица	При объёмах выборок $n > 20$ отклонением распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь.	Невысокая мощность критерия.
12	Холлина	Средняя мощность.	Распределения статистики зависят от n. Критерий непараметрический, но распределение статистики реагирует на асимметричность наблюдаемого закона.
13	Ранговый Вальда–Вольфовица	При $n > 10$ в качестве распределения предложенной модификации нормализованной статистики можно использовать стандартный нормальный закон.	По мощности несколько уступает критериям Дюффа–Роя и Вальда–Вольфовица. Эквивалентен ранговому критерию Дюффа–Роя.
14	Ранговый Дюффа–Роя	Распределение статистики при $n > 17$ хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом. Дискретностью распределения статистики можно пренебречь при $n > 10$.	По мощности несколько уступает критериям Дюффа–Роя и Вальда–Вольфовица. Эквивалентен ранговому критерию Вальда–Вольфовица.
15	Бартелса	При $n > 10$ отличием дискретного распределения нормализованной статистики от стандартного нормального закона можно пренебречь	Невысокая мощность критерия.
16	Фостера–Стюарта		Высокая дискретность распределения статистики, которая сохраняется при больших n. Использование асимптотического t_n-распределения Стьюдента для оценки p_{value} приводит к большим погрешностям. Мощность ниже среднего относительно линейного тренда и низкая относительно нелинейного.

Продлжение таблицы 2.6

№ п/п	Критерий	Достоинства	Недостатки
17	Кумулятивной суммы	Хорошая мощность относительно линейного тренда.	Дискретность распределения статистики и его зависимость от n. Очень низкая мощность относительно нелинейного тренда.
18	Сериальный Вальда–Вольфовица		Долго сохраняется дискретность распределения нормализованной статистики. Низкая мощность.
19	Числа серий знаков первых разностей		Дискретность распределения нормализованной статистики даже при больших объёмах выборок. Очень низкая мощность.

Использование стандартного нормального закона в качестве распределений статистик при объемах выборок n меньше указанных в таблице 2.5 может приводить к существенной ошибке при определении достигаемого уровня значимости.

Применение параметрических критериев в условиях нарушения предположений о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону также будет приводить к ошибке при принятии решения [81].

Предотвратить возможную некорректность выводов при использовании параметрических и непараметрических критериев в условиях нарушения стандартных предположений можно за счет использования при проверке гипотезы «истинного» распределения статистики, соответствующего справедливости проверяемой гипотезы в реальных условиях приложения (при заданном объеме выборки и при конкретном законе распределения входной случайной величины). Такое распределение может быть найдено методами статистического моделирования в процессе проверки соответствующей гипотезы (в интерактивном режиме).

Такой режим для рассмотренных критериев реализован в развиваемой программной системе «Интервальная статистика для Windows» [34].

2.4 Влияние степени округления на распределения статистик критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании

В данном разделе исследовано, как влияет на распределения статистик критериев, используемых для проверки гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, увеличение степени округления измеряемых величин.

В ходе исследований опирались на выборки, моделируемые в соответствии со стандартным нормальным законом $\mathrm{N}(0,1)$, но при различной степени округления. Напомним, что при округлении с точностью до 1 в выборках, принадлежащих $\mathrm{N}(0,1)$, может появляться **9** уникальных значений, при округлении с точностью $\Delta = 0.1$ – порядка **86** уникальных значений, с точностью $\Delta = 0.01$ – порядка **956**, с точностью $\Delta = 0.001$ – порядка **9830**.

Было показано, что распределения статистик R_1^* Вальда-Вольфовица, B^* Бартелса и $r_{1,n}^*$ критерия автокорреляции, а также распределения статистик всех модификаций критерия автокорреляции (нормированной суммы коэффициентов корреляции первого и второго порядков, Люнга-Бокса, Морана, Дюффа-Роя) с ростом степени округления наблюдаемых величин (измерений) практически не отклоняются от асимптотического стандартного нормального закона $N(0,1)$. Распределения статистики рангового критерия Вальда-Вольфовица (см. п.2.2.7) лишь незначительно отклоняется от $N(0,1)$ на хвостах при существенной степени округления результатов наблюдений (см. рис. 2.27).

В то же время, степень округления (точность регистрации измерений) оказывает более заметное влияние на распределения статистик при справедливости конкурирующих гипотез, что приводит к некоторому снижению мощности критериев. В качестве примера в таблице 2.7 для критериев автокорреляции и его модификации приведены оценки мощности относительно конкурирующей гипотезы $H_2: X_i = 1.5t_i + \xi_i$ при объёме выборок $n = 100$.

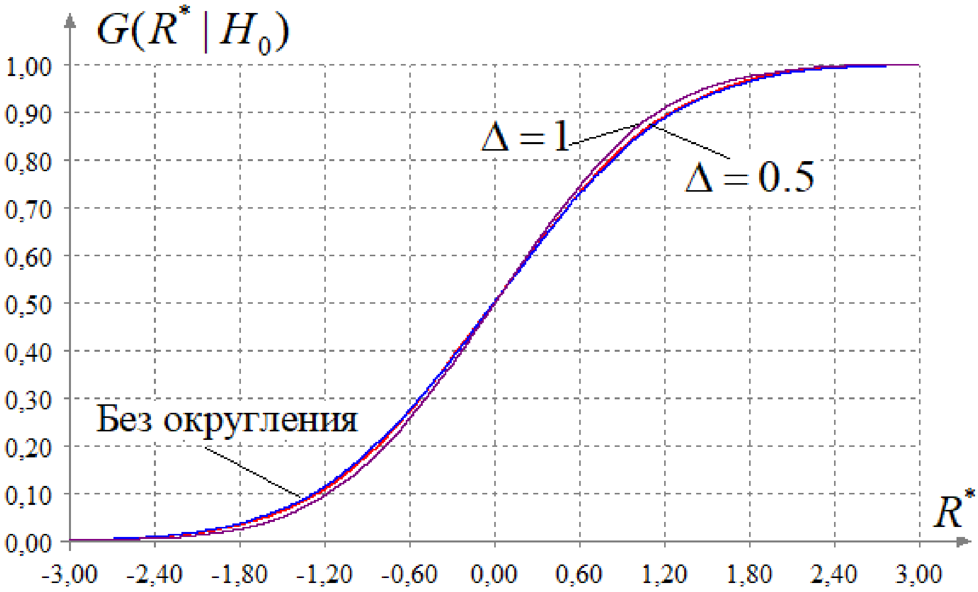


Рисунок 2.27 – Распределения $G(R^* | H_0)$ статистики рангового критерия Вальда-Вольфовица в зависимости от Δ при $n = 1000$

Таблица 2.7 – Оценки мощности критериев автокорреляции и его модификации относительно гипотезы H_2 в зависимости от Δ

α	Критерий автокорреляции			
	без округления	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.2$	$\Delta = 0.5$
0.1	0.455	0.454	0.454	0.445
0.05	0.342	0.340	0.339	0.332
α	Модификация критерий автокорреляции			
	без округления	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.2$	$\Delta = 0.5$
0.1	0.651	0.650	0.649	0.639
0.05	0.542	0.541	0.540	0.529

Изменение степени округления существенно влияет на распределения статистики CS числа переходов кумулятивной суммы (2.17) через ноль (см. п.2.2.10). На рисунке 2.28 приведены распределения $G(CS | H_0)$ статистики критерия кумулятивной суммы, имеющие место без округления наблюдаемых величин, а также при округлении с $\Delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1$ при $n = 1000$.

С увеличением степени округления критерий кумулятивной суммы перестает различать основную и конкурирующую гипотезы.

Степень округления оказывает заметное влияние на изменение распределения статистики критерия Холлина (см. п.2.2.11). На рис. 2.29 показано, как отклоняется распределение статистики при увеличении степени округлении $\Delta = 0.3, 0.5, 1$.

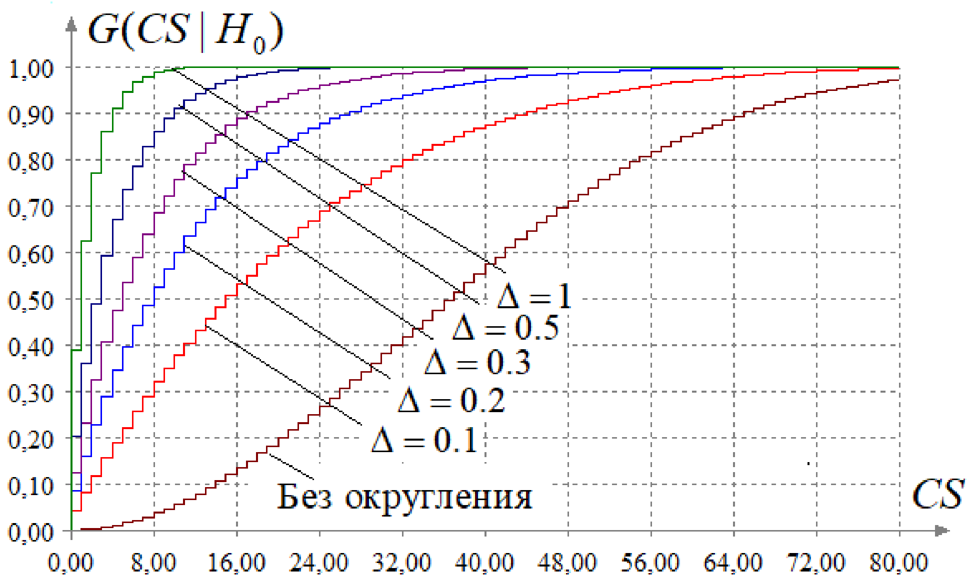


Рисунок 2.28 – Распределения $G(CS|H_0)$ статистики переходов кумулятивной суммы в зависимости от Δ при $n = 1000$

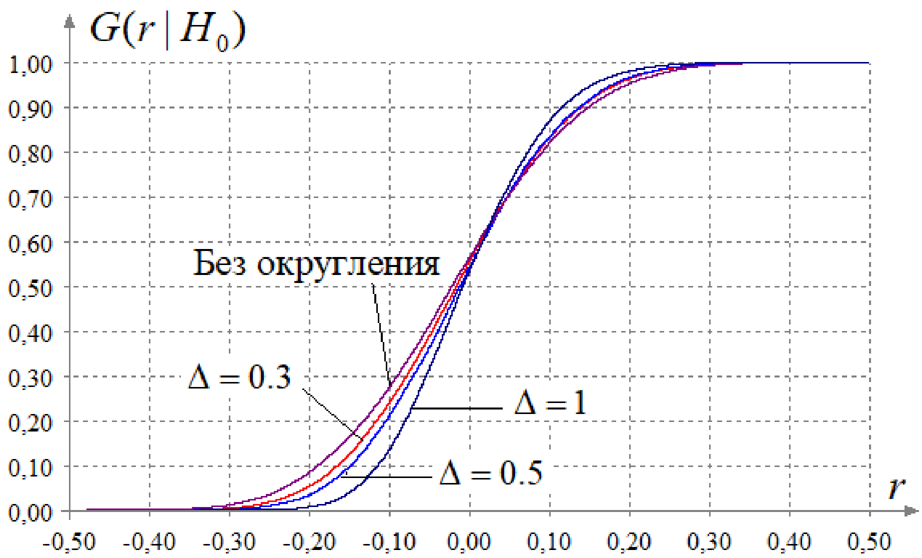


Рисунок 2.29 – Распределения $G(r|H_0)$ статистики критерия Холлина в зависимости от Δ при $n = 50$

Как было отмечено ранее (см. п.2.2.13), распределение статистики критерия Фостера-Стюарта остается дискретным даже при больших объемах выборок. При округлении наблюдаемых случайных величин дискретность распределения статистики не уменьшается с ростом объема выборок (см. рис. 2.30).

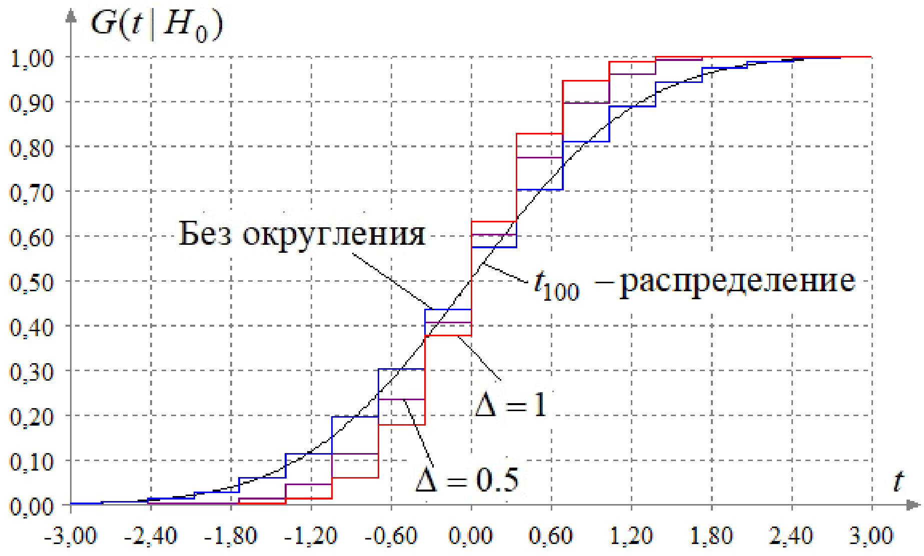


Рисунок 2.30 – Распределения $G(t|H_0)$ статистики критерия Фостера–Стюарта в зависимости от Δ при $n=100$

При справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда распределения статистик $G(S^* \mid H_0)$ критерия Кокса-Стюарта (см. п.2.2.13), $G(N_S^* \mid H_0)$ сериального критерия Вальда–Вольфовица (см. п.2.2.15) и $G(I^* \mid H_0)$ нормированного критерия инверсий (см. п.2.2.14) подчиняются стандартному нормальному закону. При увеличении степени округления анализируемых данных распределения статистик этих критериев смещаются влево (см. рис. 2.31 для распределения статистики критерия Кокса-Стьюарта).

Для данной группы критериев с ростом степени округления также наблюдается снижение мощности. В качестве примера в таблице 2.8 приведены оценки мощности критерия Кокса-Стюарта относительно конкурирующей гипотезы $H_2: X_i = 1.5t_i + \xi_i$ при объёмах выборок $n=100$.

Таблица 2.8 – Оценки мощности критерия Кокса-Стюарта относительно гипотезы H_2 в зависимости от Δ

α	Критерий Кокса-Стюарта в средних			
	без округления	$\Delta=0.1$	$\Delta=0.2$	$\Delta=0.5$
0.1	0.957	0.955	0.952	0.943
0.05	0.915	0.912	0.908	0.893

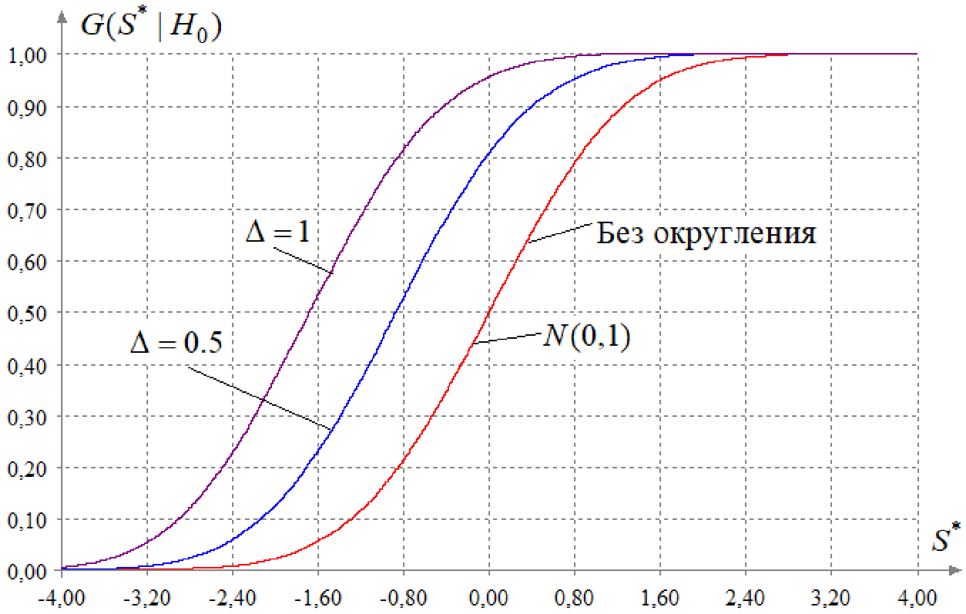


Рисунок 2.31 – Распределения $G(S^* \mid H_0)$ статистики критерия Кокса–Стюарта в зависимости от Δ при $n = 100$

Исследования показали, что увеличение степени округления наблюдаемых величин приводит также к различным изменениям распределений статистик критерия инверсий, критерия обратных инверсий, критерия Рамачандрана–Ранганатана, критерия числа серий знаков первых разностей.

Таким образом, при существенной степени округлении анализируемых данных для обеспечения корректности выводов с использованием рассмотренных в разделе критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании необходимо учитывать возможное изменение распределений их статистик. Это можно реализовать за счет интерактивного исследования распределений статистик применяемых критериев при справедливости H_0 при соответствующей степени округления Δ. Такая возможность реализована в развиваемой программной системе ISW.

Выводы по главе 2

Таким образом, в данной главе для множества критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании, в соответствии с целями диссертационной работы получены следующие результаты.

Исследовано влияние объема выборок на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0. Для критериев с известными предельными распределениями статистик получены оценки объемов выборок n, начиная с которых можно использовать предельное (асимптотическое) распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения этой статистики, имеющего место при конкретном n. Для параметрических критериев исследовано поведение распределений статистик при справедливости H_0 в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Отмечены достоинства и недостатки отдельных критериев.

Получены оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам, на основании которых критерии могут быть упорядочены по предпочтительности. Рассмотренные критерии можно расположить в порядке убывания мощности следующим образом:

инверсий $(K, T, I^*, I) \succ$ Кокса-Стюарта $(S_1^*) \succ$ модификация критерия автокорреляции $(r_{1,2}^*) \succ$ Бартелса $(B^*) \succ$ ранговой сериальной корреляции Вальда-Вольфовица (R^*), Холлина $(r) \succ$ Рамачандрана-Ранганатана $(RR) \succ$ сериальной корреляции Вальда-Вольфовица (R_1^*), автокорреляции $(r_{1,n}^*) \succ$ сериальный критерий Вальда-Вольфовица $(N^*) \succ$ Фостера-Стюарта (t).

В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}.

Исследовано влияние ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев. В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях изменившихся распределений статистик, связанных со степенью округления Δ.

Проведенные исследования подчеркивают, что корректное применение множества рассмотренных критериев требует знания реальных распределений статистик $G(S \mid H_0)$, соответствующих реальным условиям применения критериев, и специального программного обеспечения.

3 ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОТСУТСТВИИ ТРЕНДА В ДИСПЕРСИЯХ

3.1 Введение

В данной главе исследуются распределения статистик критериев Кокса-Стюарта, Фостера-Стюарта, Хсу и критериев с метками Клотца и Сэвиджа, предназначенных для проверки гипотез об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния. Исследуется поведение распределений статистик параметрических критериев в условиях нарушения стандартных предположений о нормальности данных. Для критериев, имеющих предельное (асимптотическое) распределение, уточняются объемы выборок, начиная с которых различие между реальным распределением статистики при данном объеме выборки и предельным становится несущественным. На основании полученных оценок мощности критериев относительно близких альтернатив, связанных с наличим линейного и периодического тренда в характеристиках рассеяния выявляется наиболее предпочтительный критерий.

Анализ мощности критериев проводился в ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о том, что анализируемая выборка представляет собой совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации, соответствующие наличию тренда в дисперсии [62].

Для критериев обнаружения изменения дисперсии в неизвестной точке в качестве конкурирующих гипотез (при нормальном распределении случайных величин) рассматривались близкие к H_0 гипотезы, когда в некоторый момент стандартное отклонение увеличивалось на 5, 10, 15%:

$$H_8:\quad \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1;\quad \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.1025,$$

$$H_9: \quad \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.21,$$

$$H_{10}: \quad \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.3225,$$

где $k = n/2$. Это очень близкие конкурирующие гипотезы, которые трудно отличить от H_0 при малых объёмах выборок.

В качестве более далеких рассматривались конкурирующие гипотезы

$$H_{11}: \quad \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 2,$$

$$H_{12}: \quad \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \quad \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 4.$$

Поскольку наличие тренда, соответствующего гипотезе H_8, визуально не отличается от тренда, соответствующего гипотезам H_9, H_{10}, на рисунке 3.1 приведена реализация временного ряда только при справедливости H_8.

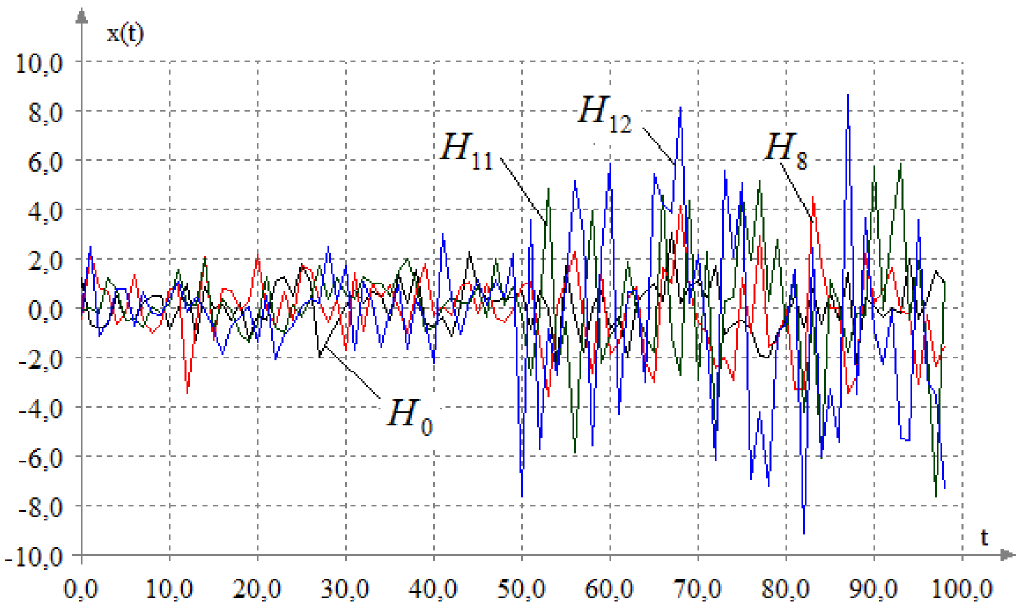


Рисунок 3.1 – Тренд, соответствующий гипотезам H_0, H_8, H_{11}, H_{12}

Наличие линейного тренда в характеристиках рассеяния наблюдаемого ряда случайных величин (изменение масштабного параметра) на интервале $t \in [0,1]$ может моделироваться в соответствии с соотношением [83]

$$x_i = \xi_i (1 + c t_i),$$

где $c \in (-1, \infty)$, $t_i = (i-1)\Delta t$, $\Delta t = 1/n$ Справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $c = 0$.

В случае наличия периодического тренда в характеристиках рассеяния случайные величины могут моделироваться, например, в соответствии с соотношением

$$x_i = \xi_i (1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i))$$

при $|d| < 1$. В случае смешанного тренда – в соответствии с выражением

$$x_i = \xi_i (1 + ct_i + d \sin(2k\pi t_i)),$$

при $|d| < 1$, если $c \geq 0$, и при $|d| < 1 + c$, если $c \in (-1, 0)$. Отсутствию периодической составляющей в тренде соответствует значение параметра $d = 0$, а отсутствию линейной – $c = 0$.

При анализе мощности относительно линейного, периодического и смешанного тренда в характеристиках рассеяния (в дисперсии) случайной величины рассматривались конкурирующие гипотезы:

$$H_{13}: \quad x_i = \xi_i (1 + ct_i), \quad c = 1;$$

$$H_{14}: \quad x_i = \xi_i (1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i)), \quad d = 0.8, \quad k = 2;$$

$$H_{15}: \quad x_i = \xi_i (1 + ct_i + d \sin(2k\pi t_i)), \quad c = 1, \quad d = 0.8, \quad k = 2.$$

Примеры реализации временных рядов при справедливости H_0 и H_{13}, H_{14}, H_{15} представлены соответственно на рисунках 3.2, 3.3 и 3.4.

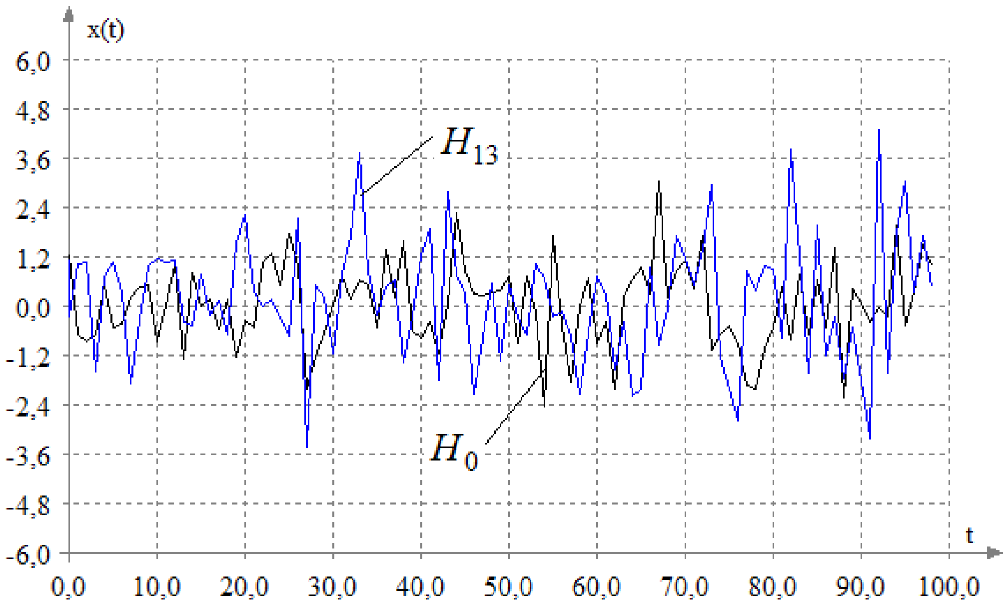


Рисунок 3.2 – Линейный тренд в характеристиках рассеяния при H_{13}

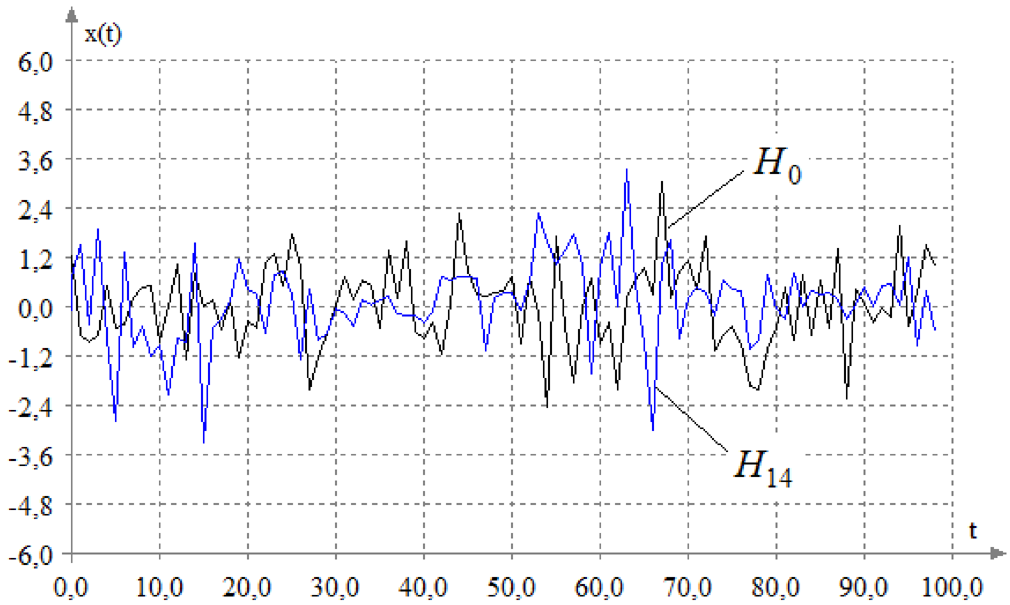


Рисунок 3.3 – Периодический тренд в характеристиках рассеяния при H_{14}

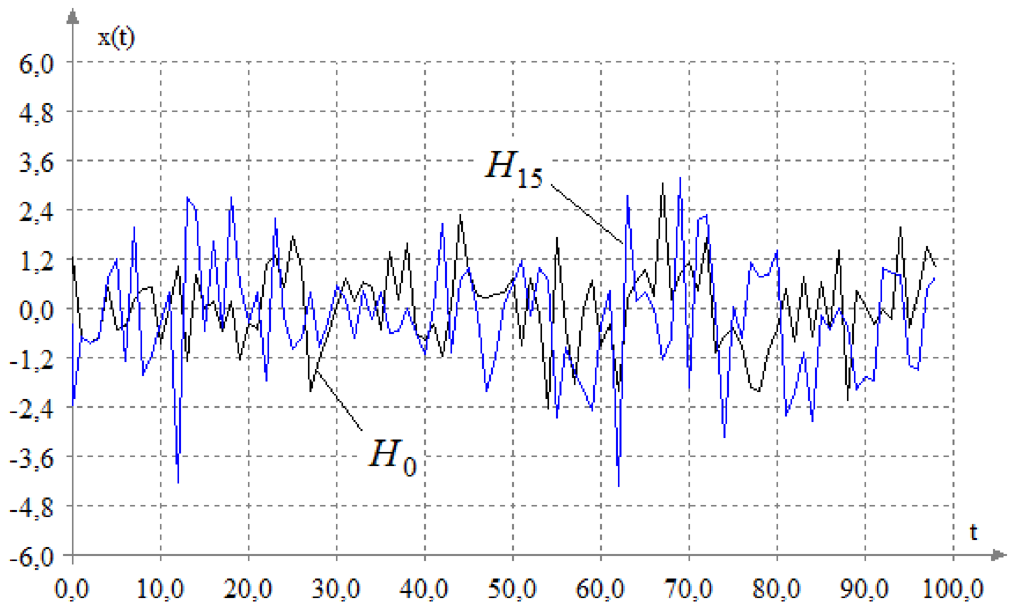


Рисунок 3.4 – Смешанный тренд в характеристиках рассеяния при H_{15}

Подробные результаты исследований множества критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда и других изменений в характеристиках рассеяния, рассматриваются в разделе 3.2.

3.2 Исследование критериев проверки гипотез об отсутствии тренда в дисперсии

3.2.1 Критерий Кокса–Стюарта

Критерий Кокса–Стюарта при проверке гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния) строится следующим образом.

Исходная выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ разбивается на $[n / k]$ подвыборок объемом k элементов $x_1,...,x_k$; $x_{k+1},...,x_{2k}$; $x_{2k+1},...,x_{3k}$; ...; $x_{n-k+1},...,x_n$ (если n не делится на k, отбрасывается необходимое число измерений в центре) [12]. Для каждой i-й подвыборки находится размах w_i $(1 \le i \le r)$ $(r = [n/k])$. Далее полученная последовательность размахов w_i проверяется на наличие тренда в средних значениях критерием со статистикой

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \qquad (3.1)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n - 2i + 1) h_{i,n-i+1},$$

$$E[S_1] = \frac{n^2}{8}, \ D[S_1] = \frac{n(n^2 - 1)}{24},$$

где $h_{i,j} = 1$, если $x_i > x_j$, и $h_{i,j} = 0$, если $x_i \le x_j$ $(i < j)$. При справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда распределение статистики (3.1) приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Величину k в [12] рекомендуется выбирать из следующих соотношений:

$$n \ge 90 \to k = 5; \ 64 \le n < 90 \to k = 4;$$

$$48 \le n < 64 \to k = 3; \ n < 48 \to k = 2.$$

Как показали результаты настоящих исследований, дискретность распределения статистики S_1^* при обнаружении тренда в дисперсии заметно выше дискретности распределения статистики Кокса–Стюарта для тренда в средних (см. рис. 3.5). Это естественно, так как анализируемая выборка размахов содержит лишь $[n/k]$ элементов.

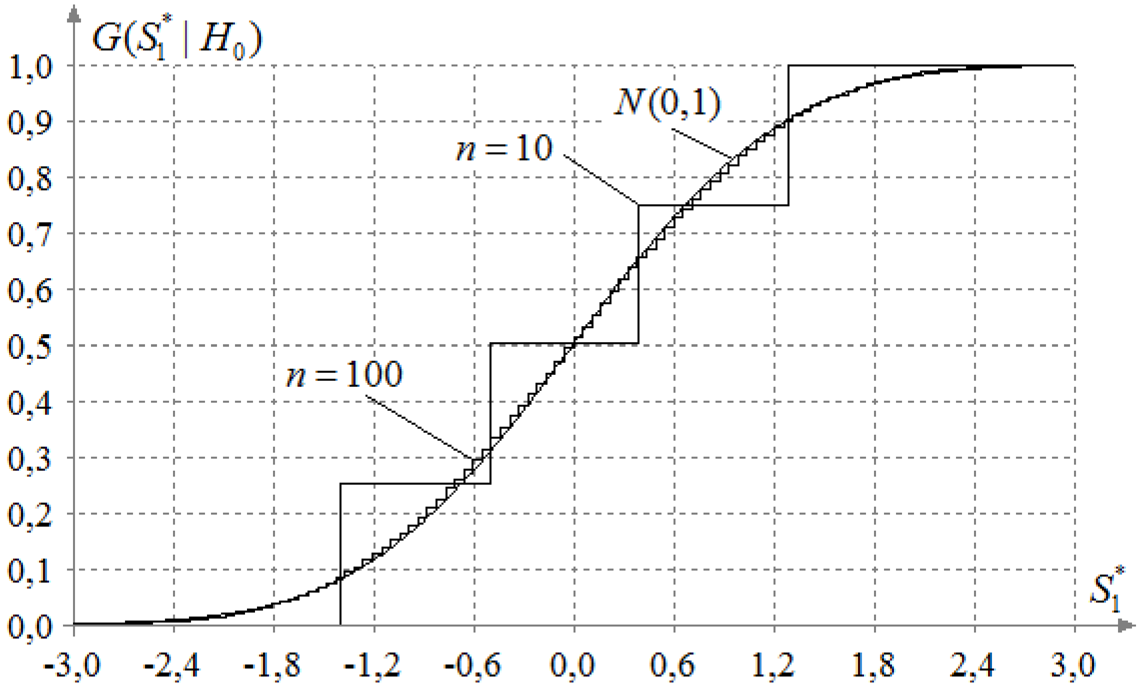


Рисунок 3.5 – Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (3.1) критерия Кокса-Стюарта

Проведенные в диссертационной работе исследования показали, что при использовании критерия Кокса–Стюарта для обнаружения тренда в дисперсиях отличием дискретного распределения статистики от стандартного нормального закона можно практически пренебречь лишь при $n > 170$ [83].

Оценки мощности критерия Кокса-Стюарта при вероятностях ошибок первого рода $\alpha = 0.15,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.25,\ 0.01$ относительно близких конкурирующих гипотез $H_8 - H_{15}$, соответствующих наличию тренда в дисперсии наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1 – Мощность критерия Кокса-Стюарта относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ об изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.15	0.220	0.193	0.170	0.087	0.024
	0.1	0.220	0.193	0.170	0.087	0.024
	0.05	0.220	0.193	0.170	0.087	0.024
	0.025	0.220	0.193	0.170	0.087	0.024
	0.01	0.220	0.193	0.170	0.087	0.508
20	0.15	0.154	0.157	0.166	0.260	0.429
	0.1	0.091	0.093	0.100	0.182	0.0001
	0.05	0.023	0.016	0.012	0.002	0.0001
	0.025	0.023	0.016	0.012	0.002	0.0001
	0.01	0.023	0.016	0.012	0.002	0.0001
30	0.15	0.131	0.137	0.148	0.268	0.551
	0.1	0.093	0.098	0.109	0.214	0.485
	0.05	0.061	0.065	0.073	0.161	0.418
	0.025	0.022	0.024	0.029	0.087	0.306
	0.01	0.005	0.003	0.002	0	0
50	0.15	0.160	0.185	0.226	0.517	0.868
	0.1	0.099	0.120	0.153	0.418	0.816
	0.05	0.055	0.070	0.095	0.313	0.735
	0.025	0.030	0.040	0.059	0.247	0.690
	0.01	0.012	0.017	0.026	0.154	0.593
100	0.15	0.170	0.245	0.352	0.854	0.998
	0.1	0.123	0.188	0.284	0.808	0.997
	0.05	0.066	0.109	0.178	0.647	0.967
	0.025	0.031	0.060	0.107	0.530	0.947
	0.01	0.016	0.033	0.066	0.439	0.927
150	0.15	0.195	0.309	0.459	0.951	1.000
	0.1	0.134	0.233	0.371	0.922	1.000
	0.05	0.072	0.143	0.253	0.849	0.999
	0.025	0.040	0.089	0.173	0.769	0.997
	0.01	0.017	0.044	0.095	0.633	0.985
200	0.15	0.206	0.355	0.539	0.984	1.000
	0.1	0.149	0.281	0.456	0.973	1.000
	0.05	0.082	0.179	0.328	0.939	1.000
	0.025	0.046	0.115	0.233	0.893	1.000
	0.01	0.021	0.062	0.142	0.807	0.999
300	0.15	0.239	0.449	0.678	0.999	1.000
	0.1	0.173	0.363	0.595	0.997	1.000
	0.05	0.103	0.254	0.470	0.992	1.000
	0.025	0.059	0.169	0.354	0.982	1.000
	0.01	0.028	0.098	0.237	0.957	1.000

Таблица 3.2 – Мощность критерия Кокса-Стюарта относительно гипотез $H_{13} - H_{15}$ о наличии линейного, периодического и смешанного тренда в дисперсии

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.15	0.142	0.166	0.131
	0.1	0.142	0.166	0.131
	0.05	0.142	0.166	0.131
	0.025	0.142	0.166	0.131
	0.01	0.142	0.166	0.131
25	0.15	0.183	0.129	0.109
	0.1	0.143	0.120	0.099
	0.05	0.053	0.012	0.040
	0.025	0.004	0.003	0.002
	0.01	0.004	0.003	0.002
50	0.15	0.320	0.134	0.106
	0.1	0.229	0.112	0.053
	0.05	0.147	0.006	0.021
	0.025	0.084	0.003	0.017
	0.01	0.031	0.0001	0.011
100	0.15	0.567	0.125	0.061
	0.1	0.485	0.120	0.055
	0.05	0.339	0.025	0.021
	0.025	0.214	0.001	0.004
	0.01	0.125	0	0.003
200	0.15	0.833	0.669	0.097
	0.1	0.771	0.458	0.052
	0.05	0.654	0.245	0.023
	0.025	0.523	0.147	0.010
	0.01	0.373	0.012	0.003
300	0.15	0.939	0.819	0.099
	0.1	0.907	0.757	0.058
	0.05	0.835	0.553	0.026
	0.025	0.741	0.341	0.011
	0.01	0.607	0.135	0.003
500	0.15	0.993	0.970	0.109
	0.1	0.987	0.938	0.067
	0.05	0.971	0.849	0.029
	0.025	0.943	0.725	0.013
	0.01	0.888	0.523	0.005

3.2.2 Критерий Фостера–Стюарта

Критерий, используемый для обнаружения тренда в характеристиках рассеяния, имеет вид [21]:

$$S = \sum_{i=2}^{n} S_i ,$$

где $S_i = u_i + l_i$;

$u_i = 1$, если $x_i > x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $u_i = 0$;

$l_i = 1$, если $x_i < x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $l_i = 0$.

Очевидно, что $0 \le S \le n-1$.

При отсутствии тренда нормализованная статистика

$$\tilde{t} = \frac{S - \mu}{\hat{\sigma}_S}, \tag{3.2}$$

где

$$\mu = 2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}, \;\; \hat{\sigma}_S = \sqrt{\mu - 4\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}} \approx \sqrt{2\ln n - 3,4253}$$

приближенно описывается распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза об отсутствии соответствующего тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистик (3.2).

На самом деле областью значений статистики $\tilde{t}$ является область дискретных значений. Исследование распределений статистики показало, что даже при достаточно больших объемах выборок порядка $n = 100,\ 200$ дискретные распределения статистики критерия существенно отличаются от распределения Стьюдента с n степенями свободы [97]. Функции распределения статистики $\tilde{t}$ показаны на рисунке 3.6.

Из вида приведенных распределений следует, что использование для вычисления достигнутого уровня значимости (p_{value}) вместо действительных (дискретных) распределений статистик асимптотических t-распределений Стьюдента может приводить к существенным ошибкам [83].

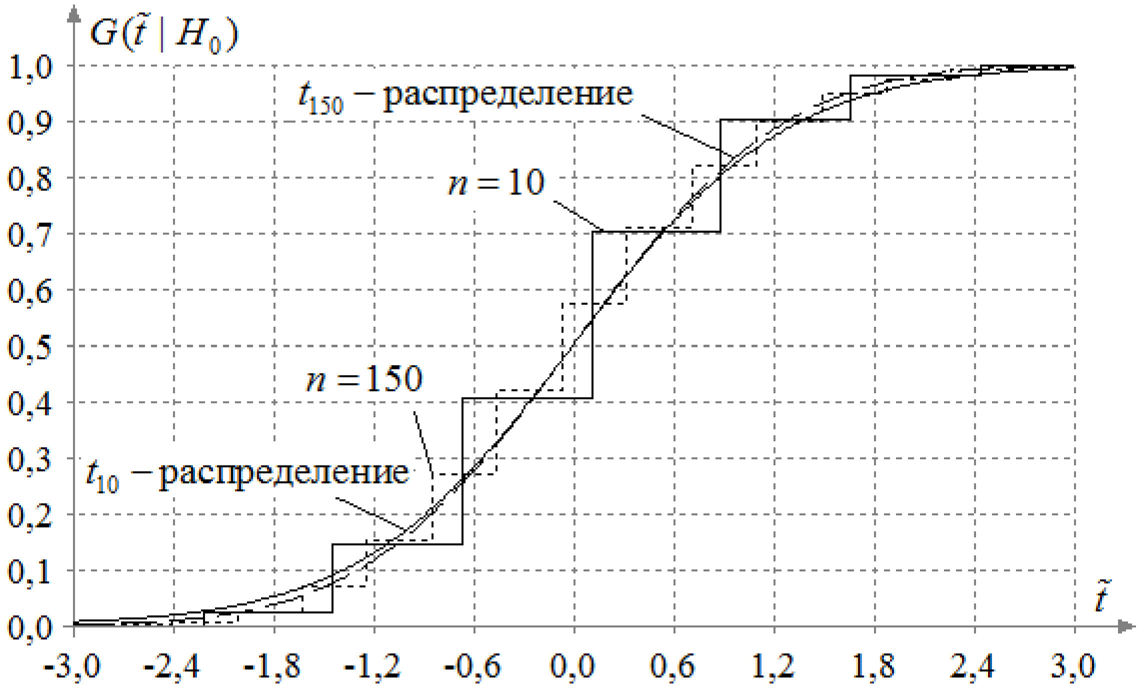


Рисунок 3.6 – Функции распределения статистики (3.2) критерия Фостера–Стюарта в зависимости от объёмов выборок

«Асимптотические» оценки мощности критерия Фостера–Стюарта со статистикой (3.2) относительно близких конкурирующих гипотез $H_8 - H_{15}$, соответствующих наличию тренда в дисперсии наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.30 и А.31 в приложении А.

3.2.3 Критерии Хсу обнаружения «сдвига дисперсии»

В данном критерии отклонение проверяемой гипотезы об отсутствии тренда может свидетельствовать об обнаружении “сдвига дисперсии”. Статистика критерия Хсу имеет вид [33]

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)(x_i - m_x)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}, \quad 0 \le H \le 1,$$

где m_x – медиана вариационного ряда. В предположении, что математические ожидания последовательности случайных величин имеют одно и то же значение, проверяется гипотеза о неизменности дисперсий. В качестве конкурирующей гипотезы может рассматриваться изменение дисперсии наблюдаемых величин в некоторый (неизвестный) момент (начиная с некоторого элемента выборки). Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза об отсутствии сдвига в дисперсии отклоняется при малых и больших значениях статистики H [83].

Обычно критерий используется в нормализованной форме

$$H^* = \frac{H - 1/2}{\sqrt{D[H]}}, \tag{3.3}$$

где

$$D[H] = \frac{n+1}{6(n-1)(n+2)}.$$

Статистика (3.3) при справедливости гипотезы об отсутствии изменения дисперсии в асимптотике подчиняется стандартному нормальному закону.

Результаты моделирования, проведенного в [97] показали, что при $n > 30$ распределение статистики достаточно хорошо согласуется со стандартным нормальным законом.

Критерий Хсу относится к параметрическим критериям. Поэтому, как и в случае любого параметрического критерия, связанного с проверкой гипотез о дисперсиях, распределения его статистики существенно зависят от закона, которому принадлежат анализируемые случайные величины (от закона распределения шума). Полученные в настоящей работе в результате моделирования распределения статистики (3.3) в случае принадлежности случайных величин обобщенному нормальному закону (2.3) при различных значениях параметра формы представлены на рисунке 3.7.

Как можно видеть, распределения статистики (3.3) сильно зависят от закона распределения, которому принадлежат случайные величины. При этом наибольшее отклонение от стандартного нормального закона наблюдается в случае принадлежности случайных величин законам с тяжелыми хвостами. Существенно влияет на распределение статистики и асимметричность закона [83].

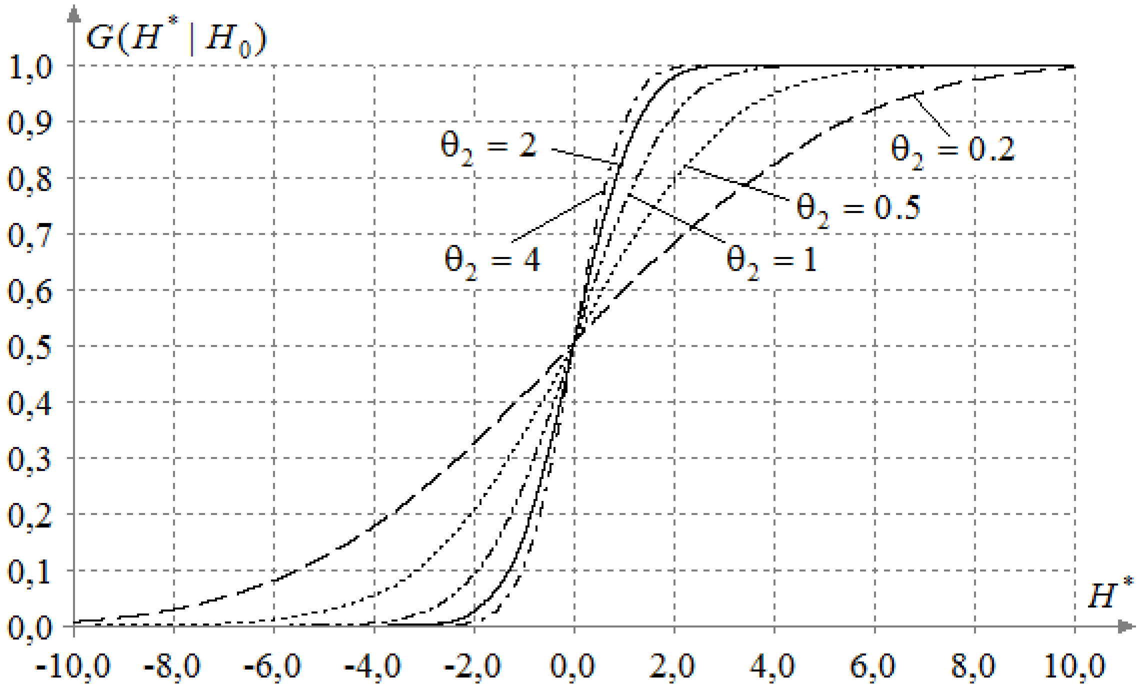


Рисунок 3.7 – Распределения статистики (3.3) в случае принадлежности случайных величин законам семейства (2.3) при различных значениях параметра формы при *n=100*

Критерий, позволяющий определить точку изменения дисперсии (в случае принадлежности наблюдений нормальному закону), предложен в [33]. Статистика этого критерия строится следующим образом. Пусть для $k = 1, 2, ..., n-1$

$$w_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m_x)^2 ,$$

$$W_k = \frac{w_n - w_k}{w_k} \frac{k}{n-k} ,$$

где k соответствует искомой точке изменения дисперсии. В случае принадлежности x_i нормальному закону величины W_k, $k = 1, 2, ..., n-1$, принадлежат соответствующим $F_{n-k,k}(W)$- распределениям Фишера с $n-k$ и k степенями свободы.

Далее по соответствующим функциям распределения находим $\gamma_k = F_{n-k,k}(W_k)$, где при отсутствии «сдвига в дисперсии» γ_k должны подчиняться равномерному закону.

Статистика *G-критерия* имеет вид

$$G = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\,,\ 0 \le G \le 1. \tag{3.4}$$

Гипотеза об отсутствии изменения дисперсии отклоняется с уровнем значимости α, если $G < G_{\alpha/2}$ или $G > G_{1-\alpha/2}$. В этом случае значение k, которому соответствует максимальная величина $\left|\gamma_k - 1/2\right|$, дает оценку искомой точки изменения значения дисперсии в наблюдаемом ряду. При $x_1 = m_x$ значение $w_1 = 0$, значит $W_1 = \infty$ и $\gamma_1 = 1$.

В первоисточниках вид предельного распределения статистики (3.4) не приводится, даны лишь процентные точки.

На основе результатов статистического моделирования автором диссертации было показано [83], что хорошей приближенной моделью предельного распределения статистики (3.4) является бета-распределение 1-го рода с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)}\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_1-1}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 2.7663$, $\theta_1 = 2.7663$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 0$ (см. рис. 3.8). Опираясь на этот закон можно находить процентные точки $G_{\alpha/2}$ и $G_{1-\alpha/2}$ или значения p_{value}.

G-критерий также относится к параметрическим критериям. Поэтому распределения его статистики существенно зависят от вида наблюдаемого закона [83]. Распределения статистики критерия для случая принадлежности случайной величины обобщенному нормальному закону (2.3), частными случаями которого при различных значениях параметра формы являются распределения нормальное и Лапласа, представлены на рисунке 3.9.

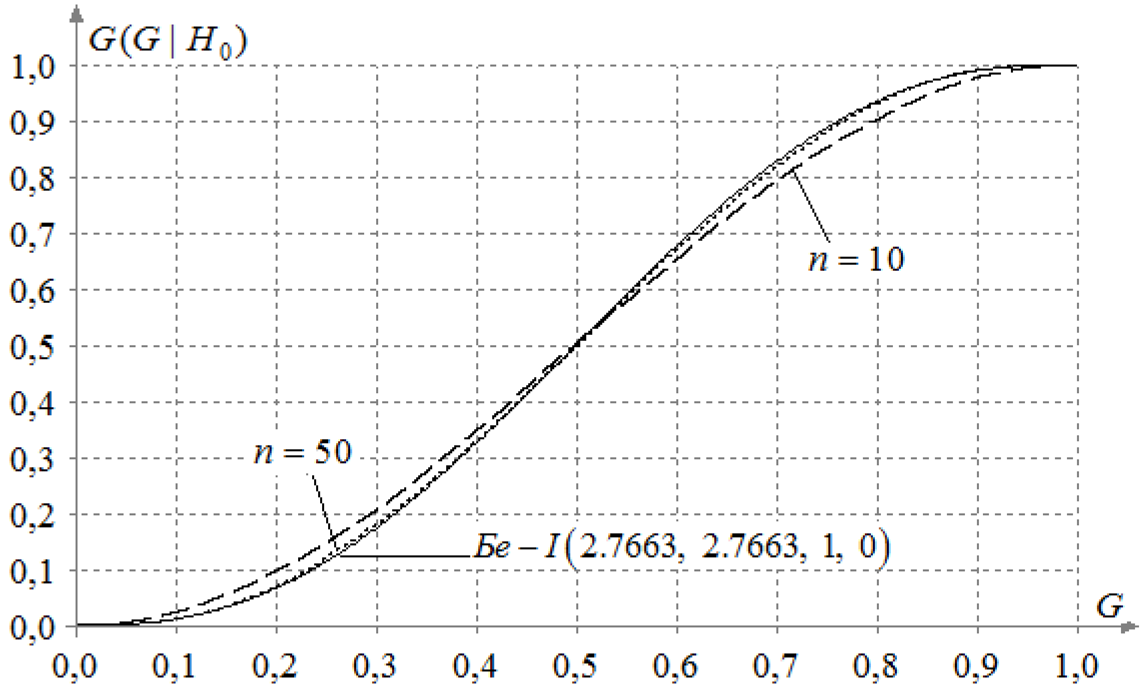


Рисунок 3.8 – Сходимость распределения статистики (3.4) G-критерия к бета-распределению 1-го рода

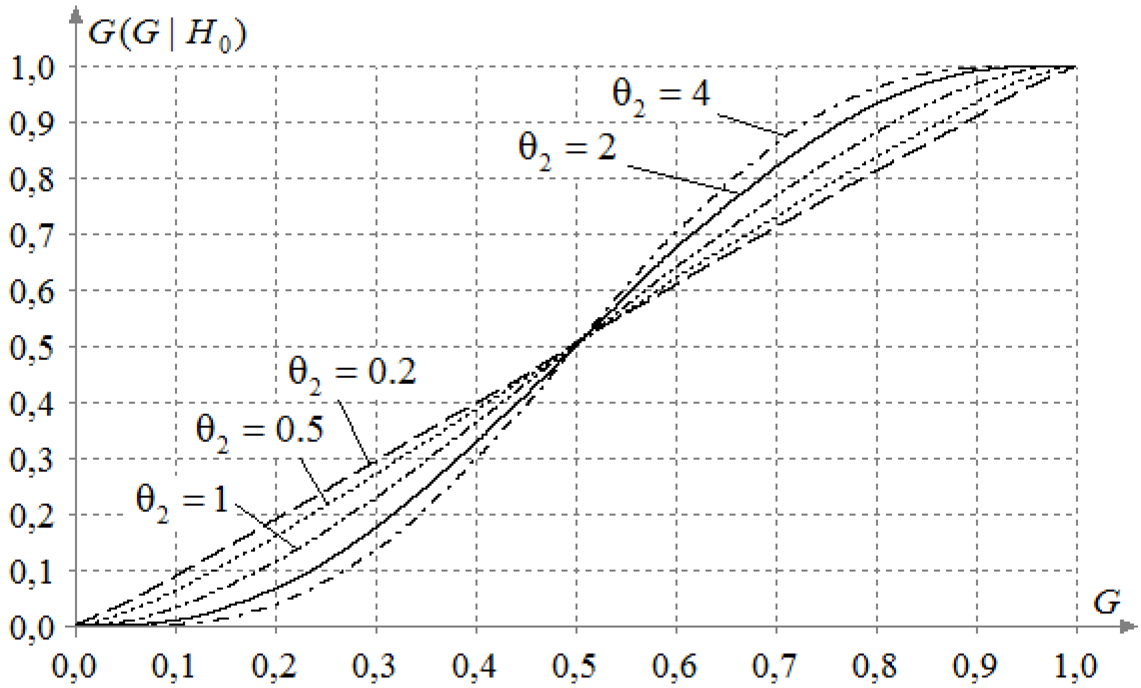


Рисунок 3.9 – Распределения статистики (3.4) *G*-критерия Хсу в случае принадлежности случайных величин законам семейства (2.3) при различных значениях параметра формы при $n = 100$

В случае нарушения стандартного предположения о нормальности x_i законами величин W_k, $k=1,2,...,n-1$, не будут распределениями Фишера. Для корректного применения критерия в нестандартных условиях должны быть найдены и использоваться при вычислении γ_k действительные распределения величин W_k, $k=1,2,...,n-1$ (что предпочтительней, так как распределение G-статистики будет то же), либо могут использоваться $F_{n-k,k}(W)$-распределения Фишера, но тогда в этих условиях должно находиться неизвестное распределение G-статистики (что менее предпочтительно, но проще при реализации, так как надо найти только одно распределение).

Оценки мощности критерия Хсу с H (3.3) и G (3.4) статистиками относительно близких конкурирующих гипотез $H_8 - H_{15}$, соответствующих наличию тренда в дисперсии наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.32–А.35 в приложении А.

Способность критериев при малых объемах выборок отличать от H_0 такие близкие конкурирующие гипотезы достаточно невысока. Например, для того, чтобы различать гипотезы H_0 и H_{10} с заданной вероятностью ошибки 1-го рода $\alpha = 0.1$ и с вероятностью ошибки 2-го рода $\beta \le 0.1$ в случае критерия Хсу требуются объемы выборок $n \ge 900$, а для различения в таких же условиях H_0 и H_8 объемы выборок должны быть ещё больше ($n \ge 6000$).

3.2.4 Ранговые критерии обнаружения «сдвига дисперсий» Клотца и Сэвиджа

Ранговые критерии обнаружения изменения параметра масштаба (характеристики рассеяния) в неизвестной точке опираются на использование семейства ранговых статистик вида [98]

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} i a_n(R_i), \tag{3.5}$$

где R_i – ранги выборочных значений в упорядоченном ряду измерений.

Критерии различаются используемыми метками a_n. Их вид и определяет название критерия. Часто используются:

- *метки Клотца* $a_{1n}(i)=U^2_{i/(n+1)}$, где U_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона;
- *метки Сэвиджа* $a_{2n}(i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}$.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 критерии со статистиками $S_{R,j}=\sum_{i=1}^{n} i a_{jn}(R_i)$, $j=1,2$ свободны от распределения и симметричны относительно $E[S_{R,j}]=\frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{jn}(i)$.

З а м е ч а н и е. Необходимо отметить, что вычисление статистики критерия Сэвиджа, принимающей вид

$$S_{R,2}=\sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot\sum_{j=1}^{R_i}\frac{1}{n-j+1}\right],$$

возможно лишь при целых значениях рангов выборочных значений, а, следовательно, данный критерий некорректно применять для анализа выборок, включающих повторяющиеся значения (например, данных с ограниченной точностью).

Обычно используются нормализованные критерии со статистиками вида

$$S^*_{R,j}=\frac{S_{R,j}-E[S_{R,j}]}{\sqrt{D[S_{R,j}]}}, \tag{3.6}$$

где

$$E[S_{R,1}]=\frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n}U^2_{i/(n+1)},\ E[S_{R,2}]=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$D[S_{R,1}]=\frac{n(n+1)}{12}\sum_{i=1}^{n}U^4_{i/(n+1)}-\frac{1}{3n+3}\left[E[S_{R,1}]\right]^2,\ D[S_{R,2}]=\frac{n(n+1)}{12}(n-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}).$$

Статистики (3.6) приближенно подчиняются стандартному нормальному закону (см. рис. 3.10). Сходимость распределения статистики к стандартному нормальному закону исследовалась в [97].

Исследование методами статистического моделирования распределений статистики критерия с метками Клотца показало, что при $n > 20$ распределение достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. Распределения статистики критерия с метками Сэвиджа также хорошо согласуются со стандартным нормальным законом, но при $n > 30$ (см. рис. 3.11).

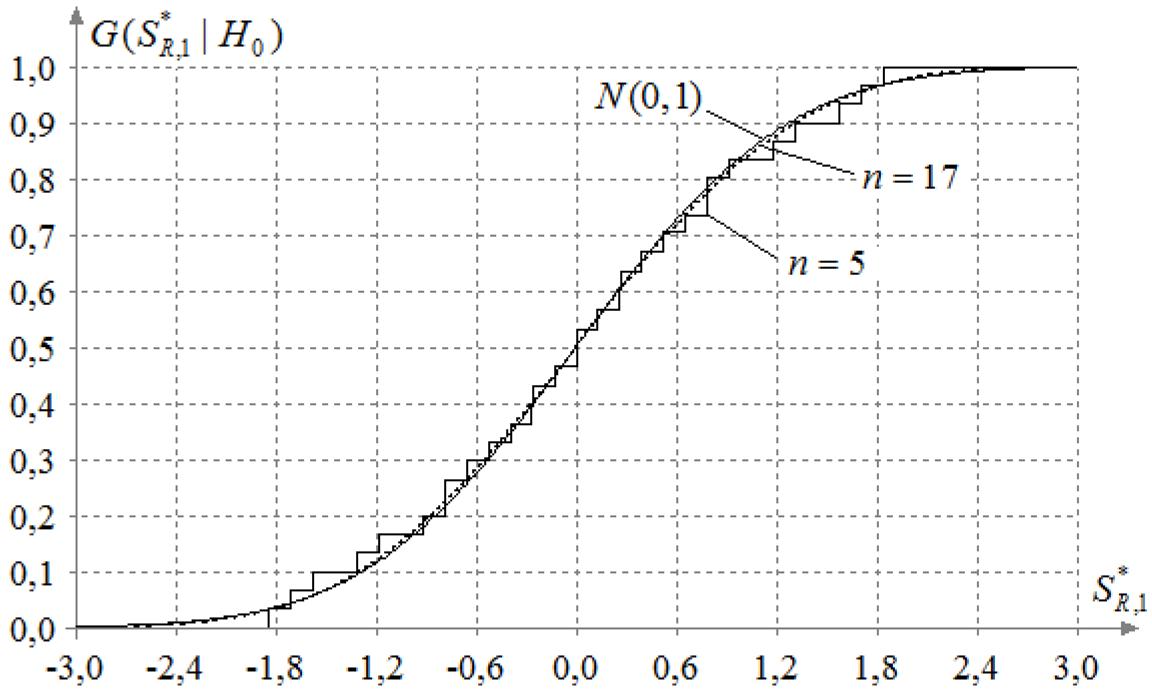


Рисунок 3.10 – Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики $S^*_{R,1}$ рангового критерия с метками Клотца

Оценки мощности критериев с метками Клотца и Сэвиджа относительно близких конкурирующих гипотез $H_8 - H_{15}$, соответствующих наличию тренда в дисперсии наблюдаемых случайных величин, приведены в таблицах А.36–А.39 в приложении А.

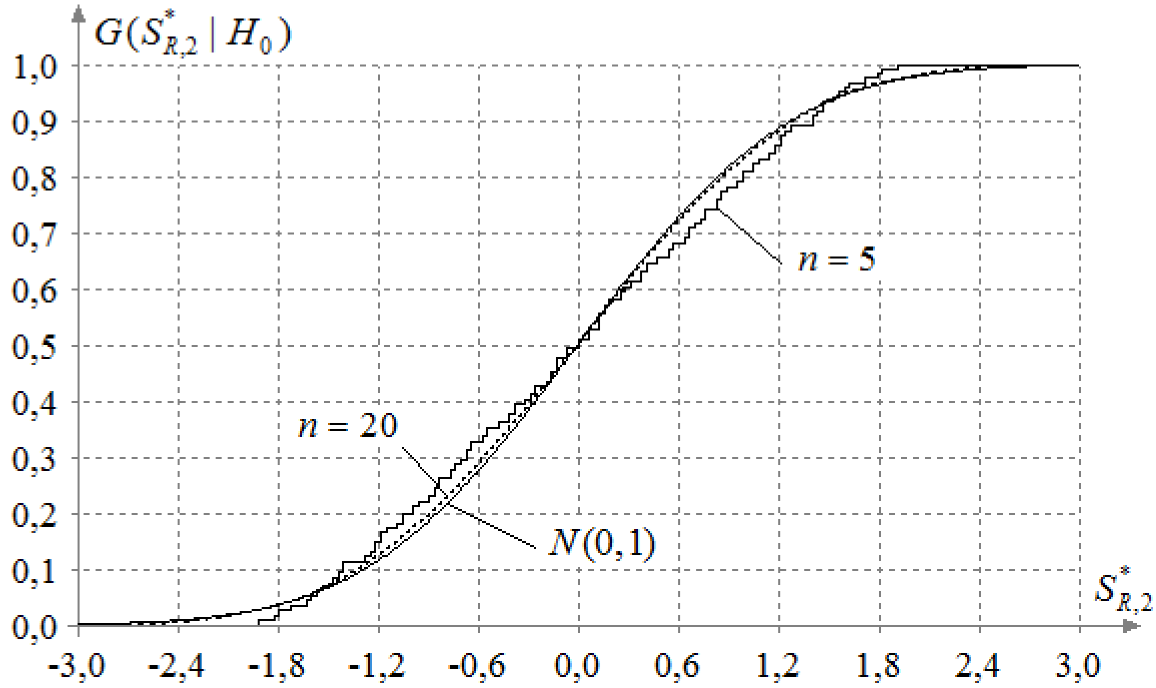


Рисунок 3.11 – Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики $S^*_{R,2}$ рангового критерия с метками Сэвиджа

3.3 Сравнительный анализ критериев, используемых для проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии

В ходе исследований методами статистического моделирования (для вероятностей ошибок первого рода $\alpha = 0.15,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.01$) были получены оценки мощности рассматриваемых критериев относительно конкурирующих гипотез $H_8 - H_{12}$, соответствующих сдвигу величины дисперсии [83]. Была исследована мощность критериев относительно конкурирующих гипотез H_{13}, H_{14}, H_{15}, соответствующих наличию линейного или нелинейного тренда в характеристиках рассеяния анализируемых процессов.

Для сравнительного анализа мощности в таблицу 3.3 вынесены оценки мощности только при уровне значимости $\alpha = 0.1$ и объеме выборок n=100. Критерии в колонках таблицы расположены в порядке убывания мощности $1-\beta$.

Таблица 3.3 – Сравнительный анализ мощности критериев проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях (n=100, $\alpha = 0.1$)

№ п/п	Относительно H_8	$1-\beta$	Относительно H_9	$1-\beta$	Относительно H_{10}	$1-\beta$
1	Хсу H	0.156	Хсу H	0.304	Хсу H	0.500
2	Клотца	0.151	Клотца	0.287	Клотца	0.469
3	Хсу G	0.147	Хсу G	0.269	Хсу G	0.430
4	Кокса–Стюарта	0.123	Кокса–Стюарта	0.188	Кокса–Стюарта	0.284
5	Сэвиджа	0.110	Фостера–Стюарта	0.130	Фостера–Стюарта	0.165
6	Фостера–Стюарта	0.106	Сэвиджа	0.129	Сэвиджа	0.159

№ п/п	Относительно H_{11}	$1-\beta$	Относительно H_{12}	$1-\beta$	Относительно H_{13}	$1-\beta$
1	Хсу H	0.991	Хсу H	1.000	Хсу H	0.836
2	Клотца	0.982	Клотца	1.000	Хсу G	0.818
3	Хсу G	0.933	Кокса–Стюарта	0.997	Клотца	0.807
4	Кокса–Стюарта	0.808	Хсу G	0.993	Кокса–Стюарта	0.489
5	Фостера–Стюарта	0.394	Фостера–Стюарта	0.625	Фостера–Стюарта	0.346
6	Сэвиджа	0.364	Сэвиджа	0.610	Сэвиджа	0.246

№ п/п	Относительно H_{14}	$1-\beta$	Относительно H_{15}	$1-\beta$
1	Хсу H	0.711	Хсу H	0.162
2	Клотца	0.678	Сэвиджа	0.095
3	Хсу G	0.545	Фостера–Стюарта	0.082
4	Сэвиджа	0.196	Хсу G	0.057
5	Кокса–Стюарта	0.143	Кокса–Стюарта	0.052
6	Фостера–Стюарта	0.048	Клотца	0.104

При близких конкурирующих гипотезах критерии Хсу с H и G статистиками, а также критерий Клотца показали наиболее высокую мощность относительно рассмотренного множества конкурирующих гипотез [78]. Они показали способность обнаружить тренд в характеристиках рассеяния при его 10% увеличении [83].

Критерии Хсу с H- и G-статистиками и критерий Клотца также хорошо отличают гипотезу H_0 от конкурирующих, которым соответствует наличие линейного или периодического тренда в характеристиках рассеяния (от гипотез H_{13}, H_{14}). В то же время критерии Кокса–Стюарта, Сэвиджа, Фостера–Стюарта не могут достаточно надежно обнаружить периодический тренд в дисперсии (мала мощность относительно рассмотренной гипотезы H_{14}).

К сожалению, ни один из рассмотренных критериев не показал способности обнаружить смешанный тренд в дисперсии (относительно рассмотренной гипотезы H_{15} показали чрезвычайно малую мощность).

Рассмотренные критерии можно расположить в порядке предпочтения (в порядке убывания мощности) следующим образом:

$$\text{H-критерий Хсу} \succ \text{Клотц} \succ \text{G-критерий Хсу} \succ \text{Кокса–Стюарта} \succ$$
$$\succ \text{Фостера–Стюарта} \succ \text{Сэвиджа.}$$

3.4 Влияние степени округления на распределения статистик критериев об отсутствии тренда в дисперсиях

Рассмотрим влияние степени округления измеряемых величин на распределения статистик критериев, используемых для проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях при выполнении стандартных предположений о нормальности исходных данных.

Распределение статистик H^* критерия Хсу и $S_{R,1}^*$ рангового критерия с метками Клотца, используемых для проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях, в асимптотике описываются стандартным нормальным законом и, как показали настоящие исследования, в случае «грубого» округления наблюдаемых значений (измерений) существенно не отклоняются от $N(0,1)$.

В результате проведенных в диссертационной работе исследований было отмечено, что различие между распределениями $G-$статистики критерия Хсу, построенным по округленным и неокругленным наблюдениям непрерывной случайной величины, крайне незначительно и уменьшается с ростом объема выборки.

Другая ситуация с критериями Кокса-Стюарта и Фостера-Стюарта. При справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях асимптотическим распределением статистики критерия Кокса-Стюарта является стандартный нормальный закон, а для распределения статистики критерия

Фостера-Стюарта – соответствующее t-распределение Стьюдента. Однако, в случае округления наблюдаемых случайных величин, распределения статистик данных критериев существенно отклоняются от асимптотических в область меньших значений. Соответствующую картину для критерия Кокса-Стюарта иллюстрирует рисунок 3.12, а для критерия Фостера-Стюарта – рисунок 3.13.

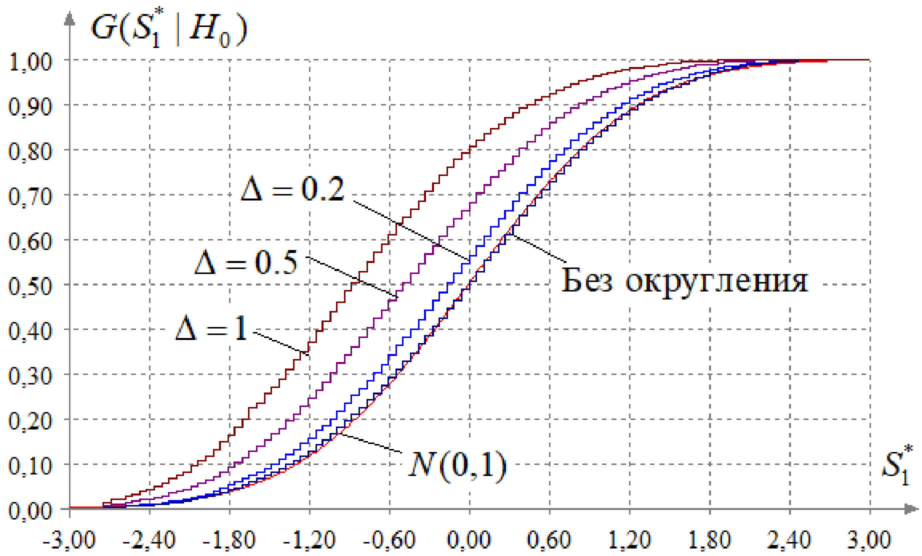


Рисунок 3.12 – Распределения $G(S_1^* \mid H_0)$ статистики критерия Кокса-Стюарта в зависимости от Δ при $n = 100$

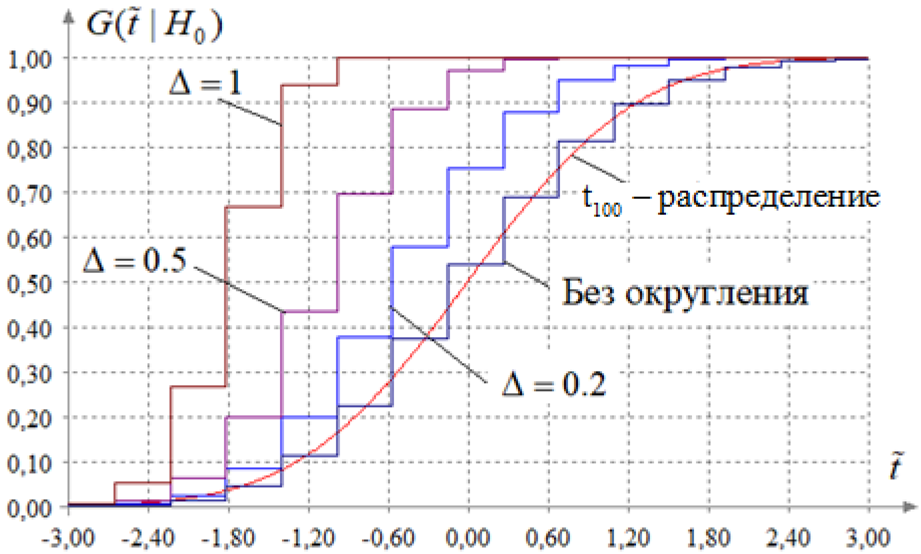


Рисунок 3.13 – Распределения $G(\tilde{t} \mid H_0)$ статистики критерия Фостера-Стюарта в зависимости от Δ при $n = 100$

Вычисление значения статистики критерия Сэвиджа возможно лишь при неповторяющихся значениях случайной величины (при различных рангах выборочных значений). При увеличении степени округления в выборках увеличивается количество повторяющихся значений, что делает невозможным корректное применение критерия.

Таким образом, для критериев Хсу с G и H^* статистиками и для рангового критерия с метками Клотца $S^*_{R,1}$ влияние степени округления измеряемых величин на распределения статистик незначительно. В то же время эти критерии с ростом степени округления показали снижение мощности.

Выводы по главе 3

В данной главе для совокупности критериев, ориентированных на проверку гипотезы об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния, в соответствии с целями работы получены следующие результаты.

Исследовано влияние объема выборок на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0.

Для критериев с известными предельными распределениями статистик получены оценки n, начиная с которых можно использовать асимптотическое распределение статистики соответствующего критерия вместо реального распределения, имеющего место при конкретном n.

Для параметрических критериев исследовано поведение распределений статистик при справедливости H_0 в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Отмечены достоинства и недостатки отдельных критериев.

Получены оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам с различными моделями линейного, периодического и смешанного тренда в характеристиках рассеяния. На основании этих оценок рассмотренные критерии можно расположить в порядке убывания мощности следующим образом:

$$\text{H-критерий Хсу} \succ \text{Клотц} \succ \text{G-критерий Хсу} \succ \text{Кокса–Стюарта} \succ$$
$$\succ \text{Фостера–Стюарта} \succ \text{Сэвиджа}.$$

В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях нарушения стандартных предположений с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value}, предусматривающая интерактивное моделирование неизвестных распределений статистик.

Исследовано влияние ограниченной точности измерений на распределения статистик соответствующих критериев. В программном обеспечении реализована возможность корректного применения критериев в условиях изменившихся распределений статистик, связанных со степенью округления Δ.

4 ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ

4.1 Введение

В данной главе исследуется поведение распределений статистик многовыборочных критериев однородности Жанга, Андерсона–Дарлинга и χ^2. Предлагаются новые k-выборочные критерии, базирующиеся на применении к каждой паре анализируемых выборок двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга. Для большинства k-выборочных критериев отсутствует информация о распределениях их статистик при справедливости проверяемой гипотезы. Поэтому при проверке гипотезы однородности приходится использовать ограниченные таблицы процентных точек, что существенно сужает область применения критериев. Для рассматриваемого множества критериев выявляются реальные свойства критериев при ограниченных объёмах анализируемых выборок; отмечаются достоинства и недостатки отдельных критериев.

Для критериев, распределение статистик которых зависят от объема выборок и неизвестны, предлагается альтернативный способ определения достигнутого уровня значимости, опирающийся на интерактивное исследование распределения статистики используемого критерия.

Для выбора наиболее предпочтительного критерия, ориентированного на проверку гипотезы однородности законов k выборок, методами статистического моделирования определяются оценки мощности рассмотренной группы критериев. По полученным оценкам мощности относительно ряда конкурирующих гипотез рассматриваемые критерии упорядочиваются в порядке убывания мощности.

Мощность рассматриваемых критериев оценивается относительно трёх выбранных альтернатив, соответствующих изменению параметра сдвига, изменению параметра масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежит близким, но различным законам (нормальному и логистическому) [96].

В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривается принадлежность всех выборок стандартному нормальному закону. В случае k выборок в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выбирается принадлежность $k-1$ выборки стандартному нормальному закону, а k-й – нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0 = 0.1$ и параметром масштаба $\theta_1 = 1$, в качестве гипотезы H_2 – принадлежность $k-1$ выборки стандартному нормальному закону, а k-й – нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0 = 0$ и параметром масштаба $\theta_1 = 1.1$, в качестве конкурирующей гипотезы H_3 – принадлежность $k-1$ выборки стандартному нормальному закону, а k-й – логистическому закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = 1$. При проведении исследований ограничимся рассмотрением выборок одинакового объёма.

Остановимся подробнее на особенностях рассматриваемых критериев однородности законов.

4.2 Критерии Жанга

Непараметрические критерии, предложенные в работах Жанга [69, 71, 72] дают возможность сравнивать $k \geq 2$ выборок [69]. Предложенные Жангом критерии являются развитием критериев однородности Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга.

Критерии согласия Жанга [69] показывают некоторое преимущество в мощности по сравнению с критериями согласия Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга [95], а определённым недостатком, ограничивающим их применение, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок.

Аналогичным недостатком (зависимостью от объёмов сравниваемых выборок) обладают и варианты критериев Жанга, предназначенные для проверки однородности законов. В случае применения указанных критериев автор рекомендует для оценивания p_{value} использовать метод Монте–Карло [69].

Задача моделирования распределений статистик критериев однородности Жанга, по сравнению с аналогичной задачей для критериев согласия, оказывается много проще, так как приходится моделировать распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев в случае принадлежности анализируемых выборок равномерному закону.

Пусть $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$ упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_i(x)$, $(i=\overline{1,k})$ и пусть $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$, где $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, объединённая упорядоченная выборка. Обозначим R_{ij} ранг j-го упорядоченного наблюдения x_{ij} i-й выборки в объединённой выборке. Пусть $X_0=-\infty$, $X_{n+1}=+\infty$, а ранги $R_{i,0}=1$, $R_{i,n_i+1}=n+1$.

В критериях используется модификация эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$, принимающая в точках разрыва X_m, $m=\overline{1,n}$, значения $\hat{F}(X_m)=(m-0.5)/n$ [69].

В связи с возможным наличием (в реальных данных) повторяющихся наблюдений для объединённой выборки нужно знать ранги её элементов $R(m)$, $m=\overline{1,n}$, так как для повторяющихся элементов они будут равными и будут отличаться от m.

4.2.1 Критерий $Z_К$ Жанга

Статистика $Z_К$ критерия однородности Жанга имеет вид [69]:

$$Z_{\text{К}} = \max_{1 \le m \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i \left[F_{i,m} \ln \frac{F_{i,m}}{F_m} + \left(1 - F_{i,m}\right) \ln \frac{1 - F_{i,m}}{1 - F_m} \right] \right\}, \tag{4.1}$$

где $F_m = \hat{F}(X_m)$, так что $F_m = (m - 0.5)/n$, а вычисление $F_{i,m} = \hat{F}_i(X_m)$ осуществляется следующим образом. В начальный момент значения $j_i = 0$, $i = \overline{1,k}$. Если $R_{i,j_i+1} = R(m)$, то $j_i := j_i + 1$ и $F_{i,m} = (j_i - 0.5)/n_i$, в противном случае $F_{i,m} = j_i / n_i$.

Критерий *правосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *больших* значениях статистики (4.1).

Зависимость распределений $G(Z_{\text{К}} | H_0)$ статистики от объёмов выборок (при равных n_i и $k = 2$) иллюстрирует рисунок 4.1, а зависимость от числа сравниваемых выборок k при $n_i = 20$, $i = \overline{2,k}$, демонстрирует рисунок 4.2.

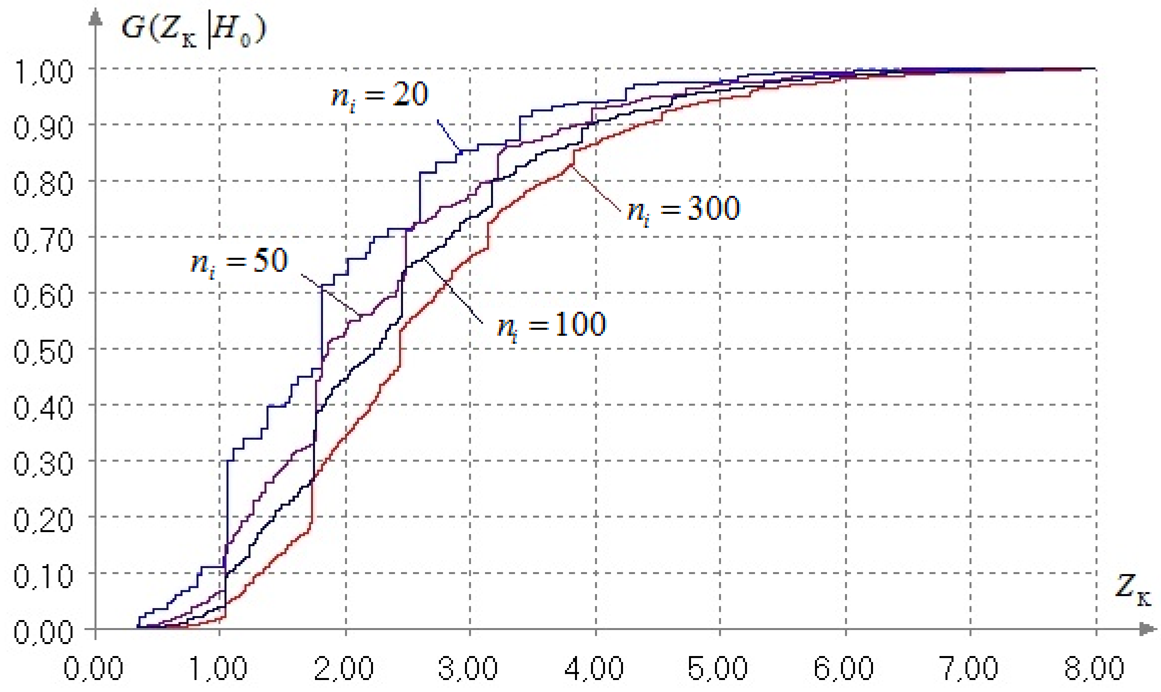


Рисунок 4.1 – Зависимость распределений статистики (4.1) от объёмов выборок

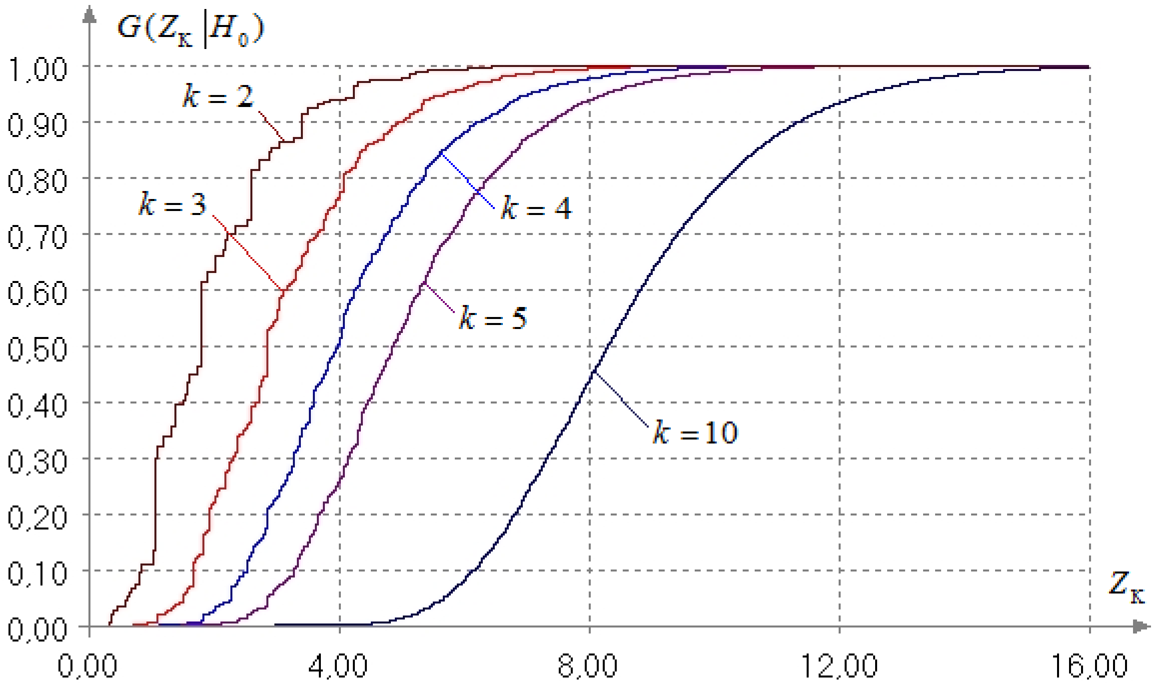


Рисунок 4.2 – Зависимость распределений статистики (4.1) от k

4.2.2 Критерий $Z_А$ Жанга

Статистика $Z_А$ критерия однородности k выборок задается выражением [69]:

$$Z_А = -\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{F_{i,m}\ln F_{i,m} + \left(1-F_{i,m}\right)\ln\left(1-F_{i,m}\right)}{(m-0.5)(n-m+0.5)}, \tag{4.2}$$

где F_m и $F_{i,m}$ вычисляются, как определено выше.

Критерий *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (4.2).

Распределения статистики (4.2) так же зависят от объема выборок и числа сравниваемых выборок. Зависимость распределений $G(Z_A|H_0)$ статистики от объёмов выборок при равных n_i и $k = 2$ показана на рисунке 4.3, а зависимость от числа сравниваемых выборок k при $n_i = 20$, $i = \overline{2,k}$ – на рисунке 4.4.

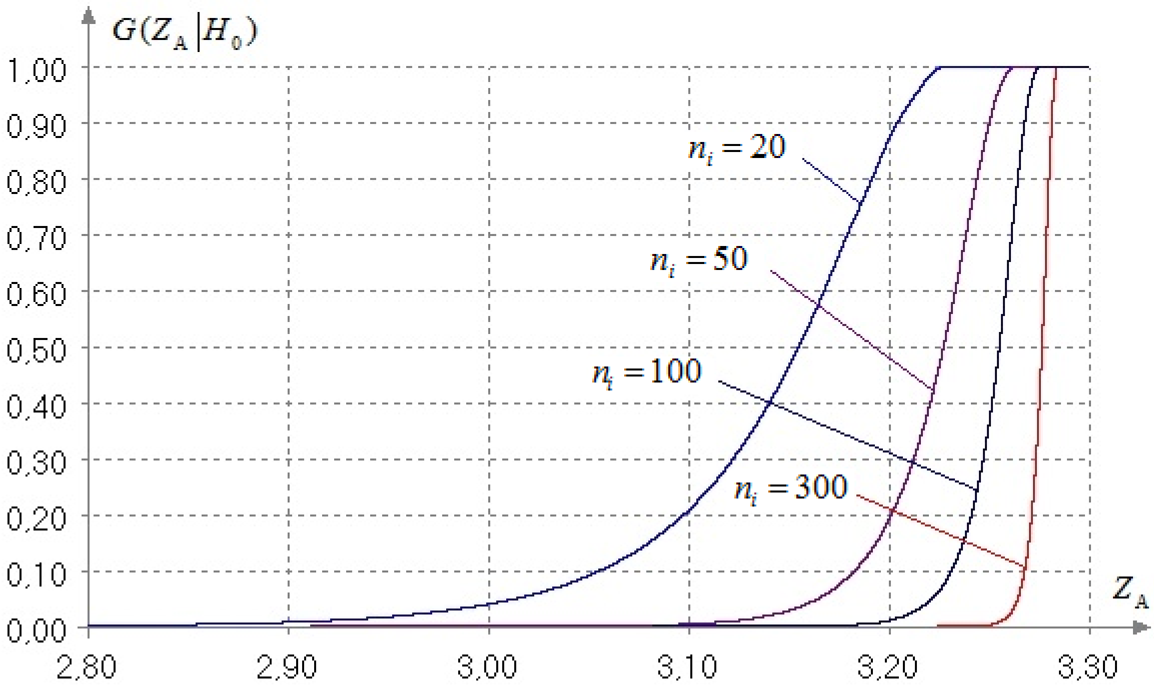


Рисунок 4.3 – Зависимость распределений статистики (4.2) от объёмов выборок, $k = 2$

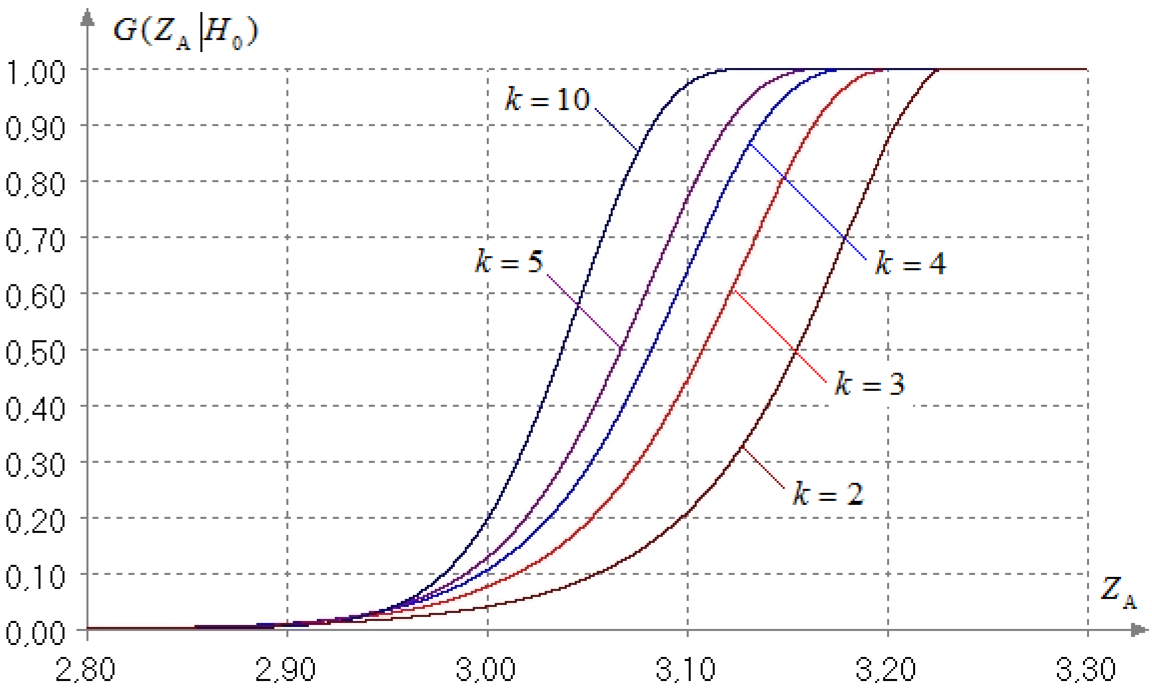


Рисунок 4.4 – Зависимость распределений статистики (4.2) от k ($n_i = 20$)

4.2.3 Критерий Z_C Жанга

Статистика Z_C критерия однородности k выборок определяется выражением [69]:

$$Z_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\left(\frac{n_i}{j-0.5}-1\right)\ln\left(\frac{n}{R_{i,j}-0.5}-1\right). \tag{4.3}$$

Этот критерий также *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (4.3). Распределений $G(Z_C|H_0)$ статистики аналогичным образом зависят от объёмов выборок и от числа анализируемых выборок.

Фактором, затрудняющим применение критериев однородности Жанга со статистиками $Z_\text{К}$, $Z_\text{А}$, Z_C, является зависимость распределений статистик (4.1) – (4.3) от объёмов сравниваемых выборок и числа выборок и дискретность распределения статистики $Z_\text{К}$ [96]. Поэтому для оценки p_{value} предпочтительней использовать реальные распределения статистик, находимые с использование статистического моделирования [59].

В рамках развиваемого программного обеспечения ISW реализован интерактивный режим исследования распределений статистик критериев однородности законов с последующим использованием полученного распределения при принятии решения о результатах проверки гипотезы (для вычисления p_{value}).

4.3 *k*-выборочный критерий Андерсона–Дарлинга

k-выборочный критерий однородности Андерсона–Дарлинга представлен в [53]. Обозначим эмпирическую функцию распределения, соответствующую i-й выборке, как $F_{in_i}(x)$, а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединённой выборке объёмом $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, как $H_n(x)$. Статистика k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга (AD) определяется выражением

$$A_{kn}^2=\sum_{i=1}^{k} n_i \int_{B_n} \frac{[F_{in_i}(x)-H_n(x)]^2}{\left(1-H_n(x)\right)H_n(x)}\,dH_n(x),$$

где $B_n=\{x\in R:\ H_n(x)<1\}$. В предположении о непрерывности $F_i(x)$ по упорядоченной объединённой выборке $X_1\le X_2\le\ldots\le X_n$ в [53] получено простое выражение для вычисления статистики:

$$A_{kn}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(nM_{ij}-jn_i\right)^2}{j(n-j)},$$

где M_{ij} – число элементов в i-й выборке, которые не больше чем X_j. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики.

Окончательно в работе [53] статистика приобретает следующий вид:

$$T_{kn}=\frac{A_{kn}^2-(k-1)}{\sqrt{D[A_{kn}^2]}}, \tag{4.4}$$

где дисперсия определяется выражением [53]

$$D\left[A_{kn}^2\right]=\frac{an^3+bn^2+cn+d}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

при

$$a=(4g-6)(k-1)+(10-6g)H,$$

$$b=(2g-4)k^2+8hk+(2g-14h-4)H-8h+4g-6,$$

$$c=(6h+2g-2)k^2+(4h-4g+6)k+(2h-6)H+4h,$$

$$d=(2h+6)k^2-4hk,$$

где

$$H=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i},\quad h=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i},\quad g=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{1}{(n-i)j}.$$

Асимптотические (предельные) распределения статистики (4.4) зависят от числа сравниваемых выборок k и не зависят от n_i. С ростом k распределение статистики (4.4) медленно сходится к стандартному нормальному закону (см. рис. 4.5).

В [53] для статистики (4.4) для ряда значений k построена таблица критических значений. На основании результатов статистического моделирования нами были построены приближенные модели предельных распределений статистики (4.4) для $k = 2 \div 11$ [59, 82, 94]. Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1} \Bigg/ \left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3} \right]^{\theta_0+\theta_1}, \quad (4.5)$$

представленные в таблице 4.1 в виде $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ при конкретных значениях параметров этого закона. Приведенные модели построены по смоделированным выборкам статистик при числе имитационных экспериментов $N = 10^6$ и $n_i = 10^3$.

Таблица 4.1 – Модели предельных распределений статистики (4.4)

k	Модель
2	B_{III} (3.1575, 2.8730, 18.1238, 15.0000, –1.1600)
3	B_{III} (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000)
4	B_{III} (4.2657, 5.7035, 5.3533, 12.8243, –1.7500)
5	B_{III} (6.2992, 6.5558, 5.6833, 13.010, –2.0640)
6	B_{III} (6.7446, 7.1047, 5.0450, 12.8562, –2.2000)
7	B_{III} (6.7615, 7.4823, 4.0083, 11.800, –2.3150)
8	B_{III} (5.8057, 7.8755, 2.9244, 10.900, –2.3100)
9	B_{III} (9.0736, 7.4112, 4.1072, 10.800, –2.6310)
10	B_{III} (10.2571, 7.9758, 4.1383, 11.186, –2.7988)
11	B_{III} (10.6848, 7.5950, 4.2041, 10.734, –2.8400)
∞	N(0.0, 1.0)

В таблице 4.2 представлены уточненные по сравнению с [53] критические значения $T^2_{kn}(\alpha)$ статистики (4.4), полученные по результатам статистического моделирования, а также оценки $P\{T^2_{kn} < T^2_{kn}(\alpha)\} = 1-\hat{\alpha}$, вычисленные в соответствии с моделями, приведенными в таблице 4.1. По отклонению $1-\hat{\alpha}$ от $1-\alpha$ можно судить о точности построенных моделей.

Таблица 4.2 – Уточненные верхние критические значения $T^2_{kn}(\alpha)$ статистики (4.4) и оценки $1-\hat{\alpha} = P\{T^2_{kn} < T^2_{kn}(\alpha)\}$, получаемые по моделям предельных распределений

k		$1-\alpha$				
		0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.325	1.228	1.966	2.731	3.784
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.900	0.949	0.973	0.988
3	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.439	1.300	1.944	2.592	3.429
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.949	0.974	0.989
4	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.491	1.321	1.925	2.511	3.277
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.975	0.990
5	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.523	1.331	1.900	2.453	3.153
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.901	0.951	0.976	0.991
6	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.543	1.333	1.885	2.410	3.078
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.949	0.975	0.990
7	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.557	1.337	1.870	2.372	3.017
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.975	0.991
8	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.567	1.335	1.853	2.344	2.970
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.899	0.950	0.976	0.991
9	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.577	1.334	1.847	2.323	2.927
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.900	0.951	0.976	0.991
10	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.582	1.3345	1.838	2.306	2.899
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.951	0.976	0.991
11	$T^2_{kn}(\alpha)$	0.589	1.332	1.827	2.290	2.867
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.976	0.991
∞	$T^2_{\infty n}(\alpha)$	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326

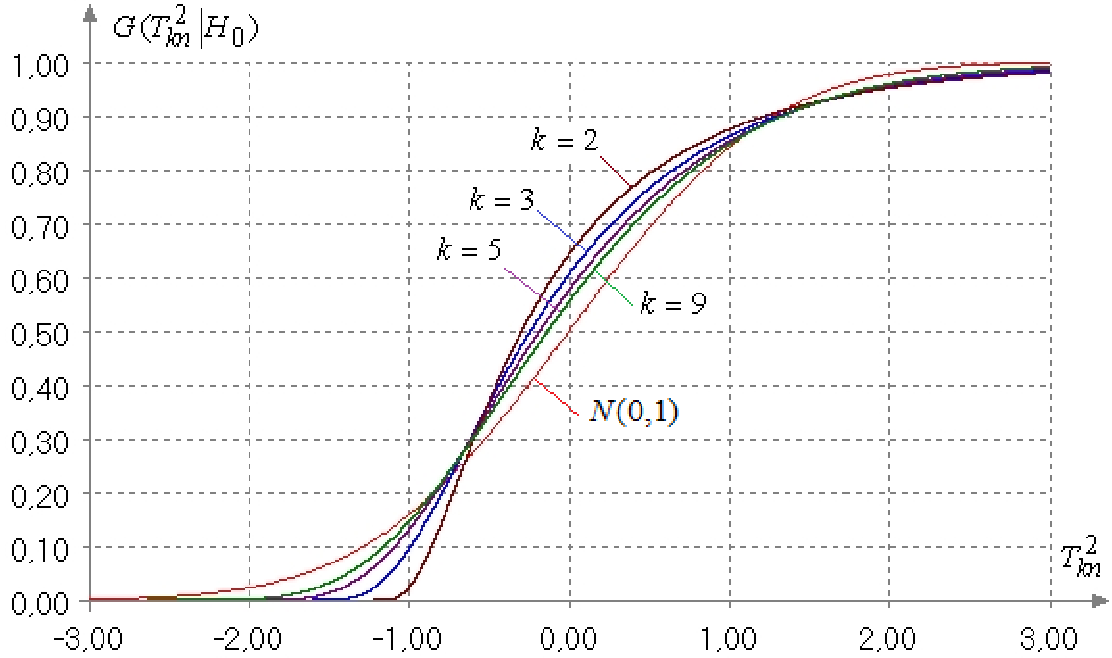


Рисунок 4.5 – Зависимость предельных распределений статистики (4.4) от k

4.4 *k*-выборочные критерии на базе 2-выборочных

В работе [36] рассматривался общий подход к построению k-выборочных аналогов критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга. Для k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга [53], так же как и в критериях однородности Жанга, строится объединённая выборка, а статистики критериев представляет собой меру отклонения эмпирических распределений отдельных выборок от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок.

Возможен другой путь. Для анализа k выборок можно к каждой паре выборок применить двухвыборочный критерий со статистикой S (всего $(k-1)k/2$ вариантов), а решение принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого k-выборочного критерия (в случае использования правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1 \le i < k \\ i < j \le k}} \{S_{i,j}\}, \tag{4.6}$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i-й и j-й выборок.

Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при **больших** значениях статистики $S_{\max}$. Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми оказывается наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия.

В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова (лучше в модифицированном виде [96]), Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик $S_{\max}$ сходятся к некоторым предельным, модели которых могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

4.4.1 Критерий максимума Смирнова

Используемая в критерии Смирнова статистика D_{n_2,n_1} вычисляется в соответствии с соотношениями [75]:

$$D^{+}_{n_2,n_1} = \max_{1 \le r \le n_2}\left[\frac{r}{n_2} - F_{1n_1}(x_{2r})\right] = \max_{1 \le s \le n_1}\left[F_{2n_2}(x_{2s}) - \frac{s-1}{n_1}\right],$$

$$D^{-}_{n_2,n_1} = \max_{1 \le r \le n_2}\left[F_{1n_1}(x_{2r}) - \frac{r-1}{n_2}\right] = \max_{1 \le s \le n_1}\left[\frac{s}{n_1} - F_{2n_2}(x_{1s})\right],$$

$$D_{n_2,n_1} = \max\left(D^{+}_{n_2,n_1}, D^{-}_{n_2,n_1}\right).$$

При справедливости гипотезы H_0 и неограниченном увеличении объемов выборок статистика

$$S_{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_2,n_1} \tag{4.7}$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [75].

В случае k-выборочного варианта критерия Смирнова в качестве $S_{i,j}$ в (4.6) предпочтительней использовать модификацию статистики Смирнова

$$S_{\text{mod}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \left(D_{n_2,n_1} + \frac{n_1 + n_2}{4.6 n_1 n_2} \right), \tag{4.8}$$

распределение которой всегда ближе к предельному распределению Колмогорова $K(S)$ [41]. Статистику $S_{\max}$ в этом случае будем обозначать как $S_{\max}^{Sm}$.

При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью (см. рис. 4.6) и отличаются от асимптотических (предельных) распределений (см. рис. 4.7). Если есть такая возможность, то предпочтительней в качестве n_i выбирать взаимно простые числа, тогда распределения $G(S|H_0)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$ практически не отличаются от асимптотических.

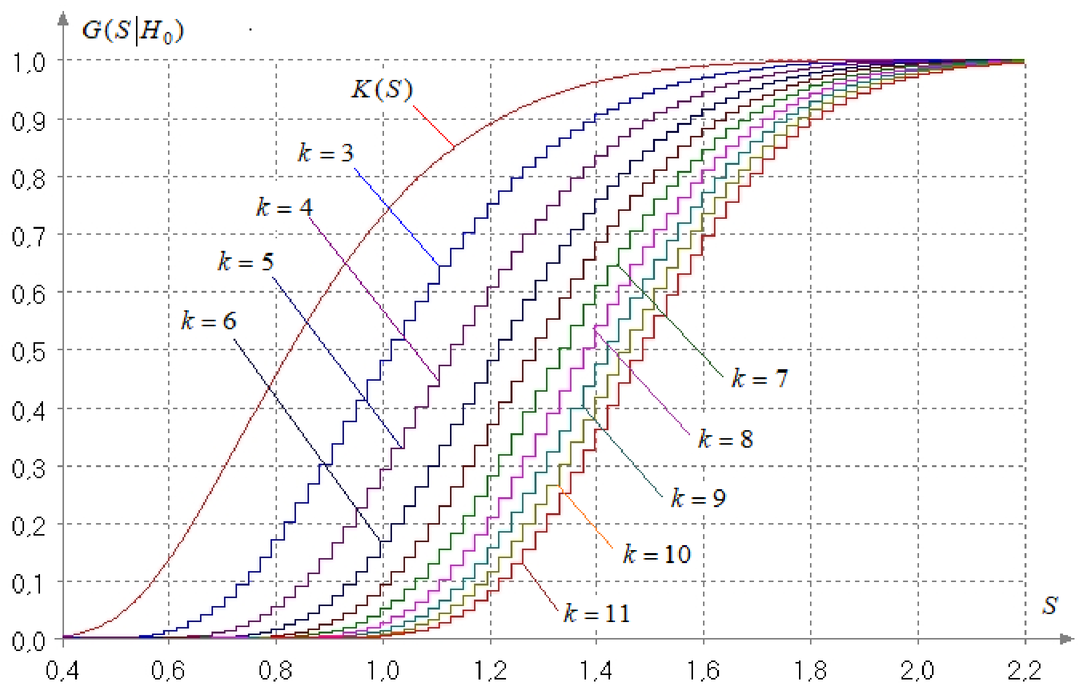


Рисунок 4.6 – Распределения статистики при $n_i = 1000,\ i = \overline{1,k}$

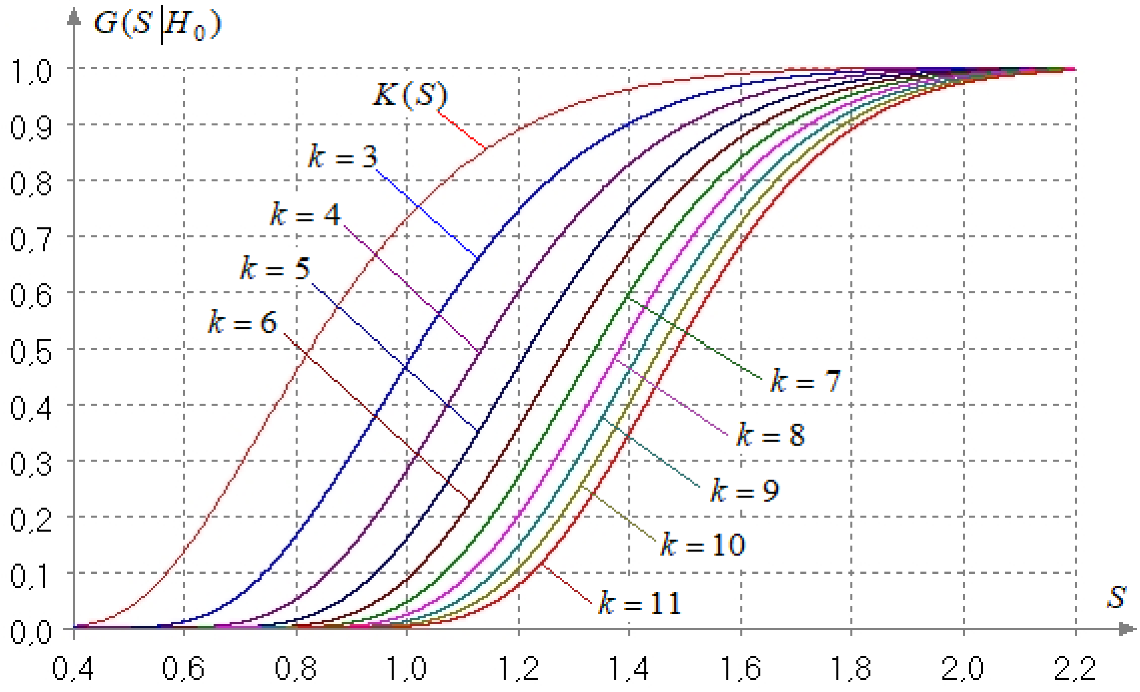


Рисунок 4.7 – Асимптотические распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$

Приближенные модели асимптотических распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$ в виде бета-распределений 3-го рода $\mathrm{B_{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ (4.5) при конкретных значениях параметров, построенные в настоящей работе по результатам статистического моделирования, представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$

k	Модель
2	$K(S)$
3	B_{III} (6.3274, 6.6162, 2.8238, 2.4073, 0.4100)
4	B_{III} (7.2729, 7.2061, 2.6170, 2.3775, 0.4740)
5	B_{III} (7.1318, 7.3365, 2.4813, 2.3353, 0.5630)
6	B_{III} (7.0755, 8.0449, 2.3163, 2.3818, 0.6320)
7	B_{III} (7.7347, 8.6845, 2.3492, 2.4479, 0.6675)
8	B_{III} (7.8162, 8.9073, 2.2688, 2.4161, 0.7120)
9	B_{III} (7.8436, 8.8805, 2.1696, 2.3309, 0.7500)
10	B_{III} (7.8756, 8.9051, 2.1977, 2.3280, 0.7900)
11	B_{III} (7.9122, 9.0411, 2.1173, 2.2860, 0.8200)

В таблице 4.4 представлены критические значения $S_{\max}^{Sm}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$, полученные по результатам статистического моделирования, а также оценки $P\{S_{\max}^{Sm} < S_{\max}^{Sm}(\alpha)\} = 1-\hat{\alpha}$, вычисленные в соответствии с моделями, приведенными в таблице 4.3. По отклонению $1-\hat{\alpha}$ от $1-\alpha$ можно судить о точности построенных моделей. В таблице 4.4 и в ниже приведенных таблицах 4.6 и 4.8 оценки критических значений и оценки $1-\hat{\alpha}$, полученные по моделям, округлены до 3-х десятичных знаков после десятичной точки.

Таблица 4.4 – Верхние критические значения $S_{\max}^{Sm}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$ и оценки $1-\hat{\alpha} = P\{S_{\max}^{Sm} < S_{\max}^{Sm}(\alpha)\}$, получаемые по моделям предельных распределений (см. Табл. 4.3)

k		$1-\alpha$				
		0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.018	1.223	1.356	1.479	1.624
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.900	0.949	0.975	0.990
3	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.206	1.401	1.527	1.640	1.778
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.898	0.949	0.974	0.990
4	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.319	1.507	1.628	1.737	1.870
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.976	0.991
5	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.400	1.582	1.700	1.806	1.933
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.897	0.949	0.975	0.990
6	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.462	1.640	1.754	1.857	1.983
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.897	0.948	0.974	0.990
7	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.513	1.687	1.799	1.901	2.025
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.897	0.949	0.975	0.990
8	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.555	1.726	1.836	1.936	2.060
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.898	0.949	0.975	0.991
9	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.591	1.760	1.868	1.967	2.088
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.976	0.991
10	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.622	1.789	1.897	1.994	2.115
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.898	0.949	0.975	0.991
11	$S_{\max}^{Sm}(\alpha)$	1.651	1.816	1.922	2.018	2.137
	$1-\hat{\alpha}$	0.747	0.898	0.950	0.976	0.991

4.4.2 Критерий максимума Лемана–Розенблатта

Статистика двухвыборочного критерия Лемана–Розенблатта, предложенного в работе [38], используется в форме [75]

$$T = \frac{1}{(n_1+n_2)}\left[n_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left(r_i - i \right)^2 + n_1 \sum_{j=1}^{n_1} \left(s_j - j \right)^2 \right] - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1+n_2)}, \qquad (4.9)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) x_{2i}; s_j – порядковый номер (ранг) x_{1j} в объединенном вариационном ряде. В [45] было показано, что статистика (4.9) в пределе распределена как $a1(t)$ [75].

В случае k-выборочного варианта критерия Лемана–Розенблатта в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{LR}$ вида (4.6) используется статистика (4.9). Зависимость распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рисунок 4.8.

Построенные приближенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$ представлены в таблице 4.5. В данном случае наилучшими моделями оказались распределения Sb–Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x} \right]^2 \right\}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 4.5 как $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Представленные модели позволяют по значениям статистики $S_{\max}^{LR}$ при соответствующем числе k сравниваемых выборок находить оценки p_{value}.

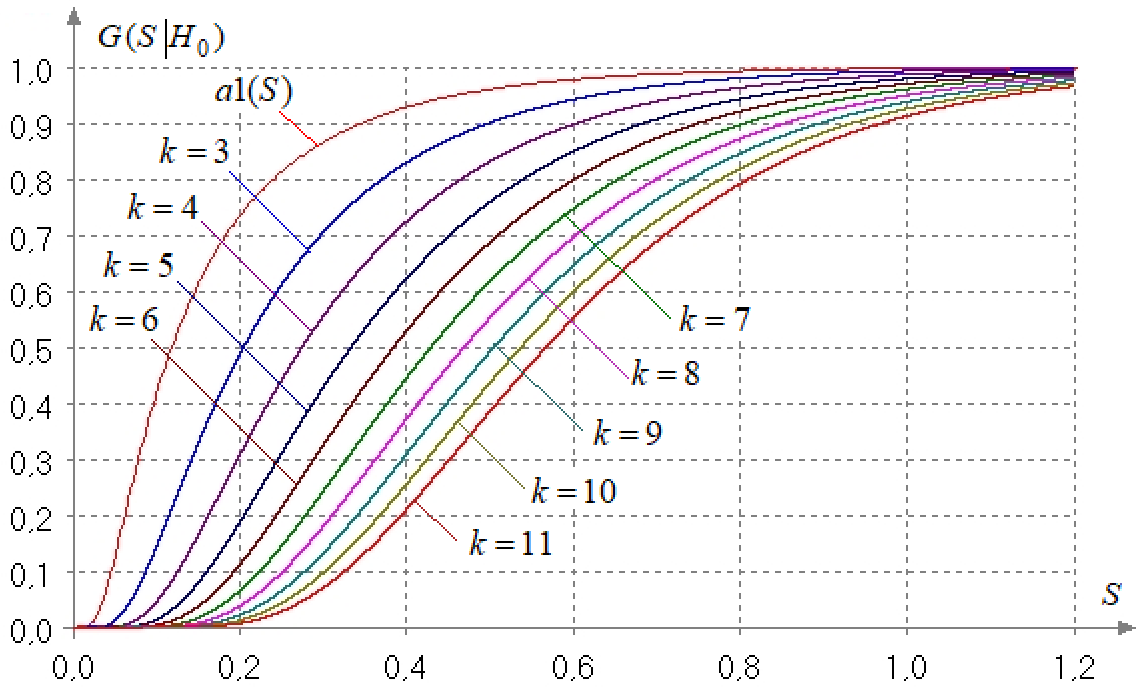


Рисунок 4.8 – Распределения статистики $S_{\max}^{LR}$

Таблица 4.5 – Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{LR}$

k	Модель
2	$a1(t)$
3	Sb(3.2854, 1.2036, 3.0000, 0.0215)
4	Sb(2.5801, 1.2167, 2.2367, 0.0356)
5	Sb(3.1719, 1.4134, 3.1500, 0.0320)
6	Sb(2.9979, 1.4768, 2.9850, 0.0380)
7	Sb(3.2030, 1.5526, 3.4050, 0.0450)
8	Sb(3.2671, 1.6302, 3.5522, 0.0470)
9	Sb(3.4548, 1.7127, 3.8800, 0.0490)
10	Sb(3.4887, 1.7729, 3.9680, 0.0510)
11	Sb(3.4627, 1.8168, 3.9680, 0.0544)

В таблице 4.6 представлены критические значения $S_{\max}^{LR}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{LR}$, полученные по результатам статистического моделирования, а также оценки $P\{S_{\max}^{LR} < S_{\max}^{LR}(\alpha)\} = 1-\hat{\alpha}$, вычисленные в соответствии с моделями, приведенными в таблице 4.5. О точности построенных моделей можно судить по отклонению $1-\hat{\alpha}$ от $1-\alpha$.

Таблица 4.6 – Верхние критические значения $S_{\max}^{LR}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{LR}$ и оценки $1-\hat{\alpha} = P\{S_{\max}^{LR} < S_{\max}^{LR}(\alpha)\}$, получаемые по моделям предельных распределений (см. табл. 4.5)

k		$1-\alpha$				
		0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.209	0.348	0.462	0.582	0.743
	$1-\hat{\alpha}$	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990
3	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.331	0.500	0.628	0.758	0.931
	$1-\hat{\alpha}$	0.752	0.900	0.949	0.973	0.989
4	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.421	0.605	0.741	0.877	1.055
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.898	0.949	0.975	0.991
5	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.492	0.686	0.827	0.965	1.143
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.899	0.949	0.974	0.990
6	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.552	0.751	0.896	1.037	1.217
	$1-\hat{\alpha}$	0.752	0.901	0.951	0.976	0.991
7	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.604	0.807	0.952	1.095	1.277
	$1-\hat{\alpha}$	0.750	0.898	0.949	0.974	0.990
8	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.648	0.855	1.002	1.144	1.330
	$1-\hat{\alpha}$	0.750	0.899	0.949	0.975	0.990
9	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.688	0.898	1.046	1.190	1.378
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.949	0.975	0.990
10	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.724	0.936	1.086	1.230	1.417
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.975	0.991
11	$S_{\max}^{LR}(\alpha)$	0.756	0.970	1.121	1.266	1.453
	$1-\hat{\alpha}$	0.748	0.899	0.950	0.975	0.991

4.4.3 Критерий максимума Андерсона–Дарлинга

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга рассмотрен в работе [49]. Статистика критерия определяется выражением

$$A^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} \frac{\left(M_i(n_1+n_2) - n_1 i\right)^2}{i(n_1+n_2-i)}, \tag{4.10}$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i-му элементу вариационного ряда объединенной выборки. Предельным распределением статистики (4.10) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является распределение $a2(t)$ [75].

В случае k-выборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{AD}$ вида (4.6) используется статистика (4.10). Зависимость распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рисунок 4.9.

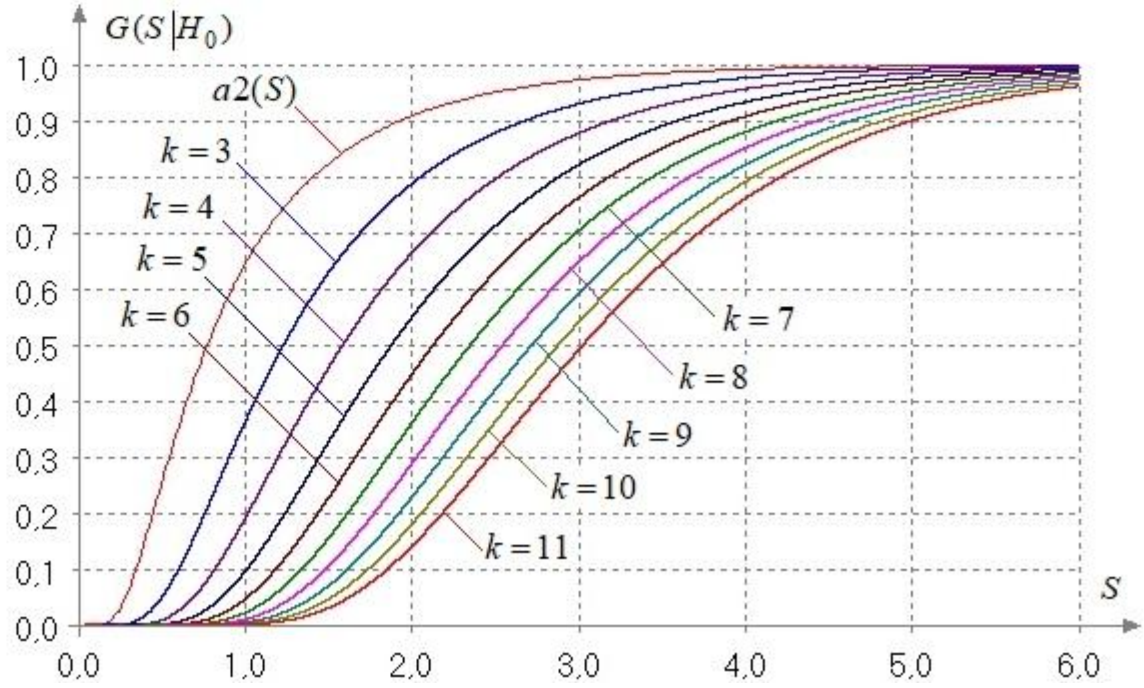


Рисунок 4.9 – Распределения статистики $S_{\max}^{AD}$

Для распределений $G(S_{\max}^{AD}|H_0)$ также построены приближенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ для числа сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$, которые представлены в таблице 4.4. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (4.5), которые в виде $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с конкретными значениями параметров приведены в таблице 4.7 и могут использоваться для оценки p_{value} при k сравниваемых выборках.

В таблице 4.8 представлены критические значения $S_{\max}^{AD}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{AD}$, полученные по результатам статистического моделирования, а также оценки $P\{S_{\max}^{AD} < S_{\max}^{AD}(\alpha)\} = 1 - \hat{\alpha}$, вычисленные в соответствии с моделями, приведенными в таблице 4.7. По отклонению $1 - \hat{\alpha}$ от $1 - \alpha$ можно судить о точности построенных моделей.

Таблица 4.7 – Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{AD}$

k	Модель
2	$a2(t)$
3	B_{III} (4.4325, 2.7425, 12.1134, 8.500, 0.1850)
4	B_{III} (5.2036, 3.2160, 10.7792, 10.000, 0.2320)
5	B_{III} (5.7527, 3.3017, 9.7365, 10.000, 0.3000)
6	B_{III} (5.5739, 3.4939, 7.7710, 10.000, 0.3750)
7	B_{III} (6.4892, 3.6656, 8.0529, 10.500, 0.3920)
8	B_{III} (6.3877, 3.8143, 7.3602, 10.800, 0.4800)
9	B_{III} (6.7910, 3.9858, 7.1280, 11.100, 0.5150)
10	B_{III} (6.7533, 4.2779, 6.6457, 11.700, 0.5800)
11	B_{III} (7.1745, 4.3469, 6.6161, 11.800, 0.6100)

Таблица 4.8 – Верхние критические значения $S_{\max}^{AD}(\alpha)$ статистики $S_{\max}^{AD}$ и оценки $1-\hat{\alpha}=P\{S_{\max}^{AD}<S_{\max}^{AD}(\alpha)\}$, получаемые по моделям предельных распределений (см. табл. 4.7)

k		$1-\alpha$				
		0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	1.247	1.934	2.495	3.077	3.878
	$1-\hat{\alpha}$	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990
3	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	1.853	2.680	3.312	3.952	4.792
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.899	0.949	0.974	0.990
4	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	2.299	3.197	3.868	4.537	5.408
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.899	0.949	0.974	0.990
5	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	2.651	3.595	4.288	4.969	5.847
	$1-\hat{\alpha}$	0.751	0.899	0.949	0.975	0.990
6	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	2.943	3.919	4.629	5.318	6.209
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.976	0.991
7	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	3.194	4.195	4.910	5.606	6.512
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.975	0.991
8	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	3.414	4.429	5.150	5.853	6.771
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.975	0.991
9	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	3.609	4.639	5.366	6.073	7.008
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.976	0.992
10	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	3.787	4.827	5.562	6.272	7.204
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.976	0.991
11	$S_{\max}^{AD}(\alpha)$	3.947	4.997	5.738	6.451	7.384
	$1-\hat{\alpha}$	0.749	0.899	0.950	0.976	0.992

4.5 Критерий однородности χ^2

Для анализа $k \geq 2$ выборок с успехом может использоваться критерий однородности χ^2. В этом случае общая область, которой принадлежат выборки, разбивается на r интервалов (групп). Пусть η_{ij} – количество элементов i-й выборки, попавших в j-й интервал, тогда $n_i = \sum_{j=1}^{r} \eta_{ij}$.

Статистика критерия однородности χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\eta_{ij} - \nu_j n_i / n)^2}{\nu_j n_i} = n \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\eta_{ij}^{\ 2}}{\nu_j n_i} - 1 \right), \qquad (4.11)$$

где $\nu_j = \sum_{l=1}^{k} \eta_{lj}$ – общее число элементов всех выборок, попавших j-й интервал.

Асимптотическим распределением статистики (4.11) является χ^2-распределение с числом степеней свободы $(k-1)(r-1)$ [90].

4.6 Сравнительный анализ мощности *k*-выборочных критериев однородности распределений

В данной работе исследование мощности рассматриваемых критериев однородности проводилось относительно трёх видов альтернатив: изменения параметра сдвига, изменения масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежала близким, но различным законам (нормальному и логистическому) [96].

В таблице 4.9 приведены оценки мощности k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга при $k = 4$. Рассматривалась ситуация с анализом выборок одинакового объёма.

Оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистик при справедливости проверяемой $G(S|H_0)$ и конкурирующих гипотез $G(S|H_1)$, $G(S|H_2)$ и $G(S|H_3)$ при равных объёмах n_i сравниваемых выборок. В качестве примера в таблицах 4.9 и 4.10 приведены оценки мощности критериев при $\alpha = 0.1$ для $k = 3$ и $k = 4$. В случае критерия однородности χ^2 объединённая выборка разбивалась на $r = 10$ равночастотных интервалов.

Таблица 4.9 – Оценки мощности относительно альтернатив $H_1 - H_3$ $(k = 3,\ n_i = n)$

Критерий	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 10^3
Относительно альтернативы H_1						
$S_{\max}^{AD}$	0.113	0.134	0.171	0.314	0.450	0.712
AD	0.113	0.134	0.171	0.313	0.449	0.711
$S_{\max}^{LR}$	0.114	0.134	0.168	0.306	0.437	0.694
$S_{\max}^{Sm}$	0.110	0.128	0.155	0.272	0.383	0.622
Z_C	0.113	0.131	0.160	0.273	0.380	0.612
Z_{A}	0.112	0.130	0.158	0.268	0.371	0.599
Z_{K}	0.110	0.125	0.144	0.231	0.321	0.525
χ^2	0.100	0.108	0.120	0.173	0.226	0.385
Относительно альтернативы H_2						
Z_C	0.107	0.125	0.160	0.319	0.475	0.771
Z_{A}	0.107	0.126	0.162	0.319	0.470	0.767
Z_{K}	0.107	0.123	0.147	0.263	0.376	0.621
AD	0.104	0.111	0.124	0.191	0.273	0.509
χ^2	0.105	0.114	0.129	0.202	0.277	0.495
$S_{\max}^{AD}$	0.102	0.107	0.114	0.165	0.231	0.446
$S_{\max}^{Sm}$	0.103	0.104	0.114	0.136	0.164	0.253
$S_{\max}^{LR}$	0.103	0.104	0.108	0.127	0.152	0.241
Относительно альтернативы H_3						
Z_{A}	0.103	0.108	0.116	0.181	0.279	0.580
Z_C	0.103	0.108	0.116	0.176	0.270	0.568
Z_{K}	0.104	0.110	0.117	0.170	0.233	0.423
χ^2	0.100	0.113	0.121	0.173	0.226	0.382
AD	0.103	0.107	0.114	0.148	0.189	0.315
$S_{\max}^{Sm}$	0.102	0.105	0.111	0.148	0.183	0.288
$S_{\max}^{AD}$	0.102	0.104	0.110	0.134	0.166	0.272
$S_{\max}^{LR}$	0.103	0.104	0.107	0.124	0.145	0.218

Таблица 4.10 – Оценки мощности критериев относительно альтернатив $H_1 - H_3$ $(k = 4,\ n_i = n)$

Критерий	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 10^3

Относительно альтернативы H_1						
$S_{\max}^{AD}$	0.112	0.131	0.165	0.302	0.438	0.706
AD	0.112	0.131	0.164	0.301	0.433	0.701
$S_{\max}^{LR}$	0.113	0.130	0.162	0.293	0.425	0.686
$S_{\max}^{Sm}$	0.111	0.125	0.151	0.261	0.366	0.605
Z_C	0.111	0.126	0.155	0.260	0.368	0.595
Z_{A}	0.111	0.127	0.153	0.255	0.360	0.579
Z_{K}	0.109	0.121	0.141	0.219	0.300	0.502
χ^2	0.102	0.109	0.118	0.167	0.221	0.358
Относительно альтернативы H_2						
Z_C	0.106	0.122	0.158	0.306	0.468	0.761
Z_{A}	0.107	0.124	0.158	0.305	0.463	0.745
Z_{K}	0.106	0.120	0.145	0.249	0.367	0.606
AD	0.104	0.110	0.123	0.180	0.254	0.474
χ^2	0.107	0.113	0.127	0.189	0.271	0.458
$S_{\max}^{AD}$	0.101	0.104	0.111	0.145	0.195	0.381
$S_{\max}^{Sm}$	0.102	0.105	0.108	0.128	0.153	0.221
$S_{\max}^{LR}$	0.102	0.103	0.105	0.118	0.135	0.197
Относительно альтернативы H_3						
Z_{A}	0.103	0.107	0.116	0.179	0.274	0.566
Z_C	0.103	0.107	0.115	0.173	0.257	0.555
Z_{K}	0.103	0.107	0.114	0.161	0.222	0.410
χ^2	0.102	0.110	0.116	0.164	0.218	0.357
AD	0.102	0.106	0.113	0.143	0.179	0.291
$S_{\max}^{Sm}$	0.103	0.104	0.112	0.138	0.166	0.257
$S_{\max}^{AD}$	0.101	0.103	0.107	0.124	0.147	0.229
$S_{\max}^{LR}$	0.102	0.102	0.105	0.116	0.130	0.183

Анализ полученных оценок мощности позволят сделать определённые выводы. Для случая многовыборочных критериев результаты анализа оценок мощности критериев однородности опубликованы в материалах Российской НТК «Обработка информации и математическое моделирование», 2018. Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$S_{\max}^{AD} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{LR} \succ S_{\max}^{Sm} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{A}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{K}} \succ \chi^2.$$

Относительно изменения параметра масштаба –

$$\text{Жанга}\, Z_C \succ \text{Жанга}\, Z_\text{А} \succ \text{Жанга}\, Z_\text{К} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \chi^2 \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{LR}.$$

При этом критерии Жанга со статистиками $Z_\text{А}$ и Z_C практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

Относительно ситуации, когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвёртая – логистическому, критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

$$\text{Жанга}\, Z_\text{А} \succ \text{Жанга}\, Z_C \succ \text{Жанга}\, Z_\text{К} \succ \chi^2 \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{LR}.$$

Можно отметить, что с ростом количества сравниваемых выборок тех же объёмов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез, как правило, снижается, что абсолютно естественно. Например, сложнее выделить ситуацию и отдать предпочтение конкурирующей гипотезе, когда лишь одна из анализируемых выборок принадлежит некоторому другому закону.

Нельзя не отметить, что критерии Жанга со статистиками $Z_\text{К}$, $Z_\text{А}$, Z_C относительно некоторых альтернатив обладают заметным преимуществом в мощности.

4.7 Влияние степени округления на распределения статистик критериев однородности законов

В критериях однородности одновременно анализируется 2 и более выборок. В многовыборочных критериях на распределения статистик влияет неравноточность данных, представленных в выборках.

Рассмотрим, как влияет степень округления на распределения статистик критериев однородности законов в случае справедливости H_0 и принадлежности анализируемых выборок стандартному нормальному закону.

На рисунке 4.10 демонстрируется зависимость распределения статистики $G(S_{LR}|H_0)$ критерия однородности Лемана–Розенблатта от степени округления Δ_2 наблюдений во второй выборке при степени округлении в первой выборке $\Delta_1 = 0.01$ при объёмах выборок $n_i = 1000$.

Уже при $\Delta_2 = 0.05$ отклонение $G(S_{LR}|H_0)$ от $a1(S)$ оказывается существенным. При фиксированном Δ_2 с ростом объёмов выборок отклонение $G(S_{LR}|H_0)$ от $a1(S)$ быстро увеличивается. Отклонение увеличивается с ростом Δ_2 и фиксированном объёме выборки. Распределения статистики $G(S_{LR}|H_0)$ критерия однородности Лемана–Розенблатта зависят от разности Δ_1 и Δ_2.

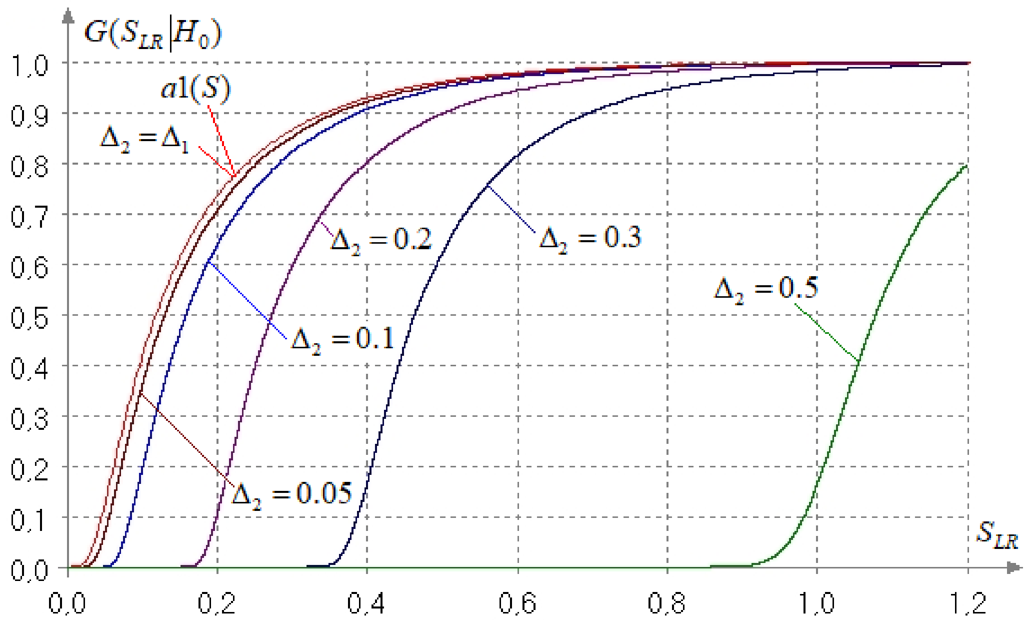


Рисунок 4.10 – Распределения статистики $G(S_{LR}|H_0)$ критерия однородности Лемана–Розенблатта при $n_i = 1000$ в зависимости от Δ_2 при $\Delta_1 = 0.01$

Аналогичным образом от разности Δ_1 и Δ_2 зависят распределения других двухвыборочных критериев однородности законов (Смирнова, Андерсона–Дарлинга–Петита). Естественно, что от неравноточности представления данных в анализируемых выборках зависят распределения статистик всех многовыборочных критериев однородности законов [94].

Возникает вопрос, что же делать в реальных ситуациях, когда есть опасение того, что точность регистрации анализируемых данных такова, что может влиять на распределения статистик используемых критериев?

В первую очередь, следует убедиться, что в анализируемых выборках нет слишком большого количества повторяющихся значений. Если нет, то при использовании критериев можно пользоваться классическими результатами о распределениях статистик [94, 105].

В противном случае можно воспользоваться методами статистического моделирования и исследовать распределение статистики $G_N(S_n|H_0)$ соответствующего критерия при той степени округления Δ_i и тех объёмах выборок n_i, которые соответствуют анализируемым выборкам, а далее воспользоваться полученным эмпирическим распределением статистики критерия для оценки p_{value}.

В этих же целях можно воспользоваться программной системой ISW [34], с использованием которой проведены настоящие исследования. В развиваемую программную систему встроены средства, позволяющие исследовать методами статистического моделирования распределения статистик критериев проверки гипотез в зависимости от величины округления Δ_i данных в анализируемых выборках. Реализована возможность интерактивного моделирования распределений статистик критериев согласия, критериев однородности и ряда других при заданных Δ_i, что позволяет в случае применения конкретных критериев находить требуемое распределение статистики $G_N(S_n|H_0)$ и оценивать по нему достигнутый уровень значимости p_{value}. Этим самым обеспечивается корректность статистических выводов при использовании критериев в нестандартных условиях.

Следовательно, для критериев однородности законов распределения отклонение эмпирического распределения от теоретического (предельного) распределения наблюдается вследствие различной точности представления данных в сравниваемых выборках.

Выводы по главе 4

Таким образом, в данной главе для множества рассматриваемых k-выборочных критериев однородности законов получены следующие результаты.

В развиваемую программную систему ISW встроен модуль, реализующий моделирование распределений статистик всех рассмотренных в работе k-выборочных критериев однородности.

Предложены новые k-выборочные критерии однородности законов, опирающиеся на применение к каждой паре анализируемых выборок двувыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик предложенных критериев и построены модели предельных распределений статистик для числа сравниваемых выборок $k=\overline{3,11}$, используемые при вычислении достигнутого уровня значимости p_{value}.

Реализован интерактивный режим моделирования распределений статистик k-выборочных критериев Жанга, позволяющий вычислять оценку p_{value} по результатам проверки гипотезы.

Проведен сравнительный анализ мощности множества k-выборочных критериев проверки однородности законов относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

5 ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В настоящее время среди известных и доступных автору программных систем статистического анализа данных ни одна не позволяет проверять гипотезу об однородности законов распределения k выборок ($k \geq 2$) с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} (за исключением критерия однородности χ^2). Неизвестно систем, позволяющих в условиях нарушения стандартных предположений или при отсутствии сведений об «истинном» распределении статистики используемого критерия в интерактивном режиме проводить исследование этого распределения и далее использовать его при принятии решения о результатах проверки гипотезы.

Такой подход применяется в развиваемом программном обеспечении «Интервальная статистика для Windows» (ISW) [34] в случае использования различных параметрических критериев в условиях нарушения стандартных предположений, при использовании параметрических и непараметрических критериев при неизвестных распределениях статистик, в том числе, зависящих от конкретных условий регистрации измерений. В связи с этим было принято решение о реализации в ISW программных модулей, осуществляющих:

– моделирование распределений статистик множества непараметрических критериев, предназначенных для решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности распределений);

– моделирование распределений статистик множества параметрических и непараметрических критериев проверки гипотезы об отсутствии тренда;

– интерактивный режим моделирования распределения статистики применяемого критерия, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений, с последующим использованием полученного распределения статистики для вычисления p_{value}.

5.1 Модуль, реализующий моделирование распределений статистик критериев проверки гипотез об отсутствии тренда и однородности законов распределения

В версии программной системы ISW № 5.2 и № 5.3 (документы о государственной регистрации приведены в приложении В) автором данной работы была добавлена возможность моделирования распределений статистик параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда, а также непараметрических критериев однородности распределений для k выборок (k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга со статистикой (2.3), критерия максимума Смирнова, критерия максимума Лемана–Розенблатта, критерия максимума Андерсона–Дарлинга, критериев Жанга со статистиками Z_{K}, Z_{A}, Z_C, критерия однородности χ^2).

В качестве примера продемонстрируем применение критериев однородности распределений.

Для исследования распределений статистик вышеперечисленных критериев (в различных условиях) в главном меню «Исследования» следует выбрать пункт выпадающего меню «Моделирование статистик критериев» (см. рис. 5.1). Выбрать среди групп критериев критерии однородности распределений (см. рис. 5.2). Перед пользователем открывается весь список критериев, предназначенных для проверки гипотезы об однородности законов распределений для двух и большего числа выборок (см. рис. 5.3).

Выбрав соответствующий критерий, необходимо задать законы распределения, в соответствии с которыми будут моделироваться сравниваемые выборки, с указанием объемов этих выборок n_i $(i = 1 \div k)$, указать количество имитационных экспериментов N. Далее для запуска моделирования необходимо нажать кнопку «Моделировать» (см. рис. 5.3).

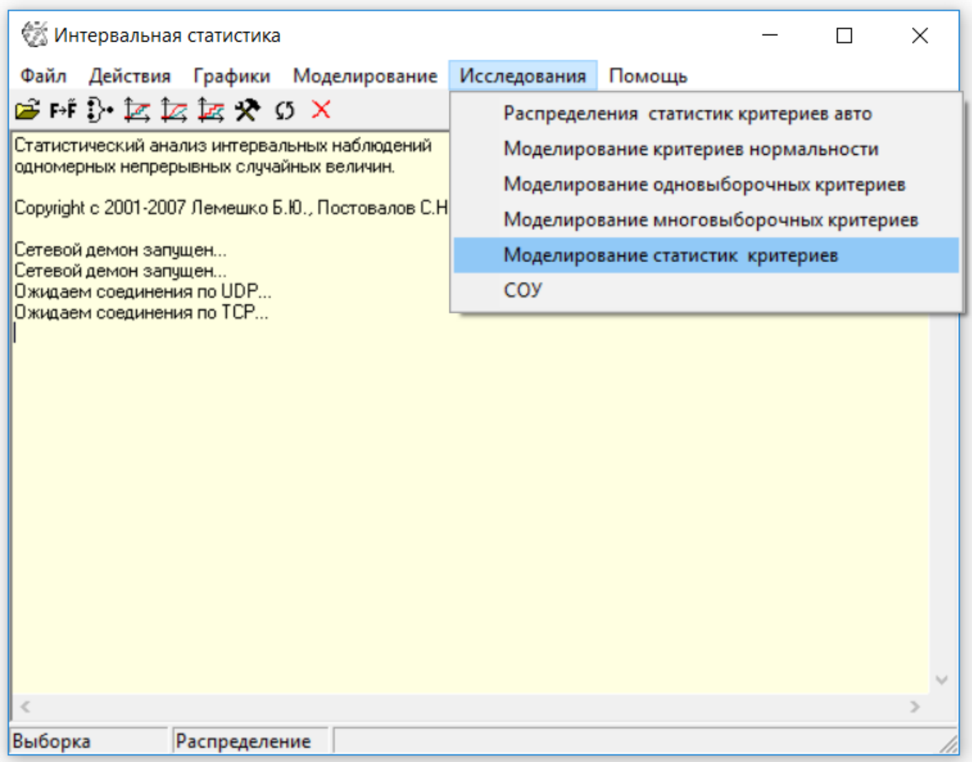


Рисунок 5.1 – Выбор пункта меню «Моделирование статистик критериев»

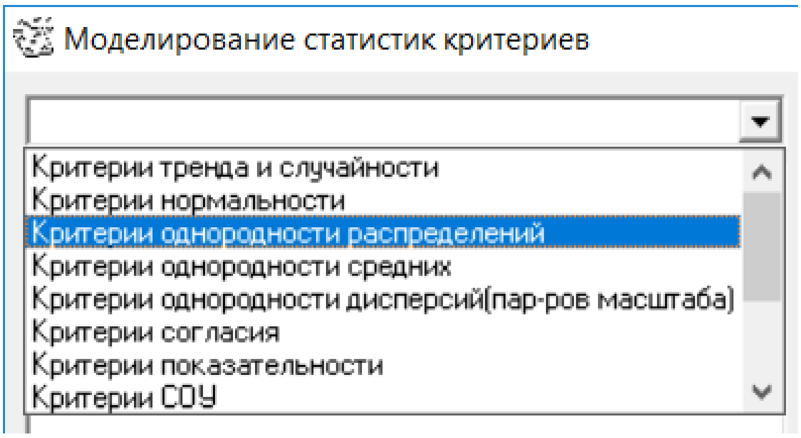


Рисунок 5.2 – Группы критериев

В результате моделирования в выходной файл записывается выборка статистик объемом N. Получаемые выборки можно использовать для построения эмпирических распределений статистики критерия, для построения параметрических моделей распределений статистик, при анализе мощности критериев.

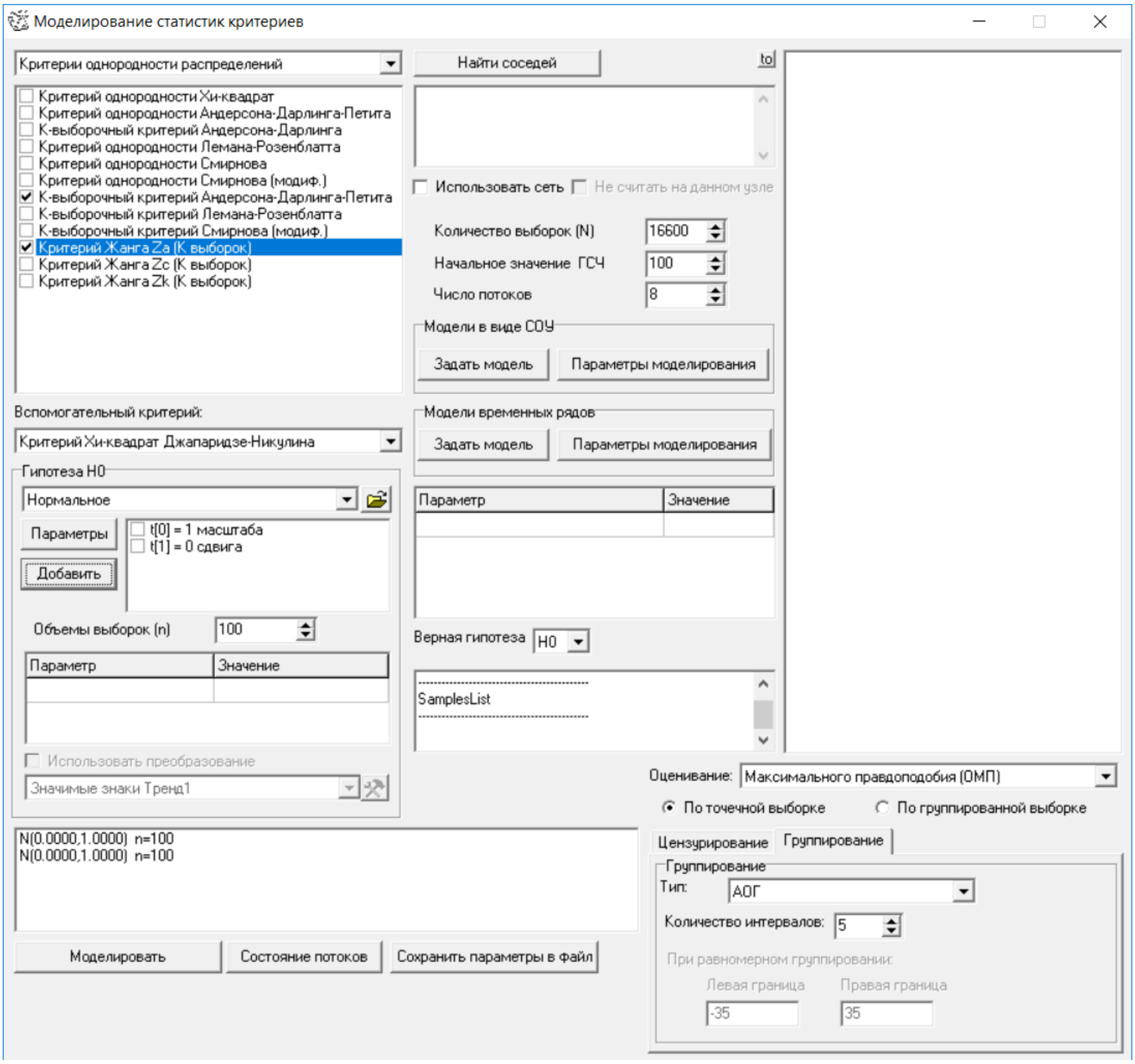


Рисунок 5.3 – Задание параметров моделирования

5.2 Интерактивный режим моделирования

Для большинства исследуемых критериев в лучшем случае известны таблицы процентных точек, составленные для некоторого ограниченного числа объемов выборок n_i. Формирование вывода о результатах проверки гипотезы в таких условиях носит достаточно “приближенный” характер. Вывод будет более обоснованным и информативным, если при формировании вывода мы будем опираться на оценку p_{value}, для чего требуется знание распределения статистики при справедливости проверяемой гипотезы.

При ограниченных объемах выборок реальные распределения статистик некоторых рассматриваемых критериев существенно отличаются от известных предельных или асимптотических, в связи с чем использование последних для вычисления оценок p_{value} может приводить к заметным ошибкам. Поэтому и в таких ситуациях оценки p_{value} желательно находить по реальному распределению статистики критерия.

Интерактивный режим моделирования распределения статистики в условиях справедливости проверяемой гипотезы с использованием этого распределения для оценки p_{value} обеспечивает корректность статистических выводов, не только в условиях нарушения стандартных предположений, но и при ограниченных объемах выборок, когда распределение статистики критерия существенно отличается от предельного.

Рассмотрим подробнее работу интерактивного режима моделирования.

Предположим, что с помощью разработанного программного обеспечения ISW пользователь хочет проверить гипотезу об однородности законов распределений. Загрузив выборки, однородность законов которых будет проверяться, и выбрав соответствующий непараметрический критерий, пользователь нажимает кнопку «Проверить» (см. рис. 5.4).

Если пользователь выбрал критерий, для которого **известно** асимптотическое распределение или подобрана модель предельного распределения, то:

– по отмеченным выборкам вычисляется значение статистики критерия;
– по известному предельному распределению и значению статистики определяется достигнутый уровень значимости p_{value};
– если оценка p_{value} больше заданной вероятности ошибки первого рода α, то принимается решение о неотклонении гипотезы об однородности законов распределений, в противном случае гипотеза отклоняется.

Как показано на рисунке 5.4, проверяется однородность трех выборок при помощи *k*-выборочного критерия Андерсона-Дарлинга. Для данного критерия, как было отмечено в подразделе 4.2. (см. табл. 4.1), хорошей моделью является

B_{III} (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000). Для вычисленного значения статистики 4.73219 по бета-распределению определяется достигнутый уровень значимости $p_{value} = 0.0028$. Так как $p_{value} < 0.01$ (см. рисунок 5.5) гипотеза об однородности отклоняется.

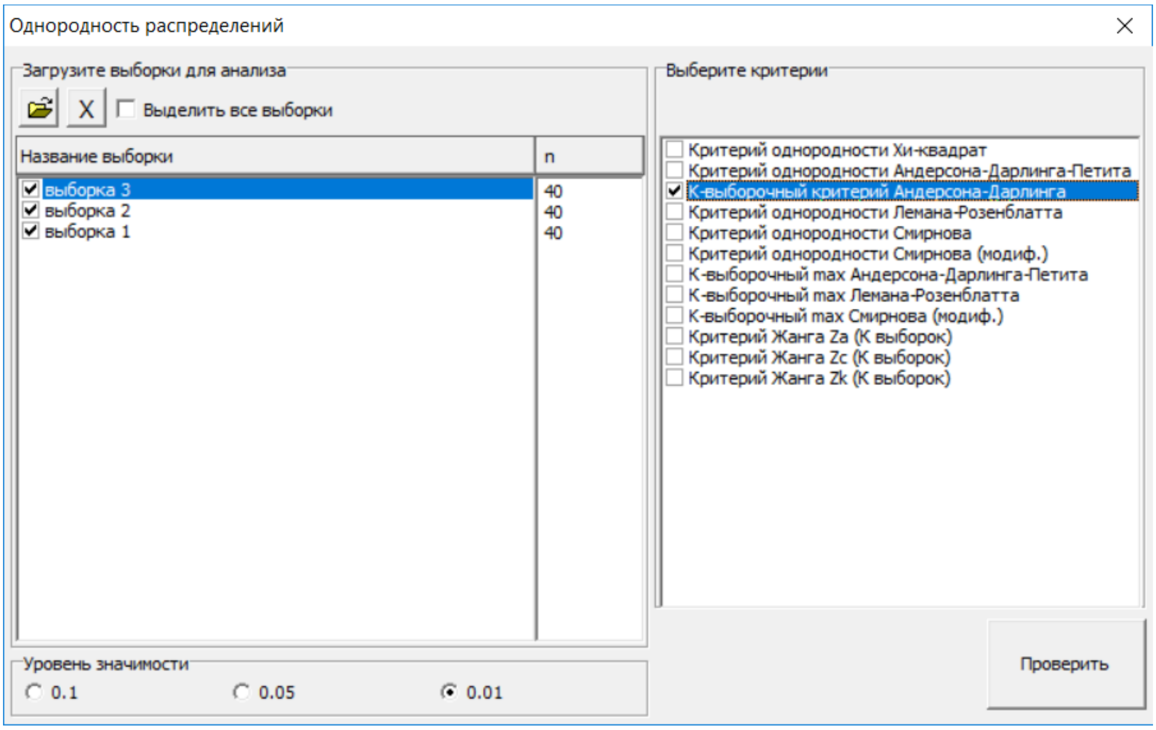


Рисунок 5.4 – Проверка гипотезы однородности законов трех выборок

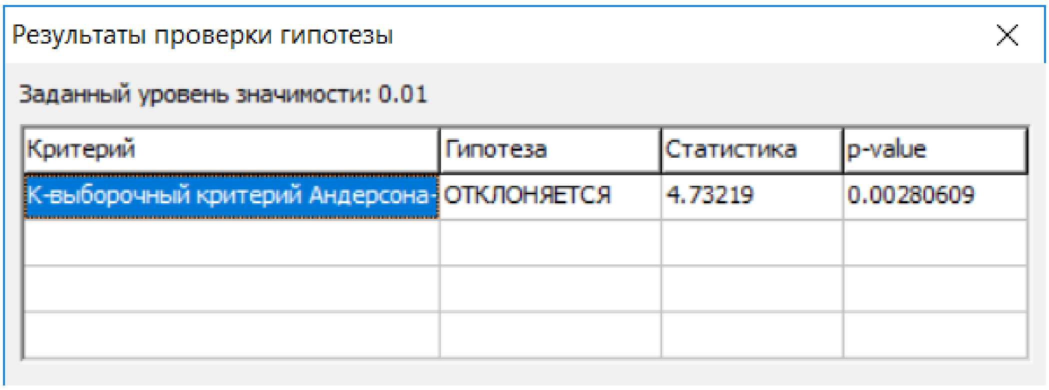


Рисунок 5.5 – Результаты проверки гипотезы по 3 выборкам

Если пользователь выбрал критерий, для которого **неизвестно** предельное распределение или при заданных объемах выборок реальное распределение статистики существенно отличается от предельного (по причине дискретности, смещения и т.п.), то:

– по отмеченным выборкам вычисляется значение статистики критерия S^*;
– методом Монте-Карло осуществляется N имитационных экспериментов [87, 111, 86], в процессе которых моделируется соответствующее число выборок с объемами n_i, а по смоделированным выборкам вычисляется значение статистики критерия (в результате в получаем выборку статистик критерия объема N);
– по выборке статистик объема N строится эмпирическое распределение, а по значению статистики S^* определяется оценка p_{value};
– если оценка p_{value} больше заданной вероятности ошибки первого рода α, то принимается решение о неотклонении гипотезы об однородности законов распределений, в противном случае гипотеза отклоняется.

При достаточно большом числе имитационных экспериментов N можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения $G_N(S\,|\,H_0)$, которой можно непосредственно воспользоваться для вывода о том, есть ли основание для отклонения гипотезы H_0.

Таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, приводимые в диссертации и приложении, строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N=10^6$. При таких N величина разности между истинным законом $G(S\,|\,H_0)$распределения статистики и смоделированным эмпирическим $G_N(S\,|\,H_0)$ по модулю не превышает величины 10^{-3}.

Как можно видеть на рисунке 5.6, гипотеза однородности распределений не проверена, так как неизвестно предельное распределение статистики. Для вычисления оценки достигнутого уровня значимости необходимо в интерактивном режиме смоделировать распределения статистики критерия, а по нему оценить p_{value}. Полученная оценка p_{value}, представленная на рисунке 5.7, существенно меньше заданной вероятности ошибки первого рода, поэтому гипотеза об однородности законов отклоняется.

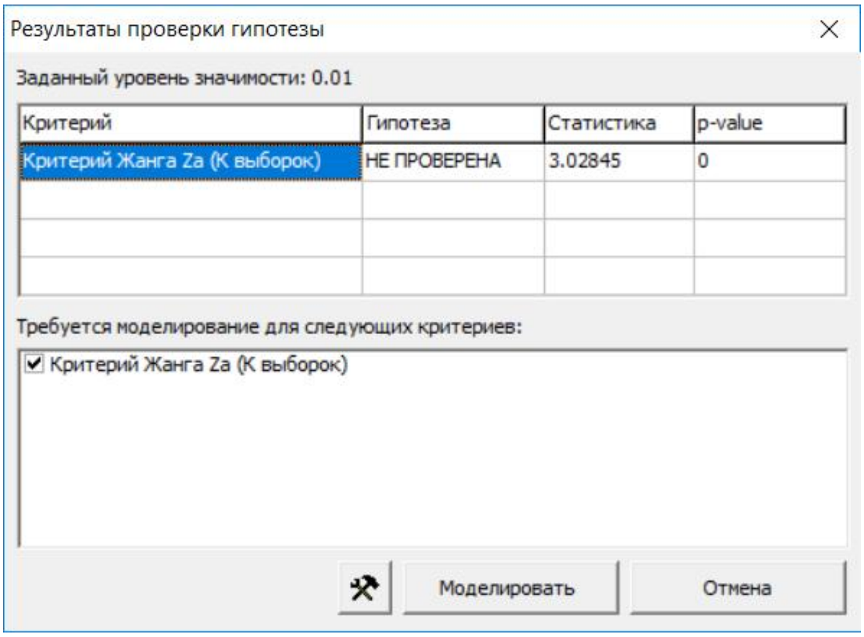


Рисунок 5.6 – Запуск интерактивного режима моделирования

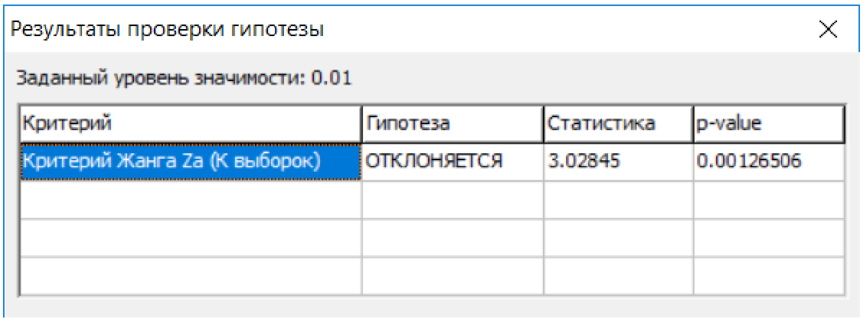


Рисунок 5.7 – Результат проверки гипотезы об однородности

5.3 Пример применения критериев однородности распределений

Рассмотрим применение рассмотренных в 4-й главе критериев проверки однородности законов для анализа 3-х нижеприведенных выборок, каждой объёмом в 40 наблюдений.

Выборка 1

0.321	0.359	-0.341	1.016	0.207	1.115	1.163	0.900	-0.629	-0.524
-0.528	-0.177	1.213	-0.158	-2.002	0.632	-1.211	0.834	-0.591	-1.975
-2.680	-1.042	-0.872	0.118	-1.282	0.766	0.582	0.323	0.291	1.387
-0.481	-1.366	0.351	0.292	0.550	0.207	0.389	1.259	-0.461	-0.283

Выборка 2

0.890	-0.700	0.825	1.212	1.046	0.260	0.473	0.481	0.417	1.825
1.841	2.154	-0.101	1.093	-1.099	0.334	1.089	0.876	2.304	1.126
-1.134	2.405	0.755	-1.014	2.459	1.135	0.626	1.283	0.645	1.100
2.212	0.135	0.173	-0.243	-1.203	-0.017	0.259	0.702	1.531	0.289

Выборка 3

0.390	0.346	1.108	0.352	0.837	1.748	-1.264	-0.952	0.455	-0.072
-0.054	-0.157	0.517	1.928	-1.158	-1.063	-0.540	-0.076	0.310	-0.237
-1.109	0.732	2.395	0.310	0.936	0.407	-0.327	1.264	-0.025	-0.007
0.164	0.396	-1.130	1.197	-0.221	-1.586	-0.933	-0.676	-0.443	-0.101

Для применения критериев проверки гипотезы об однородности законов был создан модуль «Проверка однородности распределений» (см. рис. 5.8).

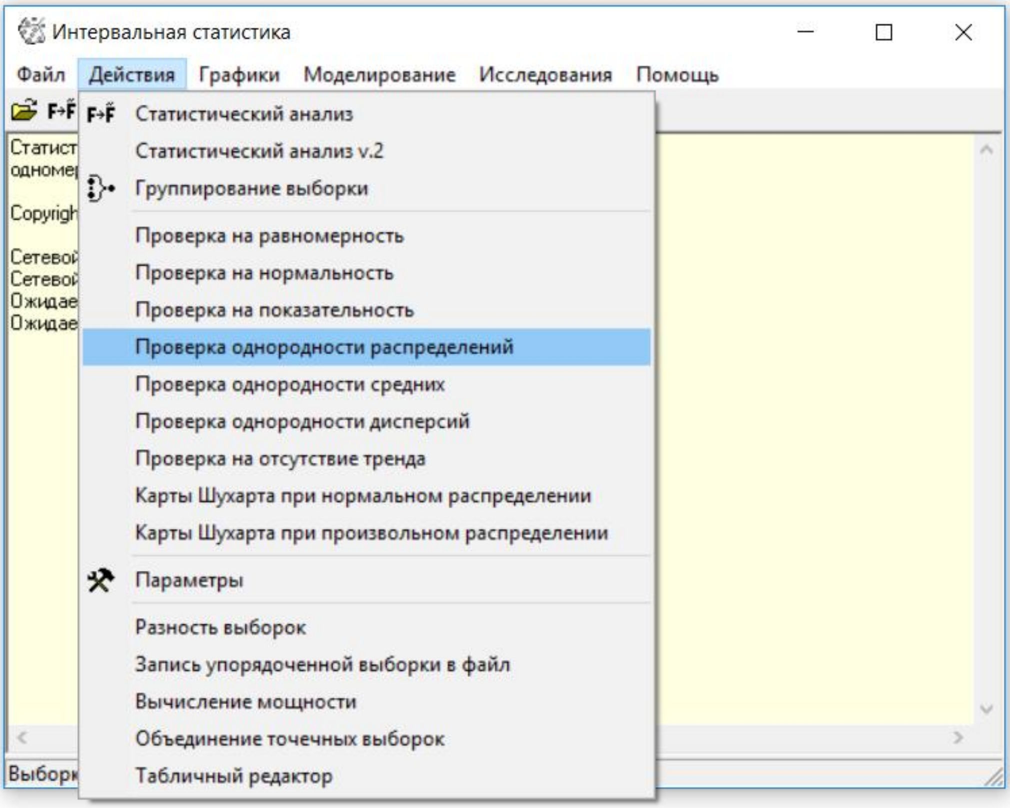


Рисунок 5.8 – Пункт меню «Проверка однородности распределений»

В открывающейся форме «Проверка однородности распределений» можно подгрузить несколько выборок (количество должно превышать одну) и выбрать критерии, используемые для проверки гипотезы (см. рис. 5.9). Поскольку критерии непараметрические, то вид закона, которому принадлежат выборки, не влияет на распределения статистик (при справедливости проверяемой гипотезы) и не отражается на достоверности статистического вывода.

Выбрав интересующие нас критерии, нажимаем на кнопку «Проверить». Число интервалов группирования задается только для критерия однородности χ^2.

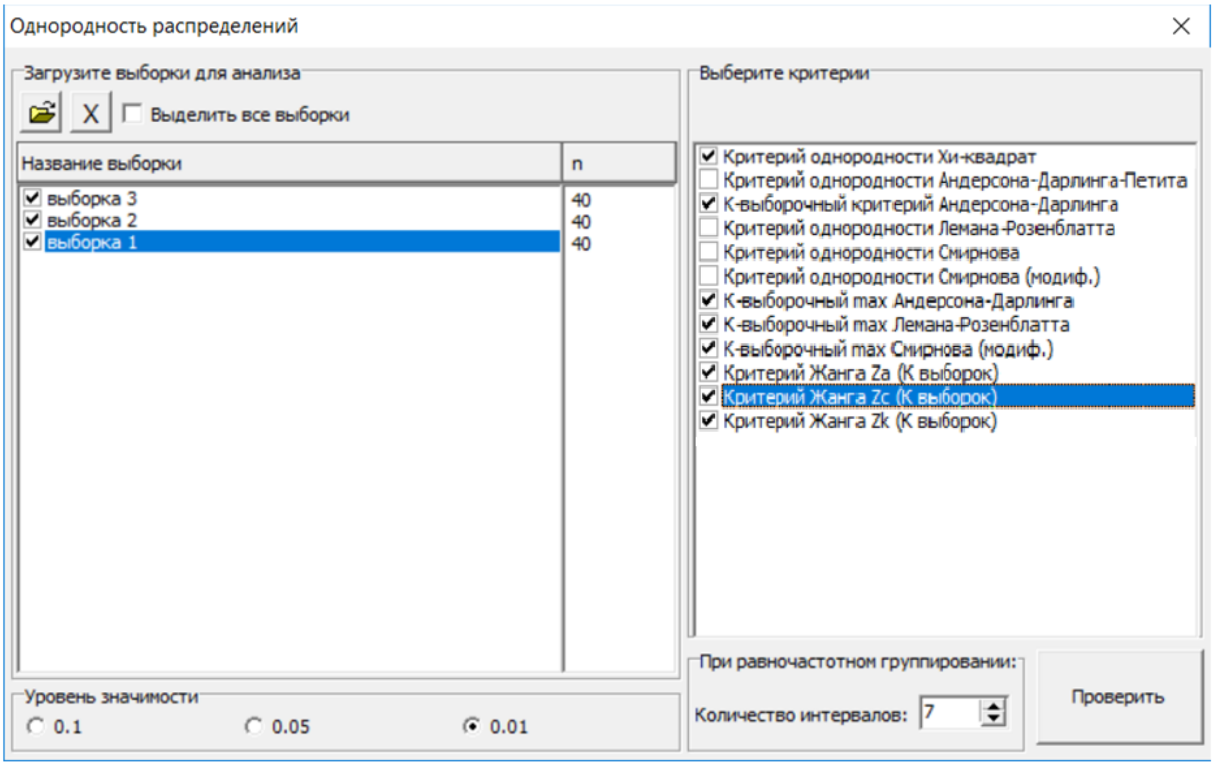


Рисунок 5.9 – Выбор критериев для проверки гипотезы об однородности распределений трех выборок

Для критерия однородности χ^2 асимптотическое распределение статистики известно, для k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга со статистикой (4.4) модели предельных распределений статистики были получены при подготовке [94], для критериев максимума Смирнова, максимума Лемана–Розенблатта и максимума Андерсона–Дарлинга модели предельных распределений статистик были построены в данной работе. Все эти модели предельных распределений статистик встроены в программную систему. Это позволяет для вычисленных значений статистик по предельному распределению найти оценку p_{value} и сделать вывод об отклонении или неотклонении гипотезы об однородности распределений (см. рис. 5.10 и 5.11). В случае проверки гипотезы об однородности распределений с использованием критериев Жанга со статистиками

Z_{K}, Z_{A}, Z_C используется интерактивный режим моделирования (см. рис. 5.12 и 5.13). По исходным данным вычисляется значение статистики критерия. При заданных объемах выборок моделируется распределение статистики критерия, по которому находится оценка p_{value}, сравниваемая с заданной вероятностью ошибки первого рода, в результате чего по критерию отклоняется или не отклоняется проверяемая гипотеза об однородности (см. рис. 5.14).

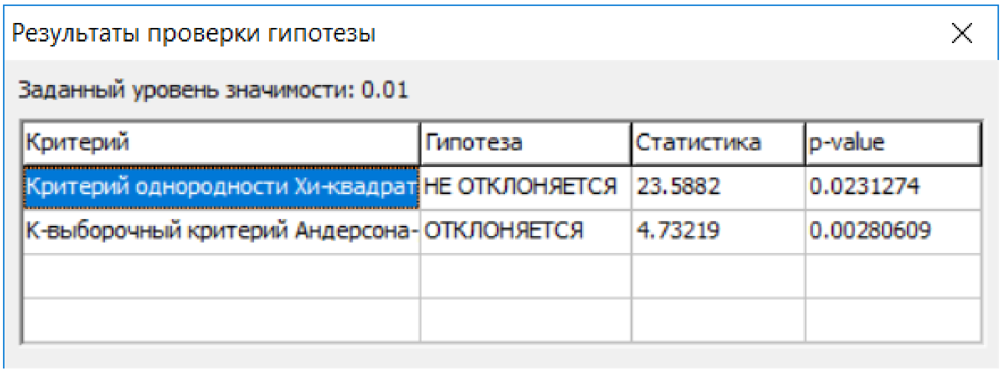


Рисунок 5.10 – Результаты проверки гипотезы k-выборочными критериями

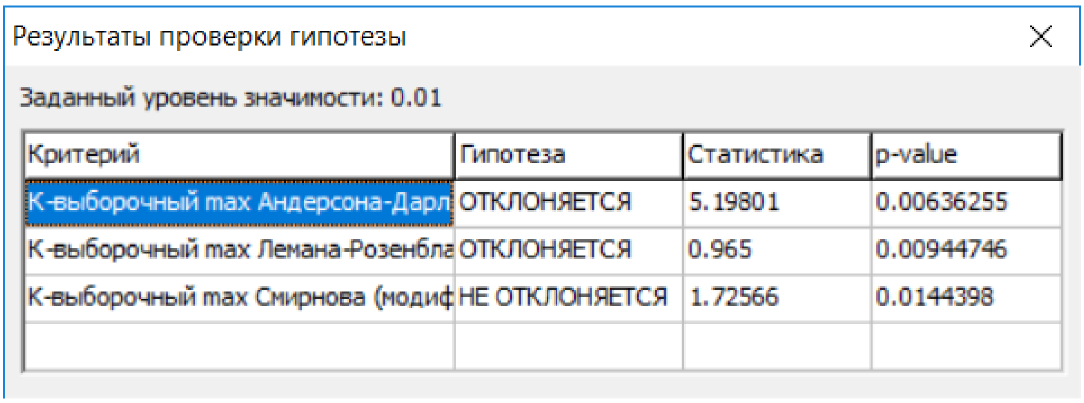


Рисунок 5.11 – Результаты проверки гипотезы k-выборочными критериями максимума

На приведенном примере продемонстрируем точность определения p_{value} в зависимости от числа имитационных экспериментов N при моделировании в интерактивном режиме эмпирического распределения статистики.

Вычисленные по выборкам значения S_i^* статистик критериев Жанга и соответствующие этим значениям оценки p_{value}, полученные при различной точности моделирования (при различном N), приведены в таблице 5.1.

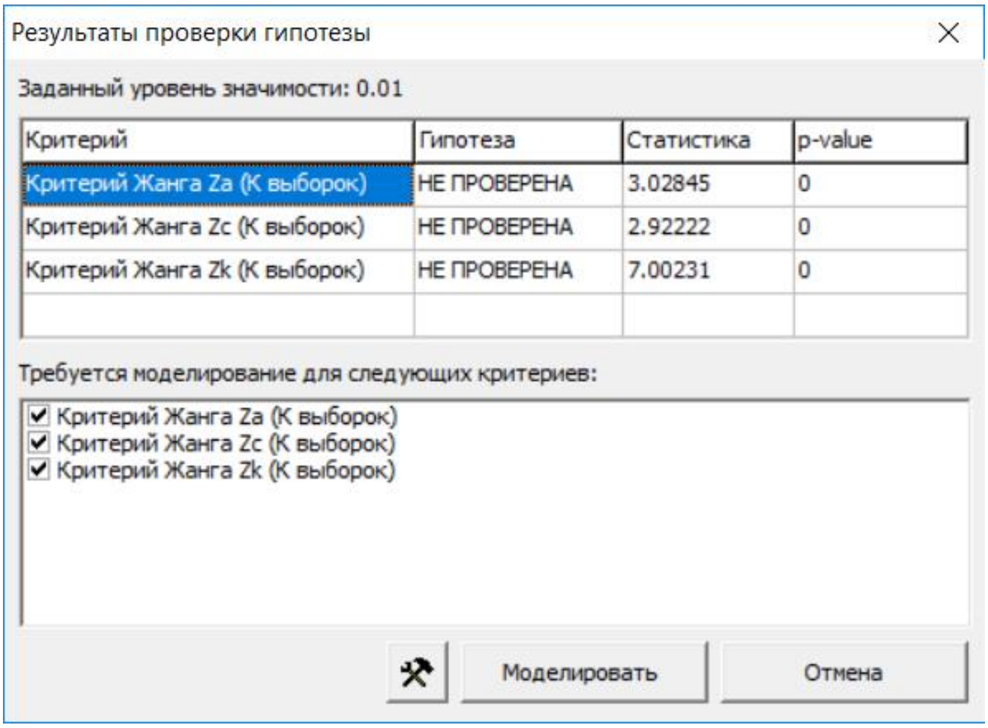


Рисунок 5.12 – Требование моделирования распределения статистик Жанга

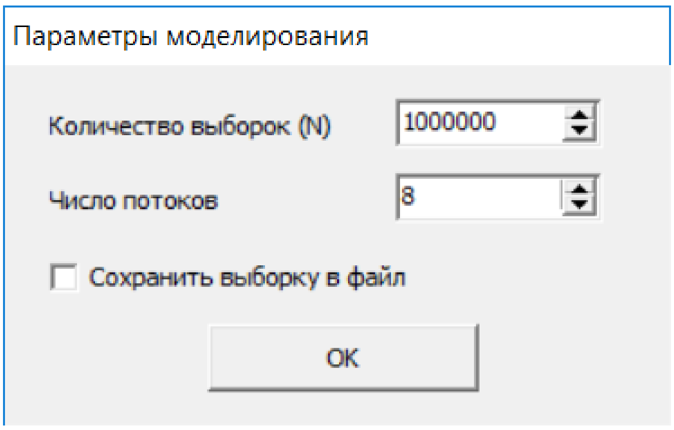


Рисунок 5.13 – Задание параметров моделирования

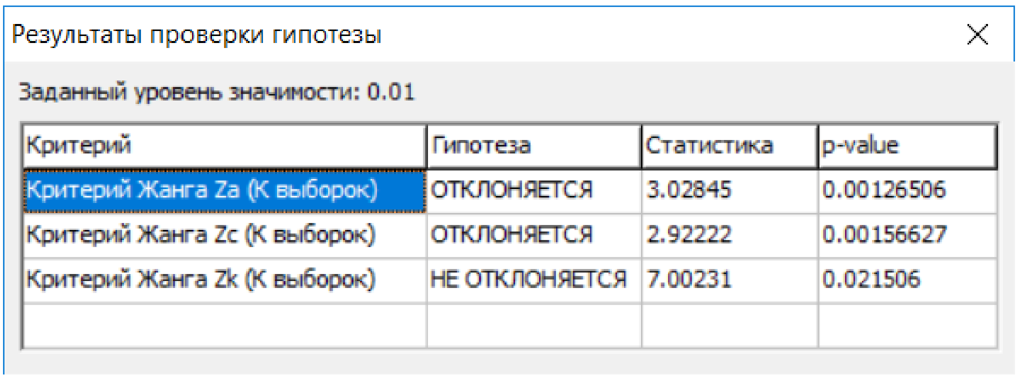


Рисунок 5.14 – Результаты проверки гипотезы критериями Жанга после моделирования

Гипотеза об однородности законов распределения отвергается критериями Жанга со статистиками Z_{A}, Z_C. В том числе, в силу дискретности, критерий со статистикой Z_K показывает достигнутый уровень значимости несколько выше других (но по мощности этот критерий уступает двум другим).

Таблица 5.1 – Оценки p_{value} в зависимости от N

Критерий	Статистика	$N=10^3$	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$
Жанга Z_{A}	3.02845	0.001	0.0011	0.00152	0.001568
Жанга Z_C	2.92222	0.001	0.0011	0.0017	0.001743
Жанга Z_{K}	7.00231	0.019	0.0201	0.02198	0.021839

Результаты проверки гипотезы об однородности трёх рассматриваемых выборок приведены в таблице 5.2. Оценка p_{value} для k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода, взятом из таблицы 4.1 при $k=3$. Для критериев Жанга оценки p_{value} находились на основании статистического моделирования, проведенного в интерактивном режиме, при числе имитационных экспериментов $N=10^6$. Для критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ оценка p_{value} при $k=3$ вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 4.2, для критерия со статистикой $S_{\max}^{LR}$ – в соответствии с распределением Sb-Джонсона из таблицы 4.3, для критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ – в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 4.4.

Заметим, что критерии Андерсона–Дарлинга $S_{\max}^{AD}$ и Лемана–Розенблатта $S_{\max}^{LR}$ зафиксировали максимальное отклонении между 1-й и 2-й выборками, а критерий Смирнова $S_{\max}^{Sm}$ – между 2-й и 3-й. Общий результат показывает, что проверяемая гипотеза об однородности 3-х выборок должна быть отклонена.

Можно обратить внимание на существенную зависимость результатов проверки по критерию однородности χ^2 от выбираемого числа интервалов r.

Таблица 5.2 – Результаты проверки однородности 3-х выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
k -выборочный Андерсона–Дарлинга	4.73219	0.0028
Жанга Z_A	3.02845	0.0013
Жанга Z_C	2.92222	0.0016
Жанга Z_K	7.00231	0.0215
$S_{\max}^{AD}$ Андерсона–Дарлинга	5.19801	0.0064
$S_{\max}^{LR}$ Лемана–Розенблатта	0.9650	0.0094
$S_{\max}^{Sm}$ Смирнова модифицированный	1.72566	0.0144
χ^2, $r=10$	25.556	0.1104
χ^2, $r=8$	19.200	0.1574
χ^2, $r=7$	23.5882	0.0231

В данном случае результаты проверки были достаточно предсказуемы, так как выборки 1 и 3 были смоделированы в соответствии со стандартным нормальным законом, а полученные значения псевдослучайных величин округлены до 3-х значащих цифр после десятичной точки. В то время как 2-я выборка получена в соответствии с нормальным законом с параметром сдвига 0.5 и стандартным отклонением 1.1.

5.4 Примеры применения критериев проверки отсутствия тренда

При проектировании генерирующих устройств, опирающихся на возобновляемые источники энергии, в частности силу (скорость) ветра и солнечную энергию, приходится учитывать статистические характеристики этих источников.

Рассмотрим применение исследованных в работе критериев проверки гипотез об отсутствии тренда и критериев проверки однородности законов на примере анализа рядов измерений скорости ветра (в м/сек) и инсоляции (потока солнечной радиации на поверхность) в (вт/м^2), снятых за период январь-декабрь 2016 года в одном из районов Казахстана. Выборки представляют собой ряды измерений этих величин по месяцам. Значения инсоляции зафиксированы в дневное время.

В ряде зарубежных публикаций скорость ветра зачастую описывается некоторыми простыми параметрическими моделями законов распределения. В данном же случае исследования показали, что если рассматривать эти измерения как случайные величины, то их не удаётся адекватно описать в рамках простых параметрических моделей, но можно подобрать очень хорошие модели в виде смесей законов, в частности, в виде смесей двух бета-распределений 3-го рода.

На рисунке 5.16 показаны эмпирические функции распределения скорости ветра для всех месяцев с января по декабрь. Естественно, не приходится говорить об однородности законов распределения скорости ветра (или об однородности инсоляции) по выборкам с января по декабрь, но в некоторые месяцы эмпирические распределения достаточно близки.

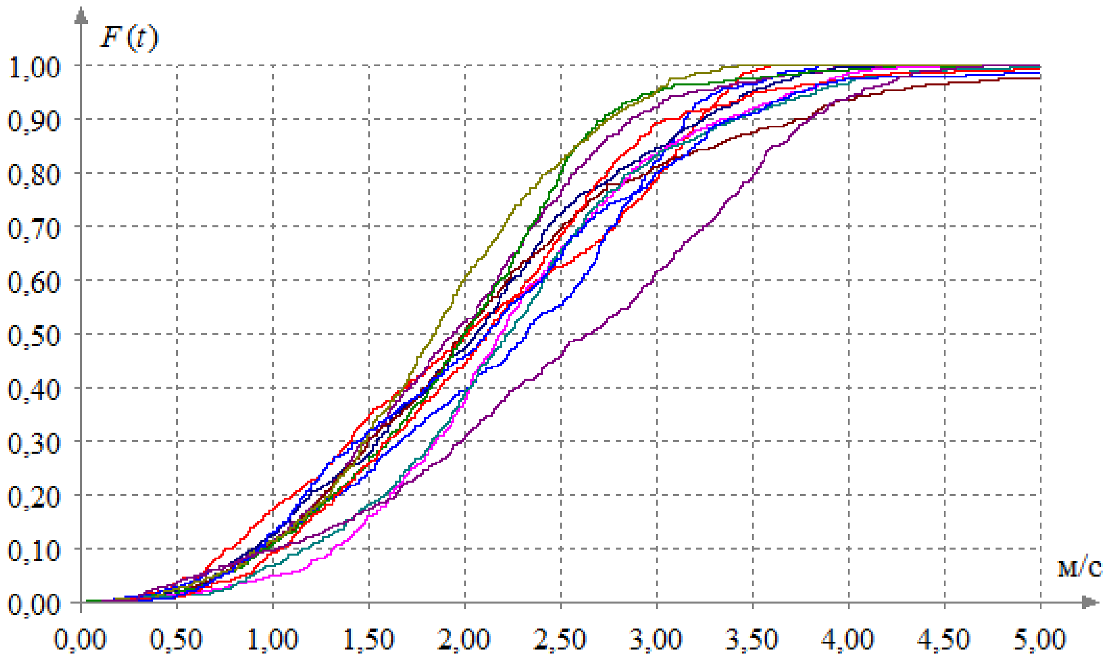


Рисунок 5.16 – Эмпирические функции распределения скорости ветра за весь анализируемый период

На рисунке 5.17 показаны эмпирические функции распределения скорости ветра за август и июль. Все рассмотренные в диссертационной работе критерии в данном случае не отклоняют гипотезу об однородности законов (см. рис. 5.18), следовательно, можно считать, что скорости ветра в июле и августе подчиняются одному закону распределения.

Необходимо отметить, что достигнутый уровень значимости по критерию χ^2 существенно зависит от количества интервалов группирования k анализируемых данных.

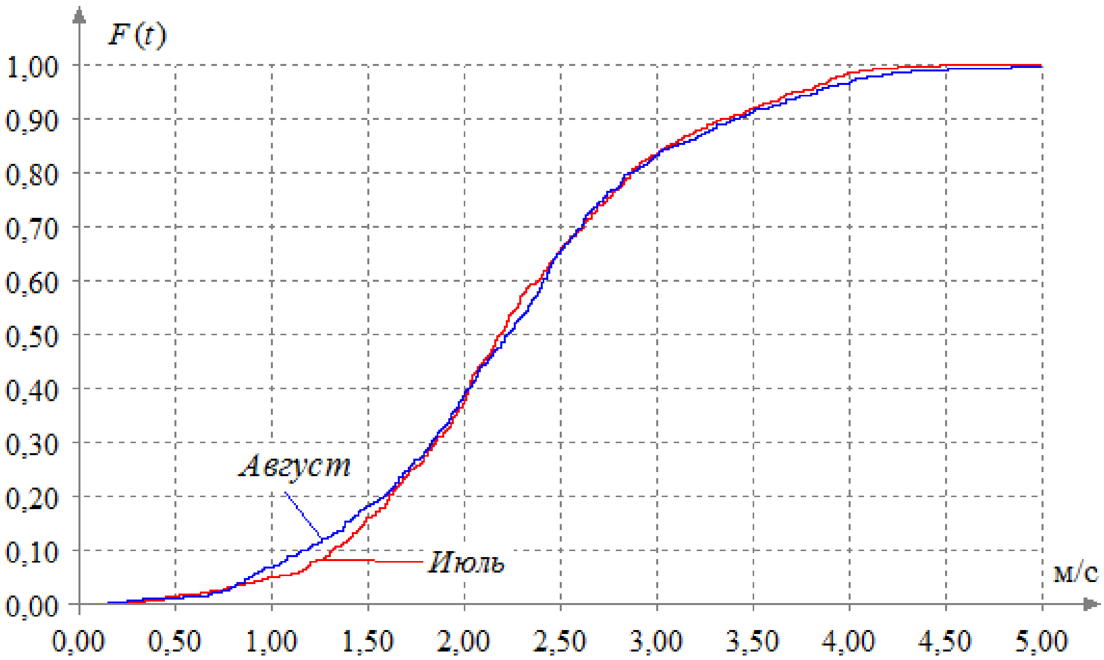


Рисунок 5.17 – Эмпирические функции распределения скорости ветра за июль и август

Результаты проверки гипотезы

Заданный уровень значимости: 0.01

Критерий	Гипотеза	Статистика	p-value
Критерий однородности Хи-квадрат $k=7$	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	11.8744	0.066
К-выборочный критерий Андерсона-Дарлинга	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	-0.121261	0.411
К-выборочный max Андерсона-Дарлинга-Петита	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.939768	0.393
К-выборочный max Лемана-Розенблатта	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.107794	0.537
Критерий однородности Хи-квадрат $k=15$	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	14.0901	0.444
Критерий однородности Хи-квадрат $k=20$	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	28.3011	0.237
К-выборочный max Смирнова (модиф.)	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.89268	0.415
Критерий Жанга Za (К выборок)	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	3.28068	0.108
Критерий Жанга Zc (К выборок)	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	3.26866	0.075
Критерий Жанга Zk (К выборок)	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	3.67026	0.206

Рисунок 5.18 – Достигаемые уровни значимости

На рисунке 5.19 скорости ветра в июле и августе представлены в виде временных рядов (t соответствует порядковому номеру измерения).

Проверим гипотезы об отсутствии тренда в математическом ожидании и об отсутствии тренда в дисперсии скорости ветра в июле.

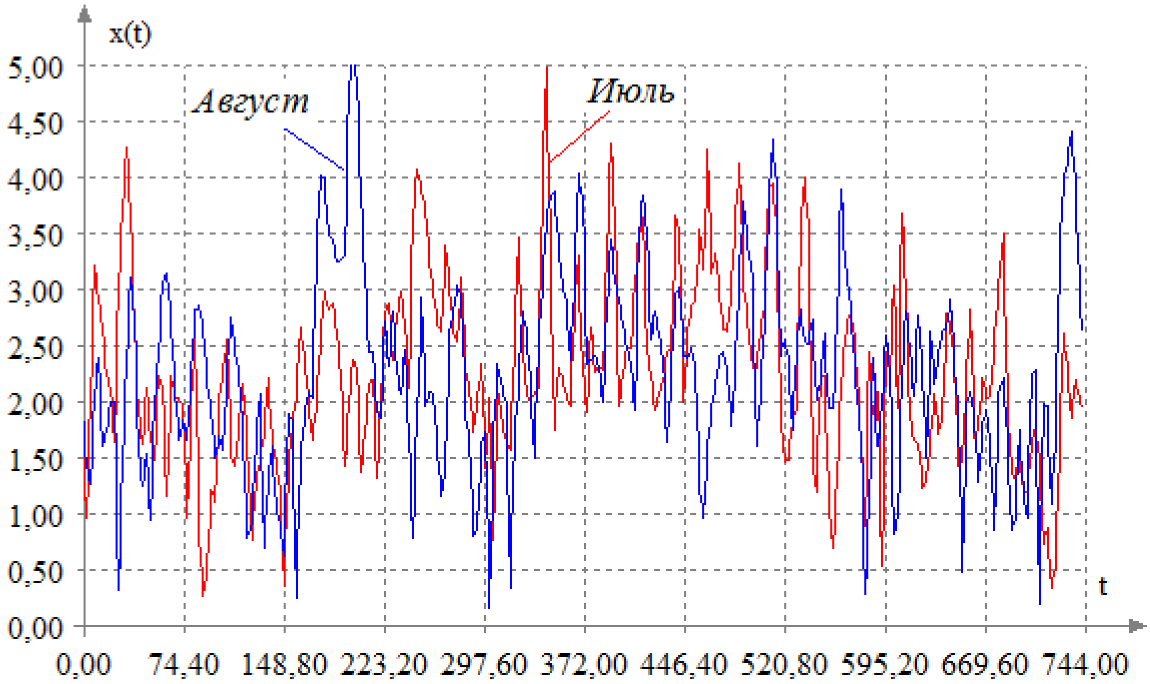


Рисунок 5.19 – Временные ряды скорости ветра

Для проверки гипотезы об отсутствии тренда будем использовать наиболее мощные критерии.

Скорость ветра объединенной выборки в июле-августе хорошо описывается смесью $f(x) = 0.8 f_1(x) + 0.2 f_2(x)$, где $f_i(x)$ – бета-распределения III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}.$$

В $f_1(x)$ параметры θ_0=3.2357, θ_1=8.7376, θ_2=0.5567, θ_3=5.9018, θ_4=0.0, в $f_2(x)$ – θ_0=14.0579, θ_1=15.2853, θ_2=0.7635, θ_3=3.8998, θ_4=0.0.

Распределения статистик параметрических критериев проверки гипотез об отсутствии тренда зависят от закона распределения исходных данных. Поэтому для случая нарушения стандартного предположения о нормальности в форме предусмотрена настройка для выбора закона распределения и задания вероятности ошибки первого рода α.

На рисунке 5.20 показано, что для параметрических критериев при моделировании в интерактивном режиме распределений статистик критериев будет использоваться закон, наилучшим образом описывающий входные данные, то есть построенная смесь распределений.

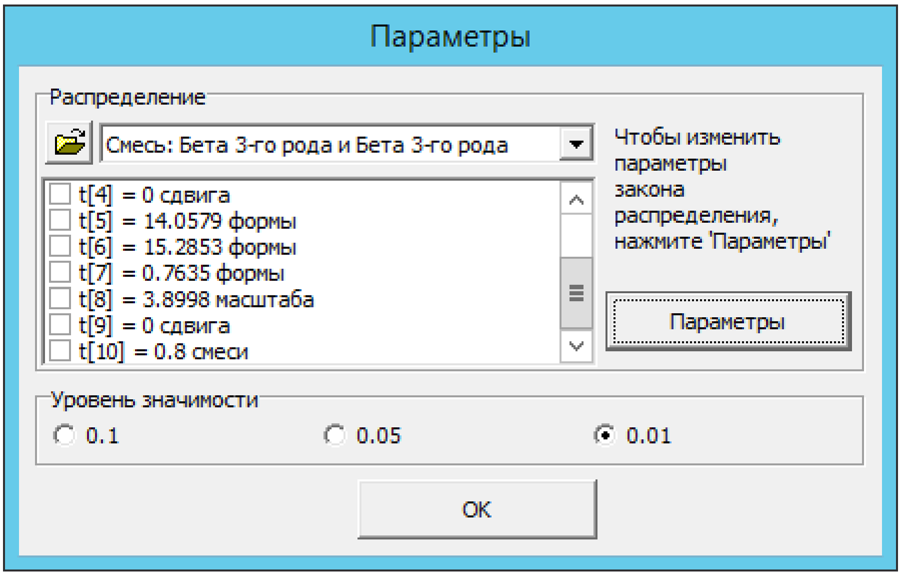
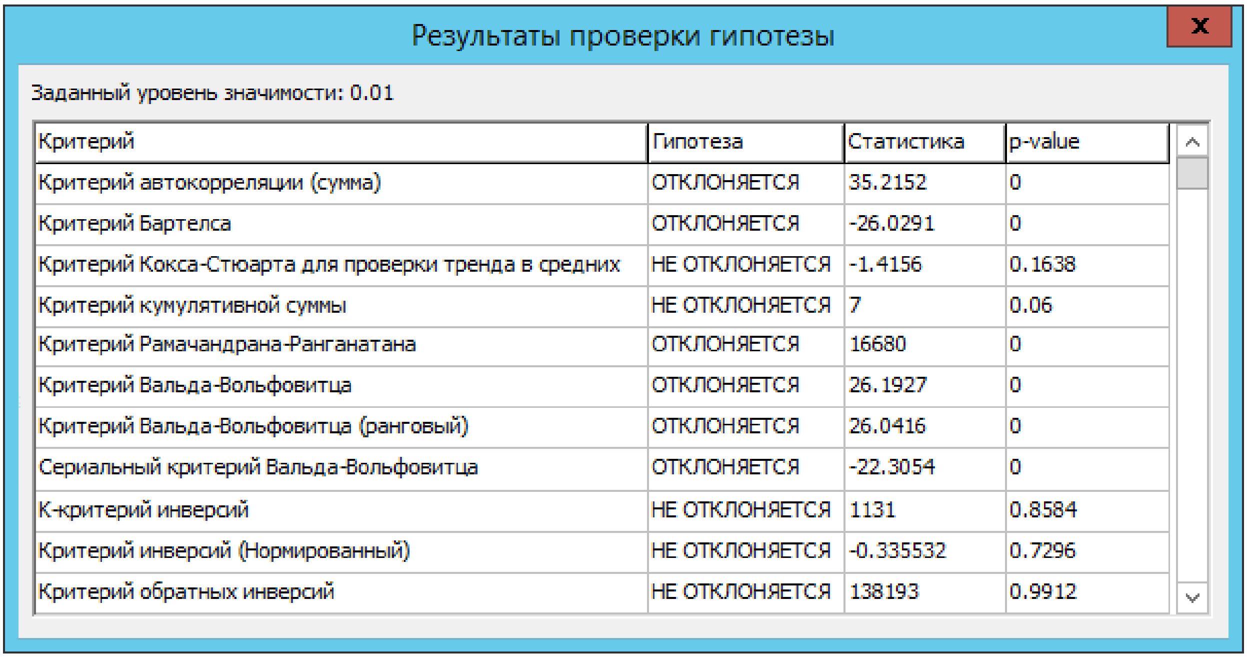


Рисунок 5.20 – Выбор закона распределения данных

На рисунке 5.21 приведены достигаемые уровни значимости для критериев тренда в средних, откуда следует, что большинство критериев отклоняют гипотезу об отсутствии тренда в математическом ожидании.

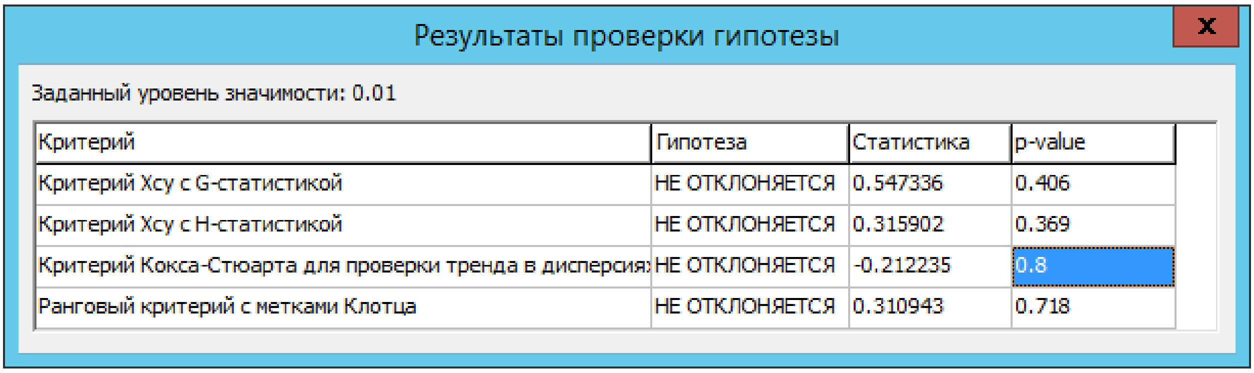
В то же время (см. рис. 5.22) гипотеза об отсутствии тренда в дисперсии по всем критериям не отклоняется.


Результаты проверки гипотезы

Заданный уровень значимости: 0.01

Критерий	Гипотеза	Статистика	p-value
Критерий автокорреляции (сумма)	ОТКЛОНЯЕТСЯ	35.2152	0
Критерий Бартелса	ОТКЛОНЯЕТСЯ	-26.0291	0
Критерий Кокса-Стюарта для проверки тренда в средних	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	-1.4156	0.1638
Критерий кумулятивной суммы	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	7	0.06
Критерий Рамачандрана-Ранганатана	ОТКЛОНЯЕТСЯ	16680	0
Критерий Вальда-Вольфовитца	ОТКЛОНЯЕТСЯ	26.1927	0
Критерий Вальда-Вольфовитца (ранговый)	ОТКЛОНЯЕТСЯ	26.0416	0
Сериальный критерий Вальда-Вольфовитца	ОТКЛОНЯЕТСЯ	-22.3054	0
К-критерий инверсий	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	1131	0.8584
Критерий инверсий (Нормированный)	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	-0.335532	0.7296
Критерий обратных инверсий	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	138193	0.9912

Рисунок 5.21 – Результаты проверки гипотезы об отсутствии тренда в средних


Результаты проверки гипотезы

Заданный уровень значимости: 0.01

Критерий	Гипотеза	Статистика	p-value
Критерий Хсу с G-статистикой	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.547336	0.406
Критерий Хсу с H-статистикой	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.315902	0.369
Критерий Кокса-Стюарта для проверки тренда в дисперсиях	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	-0.212235	0.8
Ранговый критерий с метками Клотца	НЕ ОТКЛОНЯЕТСЯ	0.310943	0.718

Рисунок 5.22 – Результаты проверки гипотезы об отсутствии тренда в дисперсиях

В качестве интересного факта, можно отметить, что законы распределения инсоляции, то есть потока солнечной радиации на поверхность, в апреле, июне и июле оказываются однородными. Эмпирические распределения инсоляции за эти 3 месяца приведены на рис. 5.23.

Можно заметить (см. рис. 5.24), что, за исключением критериев Жанга со статистиками Z_A, Z_K, все остальные критерии не отклоняют гипотезу об однородности законов.

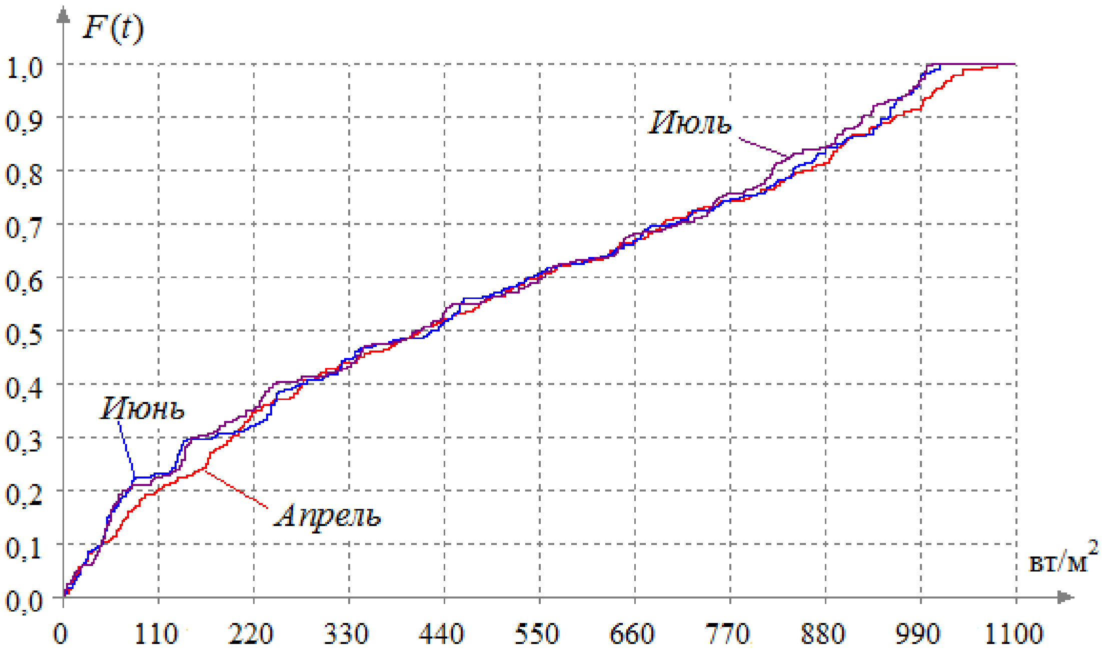


Рисунок 5.23 – Эмпирические функции распределения мощности излучения за апрель, июнь и июль

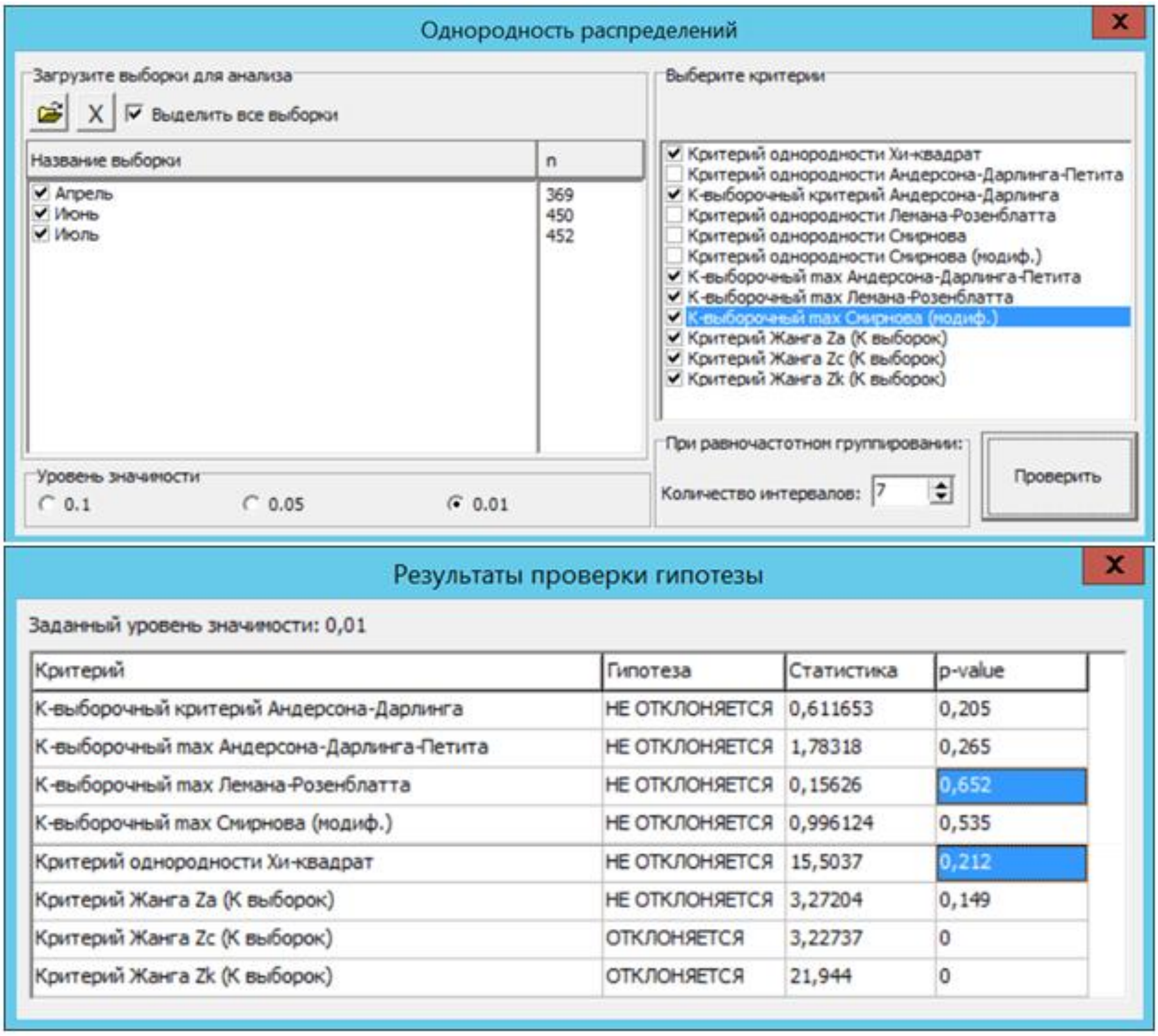


Рисунок 5.24 – Результаты проверки гипотезы однородности трех выборок

Результаты статистического анализа законов распределений скорости ветра и инсоляции могут использоваться в дальнейшем при проектировании систем автономного гибридного электрообеспечения.

Выводы по главе 5

В разделе кратко описано назначение и возможности с примерами применения разработанных в рамках развиваемой программной системы «Интервальная статистика для Windows» программных модулей, позволяющих:

– моделировать и исследовать распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании или в дисперсии, а также применять это множество критериев;

– моделировать и исследовать распределения статистик множества k-выборочных критериев, предназначенных для проверки гипотез об однородности законов (критериев Жанга со статистиками Z_{A}, Z_C и Z_K, k-выборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга, критерия однородности χ^2, предложенных критериев максимума Смирнова, максимума Лемана–Розенблатта, максимума Андерсона–Дарлинга–Петита), а также применять эту совокупность критериев;

– использовать интерактивный режим моделирования распределений статистик применяемых критериев (в условиях отсутствия информации о предельном распределении статистики или неправомерности его использования при ограниченных объёмах выборок, либо в случае применения критерия в условиях нарушения стандартных предположений), с последующим вычислением оценки p_{value} по полученному в результате моделирования распределению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в математическом ожидании или в дисперсии. Оценены объемы выборок, начиная с которых можно пользоваться предельными (асимптотическими) распределениями статистик критериев вместо действительных (дискретных) распределений этих статистик.

На основе результатов статистического моделирования показано, что наилучшей приближенной моделью предельного распределения G-статистики критерия Хсу является бета-распределение 1-го рода с полученными оценками параметров.

Предложена модификация статистики рангового критерия Вальда-Вольфовица, распределение которой (в отличие от оригинальной статистики) хорошо согласуется со стандартным нормальным законом уже при $n > 10$.

2. Проведен сравнительный анализ мощности критериев, ориентированных на проверку отсутствия тренда в математическом ожидании, и критериев, ориентированных на проверку отсутствия тренда в дисперсии, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или иных критериев. Отмечены недостатки отдельных критериев.

3. Предложены новые k-выборочные критерии проверки однородности законов, опирающиеся на применение к каждой паре анализируемых выборок двувыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита. Для предложенных критериев методами статистического моделирования исследованы распределения статистик и построены модели предельных распределений статистик для числа сравниваемых выборок $k = \overline{3,11}$, на основании которых могут находиться оценки достигнутого уровня значимости p_{value}.

4. Проведен сравнительный анализ мощности рассмотренного множества k-выборочных критериев однородности законов относительно близких конкурирующих гипотез.

5. Разработано программное обеспечение, позволяющее моделировать и исследовать распределения статистик множества рассмотренных в диссертации параметрических и непараметрических критериев, а также применять эти критерии. В случае отсутствия предельного распределения статистики применяемого критерия или неправомерности его использования при малых n, а также в случае применения критерия в условиях нарушения стандартных предположений предусмотрено использование интерактивного режима моделирования распределений статистик применяемых критериев, с последующим вычислением оценки p_{value} по полученному в результате моделирования распределению.

Полученные результаты и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе факультета прикладной математики и информатики в рамках курса «Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010400 — прикладная математика и информатика.

Результаты и программное обеспечение используются при проведении научных исследований, используются метрологическими НИИ при статистическом анализе измерений, связанных с различными задачами метрологического обеспечения, что подтверждается соответствующими актами.

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661513, №2015663326, №2018666213).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aiyar R.J. Asymptotic efficiency of rank tests of randomness against autocorrelation, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 33 (1981). – pp. 255-262.
2. Anderson N.H, Hall P, Titterington D.M. Two-sample test statistics for measuring discrepancies between two multivariate probability density functions using kernelbased density estimates. // J Multivariate Anal. – Volume 50, 1994. – pp. 41–54.
3. Anderson, T.W. On the Distribution of the Two-Sample Cramer-von Mises Criterion // The Annals of Mathematical Statistics. – Volume 33, 1962. – pp. 1148-1159.
4. Armitage P. Tests for Linear Trends in Proportions and Frequencies// Biometrics. – Vol. 11, No. 3. 1955– pp. 375-386.
5. Bartels R. The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness // JASA. 1982. V. 77, №377. P. 40-46.
6. Baumgartner, W., Wei, P., and Schindler, H. (1998), “A Nonparametric Test for the General Two-Sample Problem,” Biometrics, 54, 1129–1135.
7. Bhattacharyya G.K. Tests of randomness against trend or serial correlations // Handbook of Statistics. – Volume 4, 1984. – pp. 89-111.
8. Burr, E. J. (1964), “Small-Sample Distributions of the Two-Sample Cramér–von Mises W2 andWatson’s U2,” The Annals of Mathematical Statistics, 35, 1091–1098.
9. Cao R., Keilegom IV. Empirical likelihood tests for two-sample problems via nonparametric density estimation. // Can J Stat. – Volume 34, 2006. – pp. 61–77.
10. Chen S., Pokojovy M. Modern and classical k-sample omnibus tests // WIREs Computational Statistics. – Volume 10, 2017. – pp. 1–12.
11. Corcoran, C., Mehta, C., Senchaudhuri, P., Power comparisons for tests of trend in dose? Response studies.// Statistics in Medicine, 19 (22), 2000 – pp. 3037–3050.
12. Cox D.R., Stuart A. Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrika. 1955. – V.42. – P.80-95.

13. Deidda R., Puliga M. Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off // Physics and Chemistry of the Earth. 2006. Vol. 31. P. 1240-1251.
14. Dufor J.–M., Roy R. Some robust exact results on sample for randomness // J. of Econometrics. 1985. – V. 29. – P. 257-273.
15. Dufour J.-M. RANK TESTS FOR SERIAL DEPENDENCE // JOURNAL OF TIME SERIES ANALYSIS. –Vol. 2. No 3. – May 1981. – P. 117-128.
16. Dufour J.–M., Roy R. Generalized portmanteau statistics and tests of randomness // Communications in Statistics - Theory and Methods. – Volume 15, 1986. – pp. 2953-2972.
17. Dufour J.-M., Lepage Y., Zeidan H. Nonparametric testing for time series: A bibliography // Canad. J. Statist. . –Volume10, Issue1. – March 1982. – P. 1-38.
18. Engmann S., Cousineau D. Comparing distributions: the two-sample Anderson-Darling test as an alternativeto the Kolmogorov-Smirnoff test. // J. Appl Quant Methods. – Volume 6, 2011. – pp. 1–17.
19. Fisher R.A., Yates F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. London & Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
20. Fligner M.A., Killeen T.J. Distribution-Free Two-Sample Tests for Scale // Journal of American Statistical Association. 1976. Vol. 71. No. 353. – P.210-213.
21. Foster F.G., Stuart A. Distribution-free tests in time series dated on the breaking of records // JRSS. 1954. – V. B16, №1. – P.1-22.
22. Ghodsi M., Amiri S., Hassani H., Ghodsi Z. An enhanced version of Cochran-Armitage trend test for genome-wide association studies // Meta Gene 9 (2016). – pp. 225–229.
23. Gorbunova A. A. Classical tests of variances homogeneity for non-normal distributions / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France. – P. 117–124.

24. Gupta G. D., Govindarajulu Z. Nonparametric tests of randomness against autocorrelated normal alternatives // Biometrika. – Volume 67, Issue 2, 1 January 1980. – pp. 375-379.
25. Hallin M., Ingenbleek J.-F., Puri M. L. Linear Serial Rank Tests for Randomness Against Arma Alternatives // The Annals of Mathematical Statistics. – Volume 13, Number 3 (1985). – pp. 1156-1181.
26. Hallin M., Mélard G. Rank-Based Tests for Randomness against First-Order Serial Dependence // Journal of the American Statistical Association. – Volume 83, 1988. – pp. 1117-1128.
27. Hollin M., Ingeubleek J.-F., Puri M.L. Linear and quadratic serial rank tests for randomness against social dependence // J. Of Time Serial Annal. 1987. V. 8. – P. 409-424.
28. Hollin M., Ingeubleek J.-F., Puri M.L. Linear serial rank tests for randomness against ARMA alternatives // Annal. Statist. 1985. V. 13. – P. 1156-1181.
29. Hollin M., Laforet A., Merald G. Distribution-free tests against dependence: signed or unsigned ranks? // J. of Stat. Planning and Inference. 1990. V. 24. – P. 151-165.
30. Hollin M., Merald G. Rank-tests for randomness against first order serial dependence // JASA. 1988. V. 83. – P.1117-1129.
31. Hollin M., Puri M.L. Optimal rank-based procedures for time series analysis: Testing on ARMA model against other ARMA models // Annal. Statist. 1988. V. 16. – P. 402-432.
32. Hsieh H.K. Nonparametric tests for scale shift at a unknown time point // Commun. Stat. – Theor. Meth., 1984. – V.13. № 11. – P.1335-1355.
33. Hsu D.A. Test for variance shift at an unknown time point / D. A. Hsu // Appl. Statist., 1977. V.26, № 3. P.279–284.
34. ISW – Программная система статистического анализа одномерных наблюдений. https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm. (дата обр. 11.02.2019)

35. Jones M.P., O'Gorman T.W., Lemke J.H., Woolson R.F. A Monte Carlo Investigation of Homogeneity Tests of the Odds Ratio under Various Sample Size Configurations // Biometrics. – Vol. 45, No. 1. – (Mar., 1989) . – pp. 171-181.
36. Kiefer J. K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics. 1959. Vol. 30. No. 2. – P. 420-447.
37. Knoke J.D. Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case // Biometrica. 1975. – V.62. – P. 571-575.
38. Lehmann E.L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22, № 1. – P. 165–179.
39. Lemeshko B. Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.
40. Lemeshko B. Yu. Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques – 2005. – Vol. 48, № 12. – P. 1159–1166.
41. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests // Measurement Techniques, 2005. V. 48, № 12. – P.1159-1166.
42. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means // Measurement Techniques. 2008. Vol. 51, № 9. - P.950-959.
43. Li Q. Nonparametric testing of closeness between two unknown distributions functions. // Econ Rev. – Volume 15, 1996. – pp. 216–274.
44. Mann H.B. Nonparametric tests against trend // *Econometrica*. – Vol. 13. 1945. – pp. 245–259.
45. Martínez-Camblor P, de Uña-Alvarez J, Corral N. k-Sample test based on the common area of kernel density estimator. // J Stat Plan Inference. – Volume 138, 2008. – pp. 4006–4020.

46. Martínez-Camblor P., de Uña-_Alvarez J. Nonparametric k-sample tests: density functions vs. distribution functions. // Comput Stat Data Anal. – Volume 53, 2009. – pp. 3344–3357.
47. Mc Gielchrist C.A., Woodyer K.D. Note on a distribution-free CISIM technique // Technometrics. 1975. V. 17, №3. – P. 321-325.
48. Moran P. A. P. Some theoremson time series 2: The siginificance of th serial correlations coefficient // Biometrika. 1948. – V. 35. – P. 255-260.
49. Pettitt A.N. A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. Vol. 63. No.1. P. 161-168.
50. Ramanathana R.V., Rajarshib M.B. Rank tests for testing the randomness of autoregressive coefficients // Statistics & Probability Letters. – Volume 21, Issue 2, 23 September 1994. – pp. 115-120.
51. Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic / M. Rosenblatt // Ann. Math. Statist. – 1952. – Vol. 23. – P. 617–623.
52. Savage I. R. On the Independence of Tests of Randomness and Other Hypotheses // Journal of the American Statistical Association . – Volume 52, 1957. – pp. 53-57.
53. Scholz F.W., Stephens M.A. K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. Vol. 82. No. 399. – P. 918-924.
54. Thas, O., and Ottoy, J. P. (2002), “Goodness-of-Fit Tests Based on Sample Space Partitions: A Unifying Overview,” Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, 6, 203–212.
55. Thas, O., and Ottoy, J. P. (2003), “Some Generalizations of the Anderson–Darling Statistic,”Statistics & Probability Letters, 64, 255–261.
56. Tricker A.R. The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics // Journal of Applied Statistics. 1990. Vol. 17. No. 1. P. 31-38.
57. Tricker A.R. The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics // Journal of Applied Statistics. 1990. Vol. 17. No. 2. P. 219-228.
58. Veretel`nikova I.V., Lemeshko B.Yu. The analytical review of tests for randomness and the absence of a trend // 2014 12TH INTERNATIONAL CONFER-

ENCE ON ACTUAL PROBLEMS OF ELECTRONICS INSTRUMENT ENGINEERING (APEIE) 34006 PROCEEDINGS. Vol. 1. Novosibirsk, 2014. – P.532-539.

59. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Novikova A.Yu. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution// In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. : monograph. - Cham : Springer , 2017. - 10684. - P. 461-475.
60. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Novikova A.Yu. On the Application of Homogeneity Tests // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric methods in Cybernetics and system Analysis". 18-22 September 2017, Krasnoyarsk. P. 181-195.
61. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Novikova A.Yu. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution // Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017). Proceedings of the International Scientific Conference, 23-27 October 2017, Moscow, Russia. - P. 395-399.
62. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu. On power of randomness and absence of trend tests in dispersion characteristics // 2016 13TH INTERNATIONAL SCIENTIFIC TECHNICAL CONFERENCE ON ACTUAL PROBLEMS OF ELECTRONIC INSTRUMENT ENGINEERING (APEIE) – 39281 PROCEEDINGS. Vol.1, Part 2, Novosibirsk, 2016. – P.281-286.
63. Veretelnikova I.V., Lemeshko B.Yu. Tests for an Absence of Trend // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach" – AMSA'2015, Novosibirsk–Belokuricha, Russia, 14-19 September, 2015. – P. 80-91.
64. Veretelnikova, I.V. Criteria of Test against Absence of Trend in Dispersion Characteristics / I.V. Veretelnikova , B.Yu. Lemeshko // Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST), June 1-3, 2016, Novosibirsk, Russia. Part 1. – P. 333-337.

65. Wald A., Wolfowitz J. An Exact Test for Randomness in the Non-Parametric Case Based on Serial Correlation // *The Annals of Mathematical Statistics*. – Vol. 14, No. 4 (Dec., 1943). – pp. 378-388.
66. Wald A., Wolfowitz J. On a test whether two samples are from the same population / A. Wald, J. Wolfowitz // Ann. Math Statist. 1940. Vol. 11. – P. 147-162.
67. Wald A., Wolfowitz J. An Exact Test for Randomness in the Non-Parametric Case Based on Serial Correlation // The Annals of Mathematical Statistics. – Volume 14, Number 4 (1943). – pp. 378-388.
68. Woodward R.H., Goldsmith P.L. Cumulative sum techniques. I.C.I. Monograph. №3, Oliver and Boyd, 1964.
69. Zhang J. Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p.
70. Zhang J. Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio. J R Stat Soc Ser B 2002, 64:281–294.
71. Zhang J. Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48. No. 1. – P.95-103.
72. Zhang J., Wu Y. k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. 2007. V. 51. No. 9. – P. 4682-4691.
73. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 756 с.
74. Беркович А.С., Лемешко Б.Ю., Щеглов А.Е. Исследование распределений статистик критериев тренда и случайности // Материалы X международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2010. Новосибирск, 2010. – Т.6. – С.13-17.
75. Большев Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
76. Веретельникова И. В., Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Новикова А. Ю. О применении критериев проверки однородности средних // Вестник СибГУТИ. 2018. – № 1. – С. 41-55.

77. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. К вопросам применения критериев проверки случайности и отсутствия тренда// Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2014. – С.25-28.
78. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С. 42-53.
79. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О применении критериев проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда // Высокие технологии, фундаментальные исследования, инновации : сборник статей Семнадцатой международной научно-практической конференции “Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике”, 22-23 мая 2014 г., Санкт-Петербург, Россия / научные редакторы А.П. Кудинов, М.А. Кудинов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – С.33-37.
80. Веретельникова И. В., Лемешко Б. Ю. Статистическое моделирование как средство обеспечения корректности выводов при использовании критериев однородности дисперсий в нестандартных условиях // Труды Международной конференции по вычислительной и прикладной математике "ВПМ’17" в рамках "Марчуковских научных чтений", Новосибирск, 25 июня – 14 июля [Электрон. ресурс]. http://conf.nsc.ru/cam17/ru/proceedings. Стр. 536-541
81. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. Аналитический обзор критериев проверки случайности и отсутствия тренда // Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.16-23.
82. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., О применении критериев проверки однородности законов распределения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. – № 41. – С. 24-31.

83. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О мощности критериев случайности и отсутствия тренда в характеристиках рассеяния // Труды XIII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2016. Т.8, Новосибирск, 2016. – С.113-118. ISBN 978-5-7782-2999-0.
84. Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. О критериях отсутствия тренда в математическом ожидании // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 21–22 апр. 2016 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2016. – С. 27–38. - ISBN 978-5-91434-032-9.
85. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – С. 126.
86. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М:, Наука, 1982. - 296 с.
87. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 248 с.
88. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
89. Комиссарова А.С., Лемешко Б.Ю. Сравнительный анализ мощности критериев проверки случайности и отсутствия тренда // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2011. – Т.1. – С.72-75.
90. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.\\
91. Лемешко Б. Ю. Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, Е. П. Миркин // Измерительная техника. – 2004. – № 10. – С. 10–16.
92. Лемешко Б. Ю. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. 2005. № 12. – С. 9–14.

93. Лемешко Б. Ю. Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Метрология, 2004. – № 3. – С. 3–15.
94. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению: монография. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 207 с.
95. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873
96. Лемешко Б.Ю. Проблемы применения критериев однородности и их решение / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, И. В. Веретельникова, А. Ю. Новикова // Материалы республиканской научно-практической конференции "СТАТИСТИКА и её применения-2017". 19-20 октября 2017. Под редакцией профессора А.А. Абдушукурова. Ташкент, НУУз. – С.49-56.
97. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. 2010. № 12. – С.3-25.
98. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 53-66.
99. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана-Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. – С.9-14.
100. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних // Измерительная техника. 2008. № 9. – С.23-28.
101. Лемешко Б. Ю. Лемешко С.Б., Семёнова М.А. К вопросу статистического анализа больших данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. – С. 40-49.

102. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Исследование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального // Тр. V международной конференции "Актуальные проблемы электронного приборостроения" АПЭП-2000. Новосибирск, 2000. – Т. 7. – С. 184-187.

103. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

104. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть 2. Непараметрические критерии. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. 1999. – 85 с.

105. Лемешко Б. Ю. Веретельникова И.В. Мощность k-выборочных критериев проверки однородности законов // Измерительная техника. 2018.№7. – С.3-7.

106. Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В. О k-выборочных критериях проверки однородности законов // Марчуковские научные чтения – 2018. Тезисы международной конференции “Вычислительная математика и математическая геофизика”, Новосибирск, 8–12 октября 2018 г. – С. 33-34.

107. Лемешко С.Б. Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности / С. Б. Лемешко // Измерительная техника, 2006. № 10. - С.9-14.

108. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Метрология. 2004. – № 3.- С.3-15.

109. Ликеш И., Ляга Й. Основные таблицы математической статистики. – М.: Финансы и статистика, 1985.

110. Макаров А.А., Симонова Г.И. Исследование мощности двухвыборочного критерия Андерсена–Дарлинга в случае засорения одной из выборок. // Ста-

тистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр. № 20, Перм. ун-т. – Пермь, 2007 – с. 40-52.

111. Михайлов Г.А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. - Новосибирск: Наука, 1974. - 142 с.

112. Орлов А.И. О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 2003. – Т. 69, №. 1. – С. 55–60.

113. Постовалов С.Н. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез: Дис. ... д.т.н.: 05.13.17 /Новосибирский государственный технический университет (НГТУ) , 2014, - 298 с.

114. Постовалов С.Н. Статистический анализ одномерных интервальных наблюдений: Дис... канд. техн. наук .: 05.13.17 /Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), 1998. УДК 519.2, - 196 с.

115. Филоненко П.А. Статистический анализ критериев для проверки гипотезы однородности распределений по случайно цензурированным наблюдениям: Дис. ... к.т.н.: 05.13.17 . - Новосибирский государственный технический университет (НГТУ) , 2017, - 228 с.

116. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. – М.: Изд-во стандартов. 2002. – 87 с.

117. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. – М.: Изд-во стандартов. 2002. – 64 с.

118. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: ИЛ, 1956.

119. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973.

120. Щеглов А.Е., Лемешко Б.Ю. Исследование свойств критериев тренда и случайности методами статистического моделирования // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”, Новосибирск. 2011. – Т.1. – С.132-134.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы оценок мощности рассмотренных критериев

Таблица А.1. Мощность модификации критерия автокорреляции относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.109	0.190	0.708
	0.050	0.056	0.114	0.570
	0.025	0.029	0.068	0.435
	0.010	0.012	0.032	0.273
25	0.100	0.113	0.289	0.980
	0.050	0.059	0.194	0.958
	0.025	0.031	0.128	0.921
	0.010	0.013	0.073	0.851
50	0.100	0.117	0.433	1.000
	0.050	0.062	0.323	1.000
	0.025	0.033	0.236	0.999
	0.010	0.014	0.151	0.997
100	0.100	0.125	0.651	1.000
	0.050	0.067	0.542	1.000
	0.025	0.036	0.441	1.000
	0.010	0.016	0.326	1.000
200	0.100	0.138	0.879	1.000
	0.050	0.077	0.813	1.000
	0.025	0.043	0.739	1.000
	0.010	0.020	0.632	1.000
300	0.100	0.152	0.961	1.000
	0.050	0.087	0.932	1.000
	0.025	0.050	0.892	1.000
	0.010	0.024	0.826	1.000

Таблица А.2. Мощность модификации критерия автокорреляции относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.224	0.142	0.121	0.068
	0.100	0.162	0.094	0.078	0.039
	0.050	0.094	0.046	0.037	0.016
	0.025	0.054	0.023	0.018	0.006
	0.010	0.024	0.009	0.007	0.002
25	0.150	0.307	0.139	0.113	0.063
	0.100	0.239	0.091	0.071	0.034
	0.050	0.156	0.044	0.032	0.012
	0.025	0.100	0.022	0.015	0.004
	0.010	0.056	0.009	0.005	0.001
50	0.150	0.394	0.167	0.290	0.849
	0.100	0.321	0.113	0.220	0.792
	0.050	0.225	0.059	0.134	0.682
	0.025	0.155	0.030	0.079	0.563
	0.010	0.092	0.012	0.038	0.408
100	0.150	0.539	0.198	0.503	0.994
	0.100	0.463	0.141	0.425	0.990
	0.050	0.353	0.079	0.315	0.980
	0.025	0.264	0.044	0.228	0.964
	0.010	0.176	0.021	0.146	0.931

Продолжение таблиты А.2

200	0.150	0.739	0.236	0.729	1.000
	0.100	0.675	0.173	0.664	1.000
	0.050	0.567	0.103	0.554	1.000
	0.025	0.466	0.061	0.453	1.000
	0.010	0.350	0.030	0.336	0.999
300	0.150	0.856	0.268	0.852	1.000
	0.100	0.809	0.203	0.805	1.000
	0.050	0.724	0.126	0.719	1.000
	0.025	0.634	0.077	0.627	1.000
	0.010	0.516	0.040	0.509	1.000

Таблица А.3.Мощность критерия Вальда-Вольфовица относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.102	0.125	0.276
	0.050	0.051	0.065	0.156
	0.025	0.026	0.034	0.083
	0.010	0.010	0.014	0.035
25	0.100	0.105	0.190	0.835
	0.050	0.053	0.115	0.735
	0.025	0.027	0.069	0.624
	0.010	0.011	0.034	0.475
50	0.100	0.108	0.287	0.993
	0.050	0.056	0.194	0.984
	0.025	0.029	0.128	0.969
	0.010	0.012	0.073	0.935
100	0.100	0.113	0.455	1.000
	0.050	0.058	0.341	1.000
	0.025	0.030	0.250	1.000
	0.010	0.013	0.163	1.000
200	0.100	0.119	0.696	1.000
	0.050	0.064	0.587	1.000
	0.025	0.034	0.482	1.000
	0.010	0.015	0.359	1.000
300	0.100	0.126	0.838	1.000
	0.050	0.069	0.757	1.000
	0.025	0.037	0.669	1.000
	0.010	0.016	0.550	1.000

Таблица А.4. Мощность критерия Вальда-Вольфовица относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.198	0.153	0.168	0.273
	0.100	0.140	0.102	0.112	0.191
	0.050	0.076	0.050	0.054	0.094
	0.025	0.040	0.025	0.026	0.041
	0.010	0.018	0.010	0.009	0.011
25	0.150	0.242	0.148	0.156	0.304
	0.100	0.180	0.098	0.102	0.213
	0.050	0.108	0.048	0.049	0.104
	0.025	0.064	0.023	0.023	0.046
	0.010	0.032	0.009	0.008	0.013

Продолжение таблиты А.4

50	0.150	0.295	0.164	0.263	0.779
	0.100	0.228	0.112	0.197	0.714
	0.050	0.147	0.059	0.120	0.600
	0.025	0.093	0.030	0.072	0.486
	0.010	0.051	0.013	0.036	0.353
100	0.150	0.394	0.177	0.382	0.967
	0.100	0.320	0.123	0.308	0.950
	0.050	0.221	0.066	0.210	0.912
	0.025	0.150	0.036	0.141	0.861
	0.010	0.090	0.016	0.082	0.781
200	0.150	0.557	0.196	0.553	0.999
	0.100	0.479	0.139	0.474	0.999
	0.050	0.364	0.078	0.359	0.997
	0.025	0.270	0.043	0.265	0.993
	0.010	0.176	0.020	0.172	0.983
300	0.150	0.680	0.214	0.678	1.000
	0.100	0.609	0.155	0.606	1.000
	0.050	0.493	0.089	0.491	1.000
	0.025	0.390	0.051	0.387	1.000
	0.010	0.276	0.024	0.274	0.999

Таблица А.5. Мощность рангового критерия Вальда–Вольфовица относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.104	0.155	0.545
	0.050	0.052	0.088	0.399
	0.025	0.028	0.051	0.276
	0.010	0.011	0.022	0.143
25	0.100	0.107	0.216	0.921
	0.050	0.054	0.135	0.861
	0.025	0.028	0.084	0.787
	0.010	0.012	0.045	0.672
50	0.100	0.110	0.305	0.997
	0.050	0.056	0.210	0.993
	0.025	0.029	0.142	0.986
	0.010	0.012	0.083	0.968
100	0.100	0.112	0.461	1.000
	0.050	0.058	0.349	1.000
	0.025	0.030	0.258	1.000
	0.010	0.013	0.170	1.000
200	0.100	0.119	0.691	1.000
	0.050	0.063	0.584	1.000
	0.025	0.034	0.481	1.000
	0.010	0.014	0.359	1.000
300	0.100	0.125	0.830	1.000
	0.050	0.067	0.748	1.000
	0.025	0.037	0.659	1.000
	0.010	0.016	0.542	1.000

Таблица А.6. Мощность рангового критерия Вальда–Вольфовица относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.203	0.153	0.173	0.293
	0.100	0.146	0.104	0.119	0.217
	0.050	0.083	0.051	0.059	0.118
	0.025	0.048	0.026	0.030	0.062
	0.010	0.022	0.010	0.010	0.018
25	0.150	0.244	0.149	0.159	0.322
	0.100	0.182	0.099	0.105	0.231
	0.050	0.109	0.048	0.049	0.118
	0.025	0.066	0.024	0.023	0.053
	0.010	0.034	0.009	0.008	0.016
50	0.150	0.293	0.165	0.262	0.782
	0.100	0.227	0.112	0.197	0.720
	0.050	0.146	0.058	0.120	0.610
	0.025	0.093	0.030	0.072	0.501
	0.010	0.051	0.013	0.037	0.372
100	0.150	0.387	0.176	0.376	0.967
	0.100	0.314	0.122	0.302	0.950
	0.050	0.217	0.066	0.206	0.913
	0.025	0.147	0.035	0.138	0.865
	0.010	0.088	0.016	0.081	0.788
200	0.150	0.544	0.193	0.540	0.999
	0.100	0.468	0.137	0.463	0.999
	0.050	0.354	0.076	0.350	0.997
	0.025	0.262	0.042	0.258	0.993
	0.010	0.170	0.019	0.167	0.984
300	0.150	0.666	0.210	0.664	1.000
	0.100	0.593	0.151	0.590	1.000
	0.050	0.477	0.086	0.475	1.000
	0.025	0.375	0.049	0.373	1.000
	0.010	0.267	0.0235	0.264	0.999

Таблица А.7. Мощность критерия Бартелса относительно гипотез относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.105	0.163	0.624
	0.050	0.055	0.095	0.492
	0.025	0.028	0.056	0.381
	0.010	0.013	0.027	0.250
25	0.100	0.107	0.223	0.937
	0.050	0.055	0.143	0.890
	0.025	0.028	0.090	0.826
	0.010	0.012	0.049	0.729
50	0.100	0.110	0.313	0.998
	0.050	0.056	0.216	0.995
	0.025	0.029	0.147	0.989
	0.010	0.012	0.088	0.975
100	0.100	0.113	0.468	1.000
	0.050	0.059	0.355	1.000
	0.025	0.031	0.264	1.000
	0.010	0.013	0.175	1.000

Продолжение таблиты А.7

200	0.100	0.119	0.696	1.000
	0.050	0.063	0.589	1.000
	0.025	0.034	0.487	1.000
	0.010	0.014	0.364	1.000
300	0.100	0.125	0.832	1.000
	0.050	0.067	0.750	1.000
	0.025	0.037	0.662	1.000
	0.010	0.016	0.545	1.000

Таблица А.8. Мощность критерия Бартелса относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.196	0.159	0.181	0.315
	0.100	0.138	0.105	0.122	0.231
	0.050	0.075	0.052	0.062	0.131
	0.025	0.042	0.027	0.031	0.070
	0.010	0.019	0.011	0.012	0.026
25	0.150	0,238	0.149	0.157	0.311
	0.100	0.176	0.098	0.103	0.220
	0.050	0.106	0.048	0.049	0.112
	0.025	0.063	0.024	0.023	0.051
	0.010	0.032	0.009	0.008	0.015
50	0.150	0.289	0.165	0.259	0.774
	0.100	0.224	0.112	0.195	0.711
	0.050	0.143	0.058	0.118	0.599
	0.025	0.090	0.030	0.070	0.488
	0.010	0.049	0.013	0.036	0.360
100	0.150	0.384	0.176	0.373	0.965
	0.100	0.311	0.122	0.300	0.948
	0.050	0.214	0.065	0.203	0.910
	0.025	0.145	0.035	0.136	0.861
	0.010	0.086	0.015	0.079	0.782
200	0.150	0.542	0.193	0.538	0.999
	0.100	0.465	0.137	0.461	0.999
	0.050	0.352	0.076	0.347	0.996
	0.025	0.261	0.042	0.256	0.993
	0.010	0.169	0.019	0.166	0.983
300	0.150	0.665	0.210	0.662	1.000
	0.100	0.591	0.151	0.589	1.000
	0.050	0.475	0.086	0.472	1.000
	0.025	0.374	0.049	0.371	1.000
	0.010	0.265	0.023	0.262	0.999

Таблица А.9. Процентные точки статистики критерия кумулятивной суммы

n	1–α					
	0.9		0.95		0.99	
	V_1	V_2	V_1	V_2	V_1	V_2
3	0	1	0	1	0	1
4	1	2	1	2	1	2
5	0	2	0	2	0	2
6	1	3	1	3	1	3
7	0	3	0	3	0	3
8	1	4	1	4	1	4
9	0	4	0	4	0	4
10	1	5	1	5	1	5

Продолжение таблиты А.9

11	0	5	0	5	0	5
12	1	6	1	6	1	6
13	0	5	0	6	0	6
14	1	6	1	7	1	7
15	0	6	0	6	0	7
16	1	7	1	7	1	8
17	0	7	0	7	0	8
18	1	8	1	8	1	9
19	0	7	0	8	0	9
20	1	8	1	9	1	10
25	1	9	0	9	0	11
30	2	11	1	11	1	13
40	2	13	1	14	1	16
50	2	14	2	16	1	18
100	3	22	2	24	1	27
150	4	27	3	30	1	35
200	5	32	3	35	2	41
300	6	39	4	43	2	51

Таблица А.10. Мощность критерия кумулятивной суммы относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.120	0.075	0.004
	0.050	0.120	0.075	0.004
	0.025	0.120	0.075	0.004
	0.010	0.120	0.075	0.004
25	0.100	0.069	0.025	0.000
	0.050	0.057	0.024	0.000
	0.025	0.021	0.009	0.000
	0.010	0.006	0.002	0.000
50	0.100	0.103	0.270	0.891
	0.050	0.066	0.267	0.891
	0.025	0.011	0.001	0.000
	0.010	0.005	0.000	0.000
100	0.100	0.124	0.535	1.000
	0.050	0.051	0.281	0.992
	0.025	0.047	0.281	0.902
	0.010	0.004	0.000	0.000
200	0.100	0.241	0.846	1.000
	0.050	0.098	0.554	1.000
	0.025	0.039	0.291	1.000
	0.010	0.037	0.291	1.000
300	0.100	0.308	0.918	1.000
	0.050	0.163	0.742	1.000
	0.025	0.094	0.559	1.000
	0.010	0.037	0.293	1.000

Таблица А.11. Мощность критерия кумулятивной суммы относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.093	0.135	0.156	0.239
	0.100	0.093	0.135	0.156	0.239
	0.050	0.093	0.135	0.156	0.239
	0.025	0.093	0.135	0.156	0.239
	0.010	0.093	0.135	0.156	0.239

Продолжение таблиты А.11

25	0.150	0.153	0.167	0.172	0.172
	0.100	0.128	0.107	0.115	0.119
	0.050	0.021	0.052	0.046	0.030
	0.025	0.008	0.019	0.015	0.007
	0.010	0.002	0.005	0.004	0.001
50	0.150	0.146	0.138	0.136	0.128
	0.100	0.055	0.095	0.087	0.065
	0.050	0.044	0.047	0.045	0.048
	0.025	0.002	0.012	0.008	0.001
	0.010	0.001	0.006	0.003	0.000
100	0.150	0.172	0.149	0.139	0.139
	0.100	0.081	0.078	0.072	0.081
	0.050	0.024	0.032	0.026	0.029
	0.025	0.024	0.025	0.022	0.029
	0.010	0.000	0.005	0.002	0.000
200	0.150	0.265	0.147	0.147	0.200
	0.100	0.178	0.099	0.102	0.148
	0.050	0.048	0.036	0.034	0.053
	0.025	0.014	0.013	0.011	0.017
	0.010	0.014	0.009	0.010	0.017
300	0.150	0.284	0.141	0.147	0.218
	0.100	0.205	0.102	0.111	0.169
	0.050	0.078	0.044	0.048	0.078
	0.025	0.036	0.020	0.024	0.040
	0.010	0.011	0.007	0.007	0.012

Таблица А.12. Мощность критерия Холлина относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.105	0.157	0.540
	0.050	0.053	0.089	0.414
	0.025	0.027	0.050	0.289
	0.010	0.011	0.023	0.148
25	0.100	0.111	0.216	0.887
	0.050	0.059	0.136	0.806
	0.025	0.029	0.085	0.714
	0.010	0.011	0.045	0.593
50	0.100	0.113	0.306	0.997
	0.050	0.057	0.210	0.993
	0.025	0.028	0.142	0.984
	0.010	0.011	0.084	0.972
100	0.100	0.116	0.462	1.000
	0.050	0.058	0.350	1.000
	0.025	0.030	0.258	1.000
	0.010	0.012	0.170	1.000
200	0.100	0.119	0.692	1.000
	0.050	0.063	0.585	1.000
	0.025	0.034	0.483	1.000
	0.010	0.014	0.360	1.000
300	0.100	0.125	0.830	1.000
	0.050	0.067	0.747	1.000
	0.025	0.037	0.659	1.000
	0.010	0.016	0.542	1.000

Таблица А.13. Мощность критерия Холлина относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.209	0.155	0.175	0.298
	0.100	0.151	0.105	0.120	0.221
	0.050	0.087	0.052	0.059	0.120
	0.025	0.049	0.025	0.028	0.058
	0.010	0.023	0.010	0.010	0.019
25	0.150	0.948	0.149	0.159	0.325
	0.100	0.923	0.099	0.105	0.234
	0.050	0.866	0.048	0.050	0.120
	0.025	0.794	0.024	0.023	0.055
	0.010	0.681	0.009	0.008	0.016
50	0.150	0.999	0.165	0.263	0.784
	0.100	0.997	0.112	0.198	0.722
	0.050	0.993	0.058	0.120	0.613
	0.025	0.986	0.030	0.073	0.505
	0.010	0.969	0.013	0.037	0.376
100	0.150	0.386	0.176	0.376	0.967
	0.100	0.313	0.122	0.302	0.950
	0.050	0.216	0.066	0.206	0.914
	0.025	0.147	0.035	0.138	0.866
	0.010	0.088	0.016	0.081	0.790
200	0.150	1.000	0.193	0.540	0.999
	0.100	1.000	0.137	0.463	0.999
	0.050	1.000	0.076	0.350	0.997
	0.025	1.000	0.042	0.259	0.993
	0.010	1.000	0.019	0.167	0.984
300	0.150	0.666	0.210	0.664	1.000
	0.100	0.593	0.151	0.591	1.000
	0.050	0.477	0.086	0.474	1.000
	0.025	0.375	0.049	0.373	1.000
	0.010	0.267	0.024	0.264	0.999

Таблица А.14. Мощность критерия Фостера–Стюарта со статистикой относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.100	0.317	0.491
	0.050	0.050	0.152	0.301
	0.025	0.025	0.152	0.176
	0.010	0.010	0.054	0.063
25	0.100	0.104	0.290	0.679
	0.050	0.050	0.162	0.530
	0.025	0.025	0.162	0.418
	0.010	0.010	0.078	0.270
50	0.100	0.112	0.374	0.756
	0.050	0.055	0.242	0.636
	0.025	0.029	0.140	0.537
	0.010	0.011	0.073	0.401
100	0.100	0.117	0.310	0.798
	0.050	0.059	0.201	0.699
	0.025	0.033	0.201	0.610
	0.010	0.012	0.120	0.480
200	0.100	0.159	0.370	0.884
	0.050	0.090	0.259	0.814
	0.025	0.047	0.169	0.722
	0.010	0.023	0.102	0.614

Продолжение таблиты А.14

300	0.100	0.177	0.401	0.903
300	0.050	0.104	0.289	0.844
300	0.025	0.057	0.196	0.765
300	0.010	0.029	0.125	0.670

Таблица А.15. Мощность критерия Фостера–Стюарта со статистикой относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.118	0.124	0.103	0.057
10	0.100	0.118	0.038	0.030	0.013
10	0.050	0.033	0.038	0.030	0.013
10	0.025	0.033	0.008	0.006	0.002
10	0.010	0.007	0.086	0.082	0.089
25	0.150	0.205	0.031	0.029	0.031
25	0.100	0.089	0.031	0.029	0.031
25	0.050	0.032	0.010	0.008	0.009
25	0.025	0.032	0.126	0.124	0.136
25	0.010	0.010	0.056	0.054	0.062
50	0.150	0.131	0.022	0.021	0.025
50	0.100	0.131	0.007	0.007	0.009
50	0.050	0.059	0.124	0.081	0.088
50	0.025	0.023	0.038	0.036	0.041
50	0.010	0.008	0.038	0.036	0.041
100	0.150	0.170	0.164	0.015	0.018
100	0.100	0.086	0.082	0.107	0.113
100	0.050	0.039	0.037	0.053	0.058
100	0.025	0.039	0.037	0.024	0.027
100	0.010	0.016	0.015	0.010	0.012
200	0.150	0.206	0.199	0.122	0.129
200	0.100	0.114	0.109	0.064	0.070
200	0.050	0.058	0.054	0.031	0.035
200	0.025	0.027	0.025	0.014	0.016
200	0.010	0.012	0.011	0.103	0.057
300	0.150	0.130	0.123	0.030	0.013
300	0.100	0.130	0.064	0.030	0.013
300	0.050	0.069	0.031	0.006	0.002
300	0.025	0.034	0.014	0.082	0.089
300	0.010	0.015	0.012	0.029	0.031

Таблица А.16. Мощность критерия Кокса–Стюарта со статистикой относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.114	0.157	0.515
10	0.050	0.057	0.002	0.190
10	0.025	0.028	0.002	0.041
10	0.010	0.012	0.002	0.003
25	0.100	0.154	0.471	0.984
25	0.050	0.084	0.321	0.953
25	0.025	0.049	0.216	0.906
25	0.010	0.020	0.130	0.812
50	0.100	0.206	0.757	1.000
50	0.050	0.123	0.636	1.000
50	0.025	0.075	0.515	0.999
50	0.010	0.039	0.367	0.997

Продолжение таблиты А.16

100	0.100	0.308	0.957	1.000
	0.050	0.210	0.915	1.000
	0.025	0.135	0.858	1.000
	0.010	0.077	0.759	1.000
200	0.100	0.491	0.999	1.000
	0.050	0.366	0.998	1.000
	0.025	0.264	0.994	1.000
	0.010	0.166	0.984	1.000
300	0.100	0.634	1.000	1.000
	0.050	0.509	1.000	1.000
	0.025	0.395	1.000	1.000
	0.010	0.274	0.999	1.000

Таблица А.17. Мощность критерия Кокса–Стюарта со статистикой относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.280	0.153	0.148	0.137
	0.100	0.222	0.098	0.102	0.106
	0.050	0.127	0.031	0.030	0.027
	0.025	0.127	0.031	0.030	0.027
	0.010	0.127	0.031	0.030	0.027
25	0.150	0.347	0.139	0.133	0.112
	0.100	0.288	0.100	0.094	0.075
	0.050	0.187	0.046	0.042	0.029
	0.025	0.117	0.023	0.021	0.013
	0.010	0.069	0.010	0.008	0.003
50	0.150	0.523	0.151	0.152	0.157
	0.100	0.442	0.102	0.101	0.100
	0.050	0.319	0.050	0.050	0.042
	0.025	0.224	0.025	0.024	0.017
	0.010	0.136	0.010	0.009	0.005
100	0.150	0.755	0.159	0.181	0.249
	0.100	0.686	0.107	0.125	0.172
	0.050	0.562	0.054	0.064	0.085
	0.025	0.447	0.027	0.032	0.040
	0.010	0.317	0.011	0.013	0.014
200	0.150	0.944	0.172	0.235	0.421
	0.100	0.915	0.118	0.169	0.319
	0.050	0.853	0.062	0.095	0.190
	0.025	0.778	0.033	0.053	0.107
	0.010	0.666	0.014	0.024	0.047
300	0.150	0.989	0.188	0.288	0.568
	0.100	0.981	0.131	0.215	0.462
	0.050	0.959	0.071	0.129	0.308
	0.025	0.927	0.038	0.075	0.193
	0.010	0.866	0.017	0.036	0.095

Таблица А.18. Мощность критериев инверсий со статистиками I, I^*, K, T относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	Кр. инверсий I, I^*			Кр. инверсий K, T		
		H_1	H_2	H_3	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.102	0.265	0.883	0.128	0.337	0.926
	0.050	0.068	0.198	0.822	0.089	0.263	0.883
	0.025	0.026	0.095	0.637	0.037	0.140	0.740
	0.010	0.015	0.060	0.517	0.022	0.095	0.637
25	0.100	0.173	0.640	1.000	0.185	0.659	1.000
	0.050	0.097	0.499	0.999	0.104	0.520	1.000
	0.025	0.054	0.374	0.998	0.059	0.395	0.998
	0.010	0.027	0.259	0.994	0.031	0.277	0.995
50	0.100	0.253	0.897	1.000	0.258	0.900	1.000
	0.050	0.163	0.827	1.000	0.167	0.831	1.000
	0.025	0.100	0.737	1.000	0.103	0.743	1.000
	0.010	0.053	0.614	1.000	0.055	0.621	1.000
100	0.100	0.401	0.994	1.000	0.403	0.994	1.000
	0.050	0.283	0.986	1.000	0.285	0.986	1.000
	0.025	0.195	0.972	1.000	0.196	0.972	1.000
	0.010	0.116	0.941	1.000	0.117	0.942	1.000
200	0.100	0.633	1.000	1.000		1.000	1.000
	0.050	0.509	1.000	1.000		1.000	1.000
	0.025	0.396	1.000	1.000		1.000	1.000
	0.010	0.273	1.000	1.000		1.000	1.000
300	0.100	0.785	1.000	1.000	0.785	1.000	1.000
	0.050	0.680	1.000	1.000	0.682	1.000	1.000
	0.025	0.574	1.000	1.000	0.576	1.000	1.000
	0.010	0.441	1.000	1.000	0.443	1.000	1.000

Таблица А19. Мощность критериев инверсий со статистиками I, I^* относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.248	0.289	0.115	0.075
	0.100	0.187	0.230	0.077	0.047
	0.050	0.136	0.178	0.050	0.027
	0.025	0.062	0.098	0.018	0.008
	0.010	0.038	0.069	0.010	0.004
25	0.150	0.437	0.602	0.147	0.138
	0.100	0.358	0.529	0.100	0.091
	0.050	0.235	0.400	0.047	0.039
	0.025	0.150	0.297	0.023	0.017
	0.010	0.088	0.208	0.010	0.007
50	0.150	0.659	0.857	0.172	0.219
	0.100	0.572	0.807	0.116	0.147
	0.050	0.444	0.714	0.061	0.076
	0.025	0.327	0.611	0.031	0.037
	0.010	0.213	0.486	0.013	0.014
100	0.150	0.884	0.356	0.964	0.354
	0.100	0.837	0.2689	0.944	0.266
	0.050	0.741	0.148	0.896	0.152
	0.025	0.642	0.0852	0.834	0.087
	0.010	0.503	0.0444	0.735	0.037

Продолжение таблиты А.19

200	0.150	0.990	0.585	0.999	0.585
	0.100	0.982	0.490	0.999	0.485
	0.050	0.962	0.330	0.996	0.335
	0.025	0.931	0.198	0.992	0.220
	0.010	0.873	0.105	0.979	0.118
300	0.150	0.999	0.739	1.000	0.746
	0.100	0.999	0.653	1.000	0.659
	0.050	0.996	0.497	1.000	0.509
	0.025	0.990	0.361	1.000	0.372
	0.010	0.977	0.227	1.000	0.229

Таблица А.20. Мощность критериев инверсий со статистиками K, T относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.15	0.195	0.095	0.109	0.066
	0.1	0.140	0.060	0.072	0.039
	0.05	0.097	0.036	0.046	0.023
	0.025	0.040	0.010	0.016	0.007
	0.01	0.023	0.005	0.009	0.003
25	0.15	0.417	0.123	0.141	0.127
	0.1	0.340	0.081	0.095	0.083
	0.05	0.220	0.035	0.044	0.035
	0.025	0.138	0.015	0.021	0.015
	0.01	0.079	0.006	0.009	0.006
50	0.15	0.653	0.135	0.169	0.213
	0.1	0.565	0.086	0.113	0.142
	0.05	0.437	0.042	0.060	0.074
	0.025	0.321	0.019	0.030	0.036
	0.01	0.208	0.007	0.013	0.014
100	0.15	0.883	0.164	0.217	0.354
	0.1	0.835	0.116	0.157	0.267
	0.05	0.739	0.057	0.082	0.147
	0.025	0.639	0.030	0.045	0.084
	0.01	0.500	0.015	0.024	0.044
200	0.15	0.990	0.186	0.261	0.586
	0.100	0.982	0.132	0.191	0.485
	0.050	0.962	0.070	0.110	0.336
	0.025	0.931	0.035	0.062	0.222
	0.010	0.872	0.015	0.028	0.119
300	0.150	0.999	0.206	0.366	0.738
	0.100	0.998	0.148	0.288	0.653
	0.050	0.996	0.081	0.181	0.496
	0.025	0.990	0.047	0.110	0.361
	0.010	0.977	0.023	0.056	0.227

Таблица А.21. Процентные точки для статистики сериального критерия Вальда–Вольфовица

n	1–α					
	0.90		0.95		0.99	
	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2
3	0.707	2.828	0.707	2.828	0.707	2.828
4	-1.225	1.225	-1.225	1.225	-1.225	1.225
5	-0.655	2.619	-0.655	2.619	-0.655	2.619
6	-1.826	1.826	-1.826	1.826	-1.826	1.826
7	-1.334	2.062	-1.334	2.910	-1.334	2.910

Продолжение таблиты А.21

8	-1.334	2.062	-1.334	2.910	-1.334	2.910
9	-1.125	2.490	-1.125	2.490	-1.847	3.213
10	-1.342	1.342	-2.012	2.012	-2.683	2.683
11	-0.991	2.216	-0.991	2.216	-1.633	2.858
12	-1.817	1.817	-1.817	1.817	-2.422	2.422
13	-0.897	2.019	-1.480	2.602	-2.063	3.185
14	-1.669	1.669	-2.225	2.225	-2.225	2.225
15	-1.364	2.405	-1.364	2.405	-1.903	2.944
16	-1.553	1.553	-2.070	2.070	-2.588	2.588
17	-1.272	2.248	-1.272	2.248	-2.278	2.751
18	-1.458	1.458	-1.944	1.944	-2.430	2.430
19	-1.196	2.118	-1.670	2.592	-2.143	3.065
20	-1.838	1.838	-1.838	1.838	-2.297	2.297
25	-1.031	1.834	-1.441	2.243	-2.259	3.061
30	-1.486	1.486	-1.858	1.858	-2.601	2.601
40	-2.602	2.602	-1.922	1.922	-2.563	2.563
50	-1.715	1.715	-2.000	2.000	-2.572	2.572
100	-1.608	1.608	-2.010	2.010	-2.613	2.613
150	-1.639	1.639	-1.966	1.966	-2.622	2.622
200	-1.701	1.701	-1.985	1.985	-2.552	2.552
300	-1.619	1.619	-1.966	1.966	-2.545	2.545

Таблица А.22.Мощность сериального критерия Вальда–Вольфовица со статистикой (2.32) относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.103	0.198	0.348
	0.050	0.052	0.061	0.237
	0.025	0.026	0.061	0.152
	0.010	0.010	0.005	0.090
25	0.100	0.110	0.179	0.687
	0.050	0.056	0.112	0.565
	0.025	0.027	0.035	0.446
	0.010	0.012	0.019	0.320
50	0.100	0.106	0.154	0.927
	0.050	0.053	0.111	0.873
	0.025	0.026	0.055	0.796
	0.010	0.010	0.038	0.687
100	0.100	0.109	0.291	0.997
	0.050	0.055	0.174	0.994
	0.025	0.027	0.117	0.986
	0.010	0.010	0.058	0.965
200	0.100	0.094	0.412	1.000
	0.050	0.051	0.313	1.000
	0.025	0.026	0.226	1.000
	0.010	0.012	0.155	1.000
300	0.100	0.115	0.571	1.000
	0.050	0.055	0.430	1.000
	0.025	0.032	0.347	1.000
	0.010	0.013	0.247	1.000

Таблица А.23.Мощность сериального критерия Вальда–Вольфовица относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.208	0.222	0.269	0.449
	0.100	0.208	0.222	0.269	0.449
	0.050	0.055	0.053	0.070	0.146
	0.025	0.055	0.053	0.070	0.146
	0.010	0.005	0.007	0.005	0.002
25	0.150	0.183	0.150	0.138	0.178
	0.100	0.183	0.150	0.138	0.178
	0.050	0.090	0.065	0.057	0.071
	0.025	0.035	0.022	0.017	0.007
	0.010	0.014	0.007	0.005	0.002
50	0.150	0.210	0.157	0.192	0.531
	0.100	0.131	0.089	0.115	0.420
	0.050	0.078	0.047	0.066	0.318
	0.025	0.043	0.023	0.034	0.223
	0.010	0.023	0.010	0.017	0.150
100	0.150	0.266	0.168	0.259	0.814
	0.100	0.203	0.115	0.196	0.762
	0.050	0.108	0.049	0.103	0.636
	0.025	0.076	0.030	0.072	0.565
	0.010	0.035	0.010	0.031	0.420
200	0.150	0.357	0.172	0.354	0.969
	0.100	0.259	0.101	0.256	0.947
	0.050	0.179	0.055	0.176	0.913
	0.025	0.117	0.029	0.115	0.866
	0.010	0.072	0.014	0.071	0.803
300	0.150	0.452	0.189	0.451	0.996
	0.100	0.365	0.125	0.364	0.992
	0.050	0.250	0.062	0.248	0.982
	0.025	0.185	0.037	0.184	0.971
	0.010	0.111	0.016	0.110	0.944

Таблица А.24. Процентные точки для статистики RR критерия Рамачандрана–Ранганатана

n	1–α				
	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
3	5	5	5	5	5
4	8	8	8	8	8
5	11	13	13	13	13
6	14	14	14	18	18
7	17	19	21	25	25
8	20	20	24	26	32
9	23	25	27	33	41
10	26	28	30	34	42
11	31	31	35	39	51
12	32	34	38	44	56
13	37	39	43	47	63
14	40	42	46	52	66
15	43	45	49	57	71
16	46	50	52	60	76
17	49	53	57	65	81
18	52	56	62	68	86
19	57	61	65	73	93
20	60	64	68	76	96
25	77	81	87	97	121

Продолжение таблиты А.24

30	94	98	106	116	144
40	126	132	140	154	188
50	160	166	176	192	230
100	322	332	346	370	422
150	482	494	512	540	602
200	640	654	674	706	774
300	954	972	996	1034	1114

Таблица А.25. Мощность критерия Рамачандрана–Ранганатана относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.109	0.296	0.510
	0.050	0.056	0.249	0.422
	0.025	0.029	0.139	0.359
	0.010	0.011	0.073	0.282
25	0.100	0.130	0.062	0.846
	0.050	0.070	0.368	0.808
	0.025	0.039	0.289	0.779
	0.010	0.017	0.190	0.737
50	0.100	0.133	0.125	0.948
	0.050	0.072	0.068	0.936
	0.025	0.042	0.496	0.928
	0.010	0.019	0.408	0.914
100	0.100	0.139	0.291	0.984
	0.050	0.076	0.204	0.980
	0.025	0.047	0.123	0.977
	0.010	0.020	0.658	0.974
200	0.100	0.240	0.578	1.000
	0.050	0.173	0.448	1.000
	0.025	0.098	0.345	1.000
	0.010	0.055	0.235	1.000
300	0.100	0.187	0.839	1.000
	0.050	0.109	0.782	1.000
	0.025	0.062	0.679	1.000
	0.010	0.030	0.577	1.000

Таблица А.26. Мощность критерия Рамачандрана–Ранганатана относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.293	0.177	0.160	0.105
	0.100	0.225	0.128	0.108	0.058
	0.050	0.145	0.067	0.055	0.026
	0.025	0.083	0.036	0.027	0.009
	0.010	0.065	0.022	0.016	0.005
25	0.150	0.348	0.159	0.158	0.174
	0.100	0.273	0.104	0.097	0.077
	0.050	0.181	0.052	0.044	0.022
	0.025	0.120	0.026	0.022	0.010
	0.010	0.067	0.010	0.009	0.005
50	0.150	0.431	0.198	0.323	0.753
	0.100	0.347	0.133	0.231	0.652
	0.050	0.241	0.067	0.126	0.477
	0.025	0.166	0.033	0.064	0.315
	0.010	0.099	0.013	0.023	0.149

Продолжение таблиты А.26

100	0.150	0.543	0.238	0.497	0.967
	0.100	0.459	0.173	0.407	0.947
	0.050	0.335	0.094	0.277	0.897
	0.025	0.245	0.052	0.187	0.833
	0.010	0.157	0.023	0.104	0.723
200	0.150	0.694	0.287	0.679	0.999
	0.100	0.615	0.213	0.598	0.998
	0.050	0.490	0.127	0.469	0.995
	0.025	0.383	0.075	0.360	0.989
	0.010	0.270	0.037	0.246	0.976
300	0.150	0.789	0.317	0.782	1.000
	0.100	0.723	0.240	0.714	1.000
	0.050	0.609	0.148	0.597	1.000
	0.025	0.499	0.089	0.486	0.999
	0.010	0.375	0.046	0.361	0.998

Таблица А.27. Процентные точки для статистики (нормированного) числа серий знаков первых разностей

n	$1-\alpha$					
	0.90		0.95		0.99	
	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2
3	-1,451	0,725	-1,451	0,725	-1,451	0,725
4	-2,138	1,069	-2,138	1,069	-2,138	1,069
5	-1,328	1,328	-1,328	1,328	-2,657	1,328
6	-1,932	1,545	-1,932	1,545	-1,932	1,545
7	-1,388	1,736	-1,388	1,736	-2,430	1,736
8	-1,907	1,907	-1,907	1,907	-2,860	1,907
9	-1,474	1,180	-2,359	2,064	-2,359	2,064
10	-1,934	1,381	-1,934	2,210	-2,763	2,210
11	-1,565	1,565	-1,565	1,565	-2,347	2,347
12	-1,982	1,734	-1,982	1,734	-2,725	2,477
13	-1,655	1,891	-1,655	1,891	-2,364	2,600
14	-1,359	1,359	-2,038	2,038	-2,717	2,038
15	-1,742	1,524	-1,742	2,177	-2,395	2,177
16	-1,469	1,679	-2,099	1,679	-2,729	2,309
17	-1,826	1,826	-1,826	1,826	-2,434	2,434
18	-1,572	1,375	-2,161	1,965	-2,751	2,554
19	-1,907	1,526	-1,907	2,098	-2,479	2,670
20	-1,668	1,668	-2,225	-1,668	-2,781	2,225
25	-1,642	1,806	-2,134	1,806	-2,627	2,298
30	-1,638	1,489	-2,085	1,936	-2,531	2,382
40	-1,663	1,791	-2,047	1,791	-2,431	2,559
50	-1,708	1,708	-2,050	2,050	-2,733	2,392
100	-1,755	1,596	-1,995	1,835	-2,473	2,553
150	-1,689	1,624	-1,883	2,013	-2,663	2,598
200	-1,685	1,685	-2,022	2,022	-2,527	2,527
300	-1,602	1,694	-2,014	1,969	-2,564	2,518

Таблица А.28. Мощность критерия (нормированного) числа серий знаков первых разностей относительно гипотез $H_1 - H_3$ (наличия линейного тренда)

n	α	H_1	H_2	H_3
10	0.100	0.175	0.229	0.151
	0.050	0.036	0.169	0.051
	0.025	0.036	0.037	0.051
	0.010	0.028	0.037	0.022
25	0.100	0.085	0.027	0.086
	0.050	0.064	0.170	0.060
	0.025	0.025	0.085	0.026
	0.010	0.018	0.064	0.017
50	0.100	0.091	0.025	0.091
	0.050	0.042	0.018	0.041
	0.025	0.034	0.178	0.033
	0.010	0.014	0.091	0.013
100	0.100	0.100	0.042	0.100
	0.050	0.060	0.033	0.060
	0.025	0.023	0.013	0.023
	0.010	0.012	0.159	0.012
200	0.100	0.131	0.100	
	0.050	0.093	0.060	
	0.025	0.044	0.023	
	0.010	0.029	0.012	
300	0.100	0.011	0.131	
	0.050	0.151	0.093	
	0.025	0.099	0.044	
	0.010	0.047	0.029	

Таблица А.29. Мощность критерия (нормированного) числа серий знаков первых разностей относительно гипотез $H_4 - H_7$, (наличия периодического тренда)

n	α	H_4	H_5	H_6	H_7
10	0.150	0.229	0.244	0.284	0.444
	0.100	0,167	0.194	0.247	0.432
	0.050	0,038	0.032	0.023	0.007
	0.025	0,038	0.032	0.023	0.007
	0.010	0,027	0.025	0.018	0.006
25	0.150	0.169	0.167	0.161	0.216
	0.100	0,085	0.087	0.096	0.187
	0.050	0,063	0.062	0.059	0.096
	0.025	0,025	0.026	0.031	0.086
	0.010	0,018	0.018	0.017	0.037
50	0.150	0.177	0.177	0.178	0.212
	0.100	0,091	0.091	0.092	0.122
	0.050	0,042	0.042	0.042	0.061
	0.025	0,033	0.033	0.031	0.038
	0.010	0,014	0.013	0.012	0.015
100	0.150	0.159	0.158	0.156	0.157
	0.100	0.100	0.099	0.098	0.098
	0.050	0.060	0.059	0.058	0.059
	0.025	0.023	0.023	0.023	0.026
	0.010	0.012	0.012	0.012	0.014
200	0.150	0.131	0.130	0.130	0.131
	0.100	0.093	0.093	0.092	0.093
	0.050	0.044	0.043	0.043	0.043
	0.025	0.029	0.029	0.028	0.029
	0.010	0.011	0.011	0.011	0.011

Продолжение таблиты А.29

300	0.150	0.151	0.151	0.150	0.150
	0.100	0.099	0.099	0.099	0.100
	0.050	0.047	0.047	0.047	0.047
	0.025	0.024	0.024	0.024	0.024
	0.010	0.011	0.011	0.011	0.011

Таблица А.30. Мощность критерия Фостера–Стюарта со статистикой для тренда в дисперсиях относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ о изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.150	0.138	0.154	0.171	0.268	0.418
	0.100	0.138	0.154	0.171	0.268	0.418
	0.050	0.138	0.154	0.171	0.268	0.418
	0.025	0.027	0.033	0.039	0.078	0.153
	0.010	0.027	0.033	0.039	0.078	0.153
20	0.150	0.145	0.163	0.185	0.321	0.513
	0.100	0.146	0.163	0.185	0.321	0.513
	0.050	0.044	0.055	0.068	0.151	0.295
	0.025	0.044	0.055	0.068	0.151	0.295
	0.010	0.011	0.016	0.021	0.057	0.137
30	0.150	0.139	0.168	0.200	0.383	0.596
	0.100	0.139	0.168	0.200	0.383	0.596
	0.050	0.067	0.080	0.097	0.215	0.400
	0.025	0.020	0.027	0.036	0.103	0.232
	0.010	0.020	0.027	0.036	0.103	0.232
50	0.150	0.189	0.226	0.270	0.504	0.717
	0.100	0.106	0.126	0.154	0.336	0.556
	0.050	0.085	0.127	0.144	0.335	0.556
	0.025	0.040	0.053	0.071	0.198	0.390
	0.010	0.014	0.021	0.030	0.104	0.246
100	0.150	0.174	0.216	0.268	0.542	0.754
	0.100	0.106	0.130	0.165	0.394	0.625
	0.050	0.085	0.117	0.157	0.394	0.625
	0.025	0.045	0.062	0.087	0.263	0.484
	0.010	0.018	0.028	0.043	0.161	0.347
150	0.150	0.195	0.237	0.294	0.589	0.717
	0.100	0.099	0.134	0.180	0.448	0.556
	0.050	0.058	0.078	0.107	0.319	0.556
	0.025	0.047	0.071	0.104	0.319	0.390
	0.010	0.021	0.035	0.055	0.211	0.246
200	0.150	0.161	0.208	0.269	0.578	0.785
	0.100	0.161	0.208	0.269	0.578	0.785
	0.050	0.083	0.120	0.168	0.446	0.679
	0.025	0.041	0.065	0.099	0.322	0.559
	0.010	0.021	0.034	0.054	0.218	0.436
300	0.150	0.178	0.226	0.293	0.619	0.816
	0.100	0.152	0.211	0.285	0.619	0.816
	0.050	0.084	0.129	0.187	0.495	0.724
	0.025	0.048	0.076	0.116	0.374	0.616
	0.010	0.012	0.021	0.036	0.179	0.387

Таблица А.31. Мощность критерия Фостера–Стюарта со статистикой относительно гипотез $H_{13} - H_{15}$
о наличии линейного, периодического и смешанного тренда в дисперсии

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.150	0.204	0.142	0.157
	0.100	0.204	0.142	0.157
	0.050	0.204	0.142	0.157
	0.025	0.052	0.008	0.028
	0.010	0.052	0.008	0.028
25	0.150	0.386	0.139	0.158
	0.100	0.207	0.112	0.081
	0.050	0.205	0.026	0.054
	0.025	0.090	0.016	0.020
	0.010	0.033	0.013	0.008
50	0.150	0.432	0.104	0.126
	0.100	0.272	0.087	0.065
	0.050	0.270	0.022	0.049
	0.025	0.149	0.016	0.020
	0.010	0.073	0.001	0.006
100	0.150	0.490	0.078	0.141
	0.100	0.342	0.059	0.072
	0.050	0.341	0.020	0.065
	0.025	0.218	0.013	0.029
	0.010	0.128	0.002	0.011
200	0.150	0.551	0.072	0.198
	0.100	0.551	0.072	0.198
	0.050	0.416	0.025	0.110
	0.025	0.294	0.008	0.055
	0.010	0.193	0.003	0.026
300	0.150	0.609	0.098	0.269
	0.100	0.609	0.076	0.266
	0.050	0.482	0.034	0.164
	0.025	0.359	0.016	0.093
	0.010	0.166	0.002	0.023
500	0.150	0.700	0.131	0.400
	0.100	0.588	0.075	0.278
	0.050	0.470	0.036	0.180
	0.025	0.357	0.016	0.108
	0.010	0.257	0.007	0.061

Таблица А.32. Мощность критерия Хсу с Н-статистикой относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ о изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.150	0.154	0.164	0.180	0.313	0.582
	0.100	0.103	0.111	0.123	0.231	0.473
	0.050	0.052	0.056	0.064	0.134	0.316
	0.025	0.026	0.029	0.033	0.076	0.204
	0.010	0.011	0.012	0.014	0.035	0.111
20	0.150	0.160	0.189	0.232	0.549	0.905
	0.100	0.108	0.131	0.166	0.451	0.845
	0.050	0.055	0.070	0.093	0.309	0.717
	0.025	0.028	0.037	0.051	0.202	0.574
	0.010	0.011	0.016	0.023	0.110	0.400

Продолжение таблиты А.32

30	0.150	0.167	0.215	0.285	0.719	0.984
	0.100	0.114	0.153	0.213	0.633	0.967
	0.050	0.059	0.085	0.126	0.487	0.917
	0.025	0.031	0.047	0.074	0.360	0.839
	0.010	0.013	0.021	0.036	0.228	0.704
50	0.150	0.182	0.265	0.383	0.903	1.000
	0.100	0.126	0.198	0.303	0.857	0.999
	0.050	0.067	0.118	0.197	0.757	0.997
	0.025	0.036	0.069	0.125	0.644	0.989
	0.010	0.015	0.033	0.066	0.490	0.964
100	0.150	0.216	0.383	0.585	0.995	1.000
	0.100	0.156	0.304	0.500	0.991	1.000
	0.050	0.088	0.200	0.371	0.977	1.000
	0.025	0.049	0.128	0.266	0.953	1.000
	0.010	0.023	0.069	0.164	0.901	1.000
150	0.150	0.249	0.484	0.728	1.000	1.000
	0.100	0.184	0.400	0.652	1.000	1.000
	0.050	0.110	0.282	0.526	0.998	1.000
	0.025	0.064	0.194	0.410	0.996	1.000
	0.010	0.031	0.114	0.282	0.988	1.000
200	0.150	0.283	0.573	0.825	1.000	1.000
	0.100	0.214	0.490	0.766	1.000	1.000
	0.050	0.132	0.366	0.657	1.000	1.000
	0.025	0.080	0.263	0.544	1.000	1.000
	0.010	0.040	0.164	0.406	0.999	1.000
300	0.150	0.345	0.711	0.931	1.000	1.000
	0.100	0.271	0.637	0.900	1.000	1.000
	0.050	0.175	0.513	0.835	1.000	1.000
	0.025	0.111	0.399	0.756	1.000	1.000
	0.010	0.059	0.274	0.641	1.000	1.000

Таблица А.33. Мощность критерия Хсу Н со статистикой относительно гипотез $H_{13}-H_{15}$

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.150	0.226	0.273	0.182
	0.100	0.164	0.220	0.132
	0.050	0.092	0.152	0.077
	0.025	0.051	0.104	0.045
	0.010	0.024	0.062	0.023
25	0.150	0.404	0.406	0.182
	0.100	0.323	0.344	0.126
	0.050	0.217	0.257	0.069
	0.025	0.141	0.191	0.038
	0.010	0.077	0.127	0.018
50	0.150	0.635	0.571	0.196
	0.100	0.554	0.504	0.137
	0.050	0.426	0.403	0.074
	0.025	0.316	0.319	0.039
	0.010	0.205	0.232	0.017
100	0.150	0.879	0.779	0.227
	0.100	0.831	0.725	0.164
	0.050	0.738	0.631	0.093
	0.025	0.635	0.541	0.051
	0.010	0.498	0.435	0.023

Продолжение таблиты А.33

200	0.150	0.990	0.946	0.288
	0.100	0.982	0.924	0.218
	0.050	0.962	0.877	0.132
	0.025	0.932	0.822	0.080
	0.010	0.874	0.741	0.039
300	0.150	0.999	0.988	0.344
	0.100	0.999	0.981	0.269
	0.050	0.996	0.964	0.174
	0.025	0.991	0.940	0.111
	0.010	0.978	0.898	0.058
500	0.150	1.000	0.999	0.443
	0.100	1.000	0.999	0.364
	0.050	1.000	0.998	0.254
	0.025	1.000	0.995	0.174
	0.010	1.000	0.989	0.102

Таблица А.34. Мощность критерия Хсу с G-статистикой относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ о изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.150	0.153	0.163	0.178	0.305	0.566
	0.100	0.103	0.111	0.123	0.227	0.467
	0.050	0.052	0.056	0.064	0.133	0.321
	0.025	0.026	0.029	0.033	0.076	0.216
	0.010	0.010	0.012	0.014	0.036	0.122
20	0.150	0.159	0.184	0.222	0.497	0.815
	0.100	0.107	0.127	0.158	0.400	0.735
	0.050	0.055	0.068	0.088	0.268	0.594
	0.025	0.028	0.036	0.048	0.172	0.461
	0.010	0.011	0.015	0.020	0.090	0.307
30	0.150	0.165	0.206	0.266	0.640	0.909
	0.100	0.112	0.146	0.196	0.545	0.854
	0.050	0.058	0.080	0.114	0.396	0.743
	0.025	0.030	0.043	0.065	0.274	0.620
	0.010	0.012	0.019	0.030	0.159	0.465
50	0.150	0.178	0.249	0.349	0.817	0.972
	0.100	0.122	0.183	0.270	0.740	0.946
	0.050	0.064	0.105	0.168	0.597	0.881
	0.025	0.034	0.059	0.100	0.458	0.794
	0.010	0.014	0.027	0.050	0.306	0.663
100	0.150	0.208	0.350	0.524	0.964	0.997
	0.100	0.147	0.269	0.430	0.933	0.993
	0.050	0.080	0.167	0.296	0.854	0.975
	0.025	0.044	0.107	0.195	0.750	0.941
	0.010	0.020	0.050	0.108	0.596	0.871
150	0.150	0.235	0.436	0.653	0.991	1.000
	0.100	0.171	0.347	0.560	0.980	0.999
	0.050	0.097	0.229	0.412	0.942	0.993
	0.025	0.055	0.145	0.291	0.880	0.980
	0.010	0.025	0.077	0.174	0.766	0.943
200	0.150	0.263	0.513	0.748	0.997	1.000
	0.100	0.195	0.422	0.664	0.993	1.000
	0.050	0.114	0.290	0.517	0.976	0.998
	0.025	0.065	0.192	0.382	0.940	0.992
	0.010	0.031	0.108	0.245	0.862	0.974

Продолжение таблиты А.34

300	0.150	0.317	0.639	0.869	1.000	1.000
	0.100	0.240	0.547	0.805	0.999	0.999
	0.050	0.146	0.401	0.676	0.995	0.998
	0.025	0.088	0.282	0.541	0.982	0.997
	0.010	0.043	0.167	0.376	0.946	0.994

Таблица А.35. Мощность критерия Хсу G со статистикой относительно гипотез $H_{13} - H_{15}$ о наличии линейного, периодического и смешанного тренда в дисперсии

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.150	0.227	0.264	0.177
	0.100	0.163	0.204	0.125
	0.050	0.091	0.130	0.069
	0.025	0.051	0.081	0.038
	0.010	0.022	0.043	0.017
25	0.150	0.401	0.391	0.152
	0.100	0.319	0.321	0.104
	0.050	0.210	0.224	0.055
	0.025	0.133	0.150	0.029
	0.010	0.070	0.084	0.013
50	0.150	0.627	0.512	0.128
	0.100	0.542	0.436	0.084
	0.050	0.408	0.323	0.043
	0.025	0.296	0.229	0.022
	0.010	0.183	0.136	0.009
100	0.150	0.867	0.639	0.098
	0.100	0.813	0.558	0.063
	0.050	0.705	0.434	0.030
	0.025	0.588	0.325	0.015
	0.010	0.435	0.208	0.006
200	0.150	0.985	0.761	0.068
	0.100	0.973	0.678	0.040
	0.050	0.938	0.542	0.017
	0.025	0.885	0.423	0.008
	0.010	0.787	0.290	0.003
300	0.150	0.998	0.826	0.050
	0.100	0.996	0.743	0.028
	0.050	0.988	0.605	0.011
	0.025	0.970	0.481	0.005
	0.010	0.925	0.337	0.002
500	0.150	1.000	0.897	0.030
	0.100	1.000	0.821	0.015
	0.050	0.999	0.682	0.005
	0.025	0.997	0.550	0.002
	0.010	0.989	0.398	0.001

Таблица А.36. Мощность критерия с метками Клотца относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ о изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.150	0.153	0.161	0.174	0.274	0.472
	0.100	0.102	0.109	0.119	0.200	0.369
	0.050	0.052	0.056	0.062	0.113	0.231
	0.025	0.026	0.028	0.032	0.062	0.135
	0.010	0.011	0.012	0.013	0.028	0.067
20	0.150	0.159	0.182	0.219	0.480	0.827
	0.100	0.107	0.127	0.156	0.387	0.753
	0.050	0.054	0.067	0.086	0.257	0.606
	0.025	0.028	0.035	0.047	0.163	0.458
	0.010	0.011	0.015	0.021	0.086	0.293
30	0.150	0.165	0.206	0.265	0.648	0.956
	0.100	0.112	0.146	0.198	0.559	0.927
	0.050	0.058	0.081	0.116	0.415	0.852
	0.025	0.030	0.044	0.066	0.292	0.747
	0.010	0.012	0.019	0.031	0.173	0.584
50	0.150	0.178	0.253	0.357	0.857	0.998
	0.100	0.123	0.186	0.279	0.798	0.996
	0.050	0.065	0.109	0.179	0.681	0.988
	0.025	0.034	0.063	0.110	0.558	0.971
	0.010	0.015	0.029	0.056	0.400	0.924
100	0.150	0.211	0.365	0.555	0.990	1.000
	0.100	0.151	0.287	0.469	0.982	1.000
	0.050	0.085	0.186	0.342	0.958	1.000
	0.025	0.047	0.118	0.241	0.920	1.000
	0.010	0.022	0.063	0.146	0.844	1.000
150	0.150	0.243	0.466	0.701	0.999	1.000
	0.100	0.179	0.382	0.623	0.999	1.000
	0.050	0.105	0.264	0.493	0.996	1.000
	0.025	0.061	0.178	0.376	0.991	1.000
	0.010	0.029	0.102	0.250	0.975	1.000
200	0.150	0.276	0.555	0.805	1.000	1.000
	0.100	0.208	0.471	0.741	1.000	1.000
	0.050	0.127	0.346	0.626	1.000	1.000
	0.025	0.076	0.245	0.508	0.999	1.000
	0.010	0.037	0.150	0.369	0.997	1.000
300	0.150	0.338	0.696	0.921	1.000	1.000
	0.100	0.263	0.618	0.887	1.000	1.000
	0.050	0.169	0.491	0.817	1.000	1.000
	0.025	0.107	0.378	0.737	1.000	1.000
	0.010	0.057	0.258	0.620	1.000	1.000

Таблица А.37. Мощность критерия Клотца со статистикой
относительно гипотез $H_{13} - H_{15}$
о наличии линейного, периодического и смешанного тренда в дисперсии

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.150	0.202	0.149	0.146
	0.100	0.143	0.096	0.094
	0.050	0.078	0.047	0.045
	0.025	0.041	0.025	0.021
	0.010	0.018	0.009	0.008
25	0.150	0.363	0.290	0.143
	0.100	0.283	0.214	0.094
	0.050	0.179	0.125	0.045
	0.025	0.111	0.073	0.022
	0.010	0.056	0.034	0.008
50	0.150	0.593	0.492	0.143
	0.100	0.505	0.397	0.093
	0.050	0.374	0.265	0.045
	0.025	0.266	0.171	0.021
	0.010	0.162	0.093	0.008
100	0.150	0.857	0.764	0.159
	0.100	0.802	0.682	0.107
	0.050	0.697	0.540	0.053
	0.025	0.585	0.410	0.026
	0.010	0.443	0.268	0.010
200	0.150	0.987	0.959	0.203
	0.100	0.977	0.932	0.141
	0.050	0.953	0.866	0.074
	0.025	0.915	0.779	0.038
	0.010	0.847	0.646	0.016
300	0.150	0.999	0.994	0.241
	0.100	0.998	0.989	0.178
	0.050	0.995	0.971	0.099
	0.025	0.988	0.938	0.054
	0.010	0.971	0.871	0.023
500	0.150	1.000	1.000	0.338
	0.100	1.000	1.000	0.256
	0.050	1.000	0.999	0.154
	0.025	1.000	0.997	0.091
	0.010	1.000	0.991	0.042

Таблица А.38. Мощность критерия с метками Сэвиджа относительно гипотез $H_8 - H_{12}$ о изменении дисперсии скачком

n	α	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}
10	0.150	0.150	0.151	0.152	0.161	0.181
	0.100	0.100	0.101	0.102	0.109	0.126
	0.050	0.050	0.051	0.051	0.056	0.067
	0.025	0.025	0.025	0.025	0.028	0.036
	0.010	0.010	0.010	0.010	0.012	0.016
20	0.150	0.151	0.153	0.157	0.185	0.238
	0.100	0.100	0.103	0.105	0.127	0.170
	0.050	0.050	0.051	0.054	0.066	0.094
	0.025	0.025	0.026	0.026	0.034	0.050
	0.010	0.010	0.010	0.011	0.014	0.012
30	0.150	0.152	0.157	0.164	0.218	0.307
	0.100	0.101	0.105	0.110	0.154	0.229
	0.050	0.051	0.053	0.056	0.084	0.135
	0.025	0.026	0.026	0.029	0.044	0.077
	0.010	0.010	0.011	0.012	0.019	0.036
50	0.150	0.154	0.164	0.180	0.289	0.442
	0.100	0.103	0.111	0.124	0.213	0.351
	0.050	0.052	0.057	0.064	0.124	0.229
	0.025	0.026	0.029	0.033	0.070	0.143
	0.010	0.010	0.013	0.014	0.032	0.074
100	0.150	0.160	0.185	0.222	0.453	0.696
	0.100	0.110	0.129	0.159	0.364	0.610
	0.050	0.055	0.068	0.089	0.242	0.468
	0.025	0.028	0.036	0.049	0.156	0.345
	0.010	0.012	0.016	0.023	0.084	0.220
150	0.150	0.165	0.206	0.264	0.590	0.844
	0.100	0.112	0.146	0.195	0.499	0.782
	0.050	0.058	0.081	0.115	0.362	0.663
	0.025	0.030	0.044	0.067	0.253	0.540
	0.010	0.012	0.019	0.031	0.149	0.388
200	0.150	0.172	0.229	0.307	0.700	0.925
	0.100	0.118	0.165	0.234	0.618	0.886
	0.050	0.061	0.094	0.143	0.479	0.801
	0.025	0.032	0.053	0.085	0.356	0.700
	0.010	0.014	0.024	0.042	0.230	0.558
300	0.150	0.183	0.269	0.384	0.842	0.983
	0.100	0.127	0.201	0. 324	0.781	0.969
	0.050	0.069	0.121	0.219	0.667	0.943
	0.025	0.037	0.071	0.114	0.549	0.909
	0.010	0.016	0.035	0.080	0.402	0.849

Таблица А.39. Мощность критерия Сэвиджа относительно гипотез $H_{13} - H_{15}$ о наличии линейного, периодического и смешанного тренда в дисперсии

n	α	H_{13}	H_{14}	H_{15}
10	0.150	0.154	0.166	0.161
	0.100	0.103	0.113	0.109
	0.050	0.051	0.058	0.057
	0.025	0.025	0.029	0.030
	0.010	0.010	0.011	0.012
25	0.150	0.175	0.173	0.153
	0.100	0.119	0.119	0.102
	0.050	0.062	0.063	0.052
	0.025	0.032	0.033	0.026
	0.010	0.013	0.014	0.011
50	0.150	0.222	0.201	0.147
	0.100	0.158	0.142	0.097
	0.050	0.088	0.079	0.048
	0.025	0.048	0.044	0.024
	0.010	0.020	0.020	0.009
100	0.150	0.320	0.267	0.147
	0.100	0.244	0.199	0.097
	0.050	0.150	0.119	0.048
	0.025	0.090	0.070	0.024
	0.010	0.044	0.034	0.009
200	0.150	0.493	0.390	0.151
	0.100	0.406	0.309	0.101
	0.050	0.284	0.205	0.0502
	0.025	0.191	0.132	0.025
	0.010	0.109	0.072	0.010
300	0.150	0.631	0.499	0.159
	0.100	0.547	0.413	0.107
	0.050	0.415	0.291	0.054
	0.025	0.305	0.199	0.027
	0.010	0.193	0.116	0.011
500	0.150	0.814	0.668	0.175
	0.100	0.750	0.587	0.120
	0.050	0.635	0.457	0.063
	0.025	0.521	0.345	0.033
	0.010	0.381	0.228	0.014

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014661513

Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистика 5.2"

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Лемешко Борис Юрьевич (RU), Постовалов Сергей Николаевич (RU), Лемешко Станислав Борисович (RU), Веретельникова Ирина Викторовна (RU)***

Заявка № **2014617192**

Дата поступления **22 июля 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***30 октября 2014 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015663326

Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистика 5.3"

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Лемешко Борис Юрьевич (RU), Лемешко Станислав Борисович (RU), Блинов Павел Юрьевич (RU), Веретельникова Ирина Викторовна (RU)***

Заявка № **2015617223**

Дата поступления **05 августа 2015 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***15 декабря 2015 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

241

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018666213

Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин «Интервальная статистика 5.4»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Лемешко Борис Юрьевич (RU), Лемешко Станислав Борисович (RU), Блинов Павел Юрьевич (RU), Веретельникова Ирина Викторовна (RU), Новикова Алена Юрьевна (RU)***

Заявка № **2018663206**

Дата поступления **22 ноября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***13 декабря 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Акты о внедрении результатов диссертационной работы

УТВЕРЖДАЮ

Директор УНИИМ

____________ Медведевских С.В.

____________ 2018 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационных исследований

Результаты диссертационных исследований Веретельниковой Ирины Викторовны, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение, реализующее совокупность критериев проверки статистических гипотез о случайности и отсутствия тренда, а также критериев проверки однородности законов, включая вновь предложенные, представляющее собой составные части программной системы “Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин (ISW)”, разработанной Новосибирским государственным техническим университетом под руководством д.т.н., профессора Б.Ю. Лемешко, используются Уральским научно-исследовательским институтом метрологии при статистическом анализе результатов измерений, связанных с оценкой метрологических характеристик методик измерений, а также другими задачами метрологического обеспечения, менеджмента качества и метрологического контроля.

Зам. заведующего лабораторией
метрологического обеспечения наноиндустрии,
спектральных методов анализа и СО — П.В. Мигаль

Зам. директора по инновациям — Е.П. Собина

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ
РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ
РОССТАНДАРТ

ВНИИМ
1842

**Федеральное государственное
унитарное предприятие «Всероссийский
научно-исследовательский институт
метрологии им. Д.И.Менделеева»**

ФГУП «ВНИИМ им. Д.И.Менделеева»

190005, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 19
Тел.: (812) 251-76-01, факс: (812) 713-01-14
e-mail: info@vniim.ru, http://www.vniim.ru
ОКПО 02566450, ОГРН 1027810219007
ИНН/КПП 7809022120/783901001

00065925

20.09.2018 № 202-12730

на № ________________ от ______________

УТВЕРЖДАЮ

И.о. директора ФГУП
«ВНИИМ им. Д.И. Менделеева»

_____________ А.Н. Пронин

«___» ___________ 2018 г.

Зам. директора
Чекирда К.В.
Дов. №18 от 03.10.2017

АКТ

об использовании результатов диссертационных исследований

Результаты диссертационных исследований Веретельниковой Ирины Викторовны, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение, реализующее совокупность критериев проверки статистических гипотез о случайности и отсутствия тренда, а также критериев проверки однородности законов, включая вновь предложенные, представляющее собой составные части программной системы “Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин (ISW)”, разработанной Новосибирским государственным техническим университетом под руководством д.т.н., профессора Б.Ю. Лемешко, используются Всероссийским научно-исследовательским институтом метрологии имени Д.И. Менделеева при статистическом анализе результатов измерений, при анализе результатов сличений эталонов, при аттестации методик измерений и валидации методик калибровок эталонов.

Руководитель метрологического отдела,
Д.т.н. А.Г. Чуновкина

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе НГТУ

д.т.н., доцент

_____________ Брованов С.В.

«___» _____________ 2018 г.

АКТ О ВНЕДРЕНИИ

результатов диссертационной работы Веретельниковой И.В.
в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики

Результаты диссертационной работы Веретельниковой Ирины Викторовны, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение внедрены в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики (ФПМИ) ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет» и используются при изучении дисциплин «История и методология прикладной математики и информатики» и «Компьютерные технологии анализа данных и статистических закономерностей» по направлению 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» в рамках магистерской программы «Математическое моделирование детерминированных и стохастических процессов». Освоение магистрантами соответствующих разделов дисциплин способствует приобретению необходимых знаний и умений для применения на практике аппарата проверки статистических гипотез об однородности и отсутствии тренда в наблюдаемых последовательностях результатов измерений.

Декан ФПМИ,
д.т.н., доцент — Тимофеев В.С.

Заведующий кафедрой ТПИ,
д.т.н., доцент — Чубич В.М.