

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Новосибирский государственный технический университет»

*На правах рукописи*



Четвертакова Евгения Сергеевна

**Разработка математического и алгоритмического обеспечения  
проверки статистических гипотез о деградиционных моделях  
надежности**

Специальность 05.13.17 – «Теоретические основы информатики»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, доцент

Чимитова Екатерина Владимировна

Новосибирск – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1 ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕГРАДАЦИОННЫХ ГАММА-И ВИНЕРОВСКОЙ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ</b> .....	14
1.1    Деградационные модели надежности .....	14
1.1.1    Деградационная гамма-модель .....	19
1.1.2    Винеровская деградационная модель .....	21
1.2    Представление данных и оценивание параметров моделей .....	23
1.2.1    Исследование статистических свойств оценок параметров деградационных гамма- и винеровских моделей .....	27
1.3    Постановка задачи проверки гипотезы о виде модели.....	35
1.4    Методика статистического моделирования при исследовании распределений статистик .....	38
Выводы по главе 1 .....	40
<b>ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ЗНАЧИМОСТИ ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОГО ПАРАМЕТРА ДЕГРАДАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ</b> .....	41
2.1    Исследование влияния величины дисперсии случайного параметра на точность ОМП параметров деградационных моделей.....	41
2.2    Проверка гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной модели.....	45
2.3    Исследование мощности предложенных критериев проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной модели .....	50
Выводы по главе 2 .....	55

<b>ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК И МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ВИДЕ ДЕГРАДАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ .....</b>	<b>56</b>
3.1 Непараметрические критерии согласия .....	56
3.2 Исследование распределений статистик непараметрических критериев согласия для деградационных моделей.....	58
3.3 Сравнительный анализ мощности критериев согласия для деградационных моделей .....	68
Выводы по главе 3 .....	73
<b>ГЛАВА 4 ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ</b>	<b>74</b>
4.1 Описание разработанного программного обеспечения.....	74
4.2 Построение деградационной гамма-модели для арсенид-галлиевых лазеров.....	80
4.3 Построение деградационной гамма-модели для углеродистых резисторов.....	85
4.4 Построение винеровской деградационной модели для турбовентиляторных двигателей.....	88
Выводы по главе 4 .....	92
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>93</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>95</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы данных для анализа .....</b>	<b>110</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б Акт о внедрении результатов диссертационной работы.....</b>	<b>112</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ .....</b>	<b>113</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Современное состояние и актуальность темы исследования.**

В настоящее время, наблюдается бурное развитие новых технологий, промышленность выпускает сложные, высоконадежные и дорогостоящие изделия, и, вместе с тем, ужесточаются требования к технической документации на продукцию, где отмечаются основные характеристики надежности. Необходимость анализа качества, эффективности использования выпускаемых изделий и их способности безотказно осуществлять свои функции привело к интенсивному развитию математических методов, с помощью которых можно выявить закономерности появления отказов устройств и оценить показатели надежности. Большой вклад в развитие математического аппарата теории надежности внесли Б.В. Гнеденко, И.А. Ушаков, Ю.К. Беляев, В.В. Рыков, М.С. Никулин, А.В. Антонов, V. Bagdonavicius, N. Balakrishnan, D.R. Cox, W. Nelson, W. Meeker, J.F. Lawless, M. Crowder, G.A. Whitmore и другие.

Как правило, для построения вероятностной модели распределения наработок до отказа и оценки показателей надежности проводят специальным образом организованные испытания. Однако в случае, когда речь идет о высоконадежных изделиях, данных только об отказах таких изделий для оценки функции надежности может быть недостаточно, поскольку в период проведения эксперимента наступление отказов наблюдается крайне редко, что сильно ограничивает точность любых прогнозов.

Существует два возможных способа получить дополнительную информацию о надежности изделий: первый заключается в проведении ускоренных испытаний, когда изделия подвергаются повышенным нагрузкам, в результате чего отказы наступают раньше; второй способ состоит в измерении значений некоторого показателя, характеризующего процесс старения (деградации) изделия. При этом момент времени, когда

значение деградационного показателя достигает критического уровня, считается временем наступления отказа [75].

Зачастую сроки разработки систем являются ограниченными, что, в свою очередь, накладывает жесткие ограничения на возможную продолжительность испытаний на надежность при использовании методики ускоренных испытаний [25, 95]. Поэтому такой подход требует достаточно большой выборки объектов, каждый из которых будет подвергнут высоким нагрузкам и, возможно, выведен из строя. При использовании второго подхода в ходе эксперимента фиксируются значения показателя деградации объекта с некоторым интервалом времени до момента отказа, а затем все данные о деградации используются для получения оценки надежности. Оба этих подхода можно совместить, наблюдая процессы деградации и наступление отказов изделий, эксплуатирующихся при повышенных нагрузках. В качестве нагрузок могут выступать температура, давление, напряжение, механические нагрузки и другие [52, 64]. В связи с этим, вероятностную модель надежности, построенную на основе данных об изменении деградационного показателя, принято называть деградационной моделью или моделью деградации. В случае, когда принимается во внимание влияние повышенных нагрузок, так называемых объясняющих переменных или ковариат, построенная модель называется деградационной моделью с учетом влияния объясняющих переменных [28, 29, 37, 45].

**Степень разработанности темы исследования.** Существует множество различных типов деградационных моделей в зависимости от сделанных предположений о виде модели: выбора базового распределения приращений показателя деградации [32, 42, 53], параметров заданного распределения [41, 60], выбранной функции тренда показателя деградации [41] и функции влияния объясняющих переменных [27]. Например, в [17, 31, 39, 40, 61] авторы определили в качестве распределения приращений показателя деградации обратное гауссовское распределение. Работа [38]

посвящена анализу деградационных моделей, построенных с использованием линейной функции тренда показателя деградации.

Широкую распространенность в задачах анализа реальных данных получили деградационные гамма- и винеровская модели [3, 16, 23, 30, 33, 34, 46]. Например, в [66] с использованием гамма-модели исследуется износ автомобильных шин в зависимости от различных стрессовых факторов. На примере анализа надежности арсенид-галлиевых лазеров сравнивается эффективность деградационных гамма- и винеровской модели в [49]. На основе винеровской деградационной модели в [20] проводится исследование надежности реакционных колес, используемых для обеспечения работы космических спутников. Особое преимущество данные модели имеют благодаря тому, что гамма- и нормальное распределения обладают свойством устойчивости относительно суммирования (воспроизводимость по параметру) [70], за счет чего можно легко определить распределение исследуемой случайной величины – показателя деградации в некоторый момент времени, а затем оценить требуемую вероятность безотказной работы. Способам построения деградационных моделей на основе гамма-распределения посвящены работы А. Антонова, М. Никулина, V. Bagdonavicius, C. Zhang и др. В [2, 35, 66] представлена деградационная гамма-модель с параметром формы гамма-распределения, зависящим от функции тренда показателя деградации. Методы оценивания параметров деградационной гамма-модели обсуждаются в [62, 65].

Вопросы, связанные с построением винеровской деградационной модели, обсуждаются в работах С.-С. Tsai, N. Balakrishnan, С. Боровикова, А. Шалака и др. Например, метод оценки параметров винеровской деградационной модели, а также получения оценки надежности рассмотрен в [47, 58, 59, 72]. В [56] решаются проблемы оптимального планирования эксперимента на основе винеровской деградационной модели. Работа [51] посвящена рассмотрению нелинейных альтернатив функции тренда

показателя деградации, используемых при построении винеровских моделей.

Для описания разброса значений показателя деградации от объекта к объекту в зарубежной литературе используют так называемые модели со случайным эффектом (с англ. «random-effect model») [55]. Однако в отечественной литературе понятие случайного эффекта принято связывать с моделями панельных данных, где учитываются эффекты объектов и эффекты времени, при этом для учета эффектов случайных объектов оцениваются только компоненты дисперсии случайной составляющей. В случае же деградационных моделей вместо этого оцениваются параметры распределения случайного эффекта (случайного параметра модели). Поэтому во избежание терминологической путаницы в настоящей работе деградационную модель, учитывающую влияние разброса значений показателя деградации от объекта к объекту, будем называть деградационной моделью со случайным параметром.

При работе с моделью со случайным параметром необходимо принимать во внимание, что число неизвестных параметров модели будет больше по сравнению с количеством параметров для модели без случайного параметра, вследствие чего при использовании модели со случайным параметром точность оценивания параметров модели может падать. С другой же стороны, если разброс измеряемых значений от объекта к объекту довольно велик, использование модели без случайного параметра может оказаться нецелесообразным, а введение такого параметра в модель может значительно повысить точность оценивания. Моделям со случайным параметром посвящены работы С.-С. Tsai, S.-Т. Tseng, N. Balakrishnan, J. Lawless, M. Crowder [21, 50], где авторы рассматривают деградационную гамма-модель со случайным параметром масштаба, имеющим гамма-распределение. Вопросы построения винеровской деградационной модели со случайным параметром обсуждаются в [54], а исследование

статистических свойств оценок параметров винеровской модели со случайным параметром приводится в [48, 63].

Однако, несмотря на большую популярность в изучении деградиационных гамма- и винеровской моделей, основной проблемой при их использовании остается отсутствие математического аппарата для проверки статистической гипотезы о виде модели, в то время как проверка данной гипотезы является обязательным этапом построения вероятностных моделей.

**Цель и задачи исследований.** Целью настоящей работы является развитие методов прикладной математической статистики для проверки гипотез о виде деградиационных моделей. Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи:

1. Исследование статистических свойств оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметров деградиационных гамма- и винеровских моделей.

2. Разработка и исследование критериев, позволяющих определить значимость дисперсии случайного параметра деградиационной гамма- или винеровской модели.

3. Разработка алгоритма корректного применения критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для проверки сложных гипотез о виде деградиационных гамма- и винеровской моделей.

4. Разработка программного обеспечения оценивания параметров и проверки гипотез относительно деградиационных гамма- и винеровской деградиационных моделей.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач использовались методы математической статистики, теории вероятностей, математического программирования и статистического моделирования.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:



– на основе результатов исследования свойств ОМП параметров деградиционных гамма- и винеровской моделей показано, что в случае близкой к нулю дисперсии случайного параметра применение модели со случайным параметром приводит к снижению точности оценок регрессионных параметров и параметров тренда;

– впервые предложены статистические критерии, позволяющие определить значимость дисперсии случайного параметра деградиционной гамма- и винеровской моделей;

– на основе результатов исследования распределений статистик и мощности критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга разработан алгоритм проверки сложных гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей.

**Основные положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие результаты:

1. Результаты исследования статистических свойств ОМП параметров деградиционных гамма- и винеровских моделей, демонстрирующие зависимость точности оценок от величины дисперсии случайного параметра.

2. Критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградиционной гамма- и винеровской моделей.

3. Алгоритм проверки гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей с использованием критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. Применение критериев базируется на статистическом моделировании требуемых распределений статистик, осуществляемом в интерактивном режиме проводимого анализа.

4. Программное обеспечение построения и проверки гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей.

**Обоснованность и достоверность** научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования при построении деградационных моделей, исследовании свойств оценок параметров, распределений статистик и мощности критериев;

- совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

**Личный творческий вклад автора** заключается:

- в проведении исследований статистических свойств ОМП параметров деградационных гамма- и винеровской моделей;

- в разработке и исследовании критериев, позволяющих определить значимость дисперсии случайного параметра деградационных гамма- и винеровской моделей;

- в проведении исследований распределений статистик и мощности критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при проверке гипотез о виде деградационных моделей;

- в разработке программного обеспечения, реализующего построение деградационных гамма- и винеровской моделей надежности и предложенные алгоритмы проверки гипотез о виде моделей;

- в решении задач анализа реальных данных с использованием разработанных алгоритмов и программного обеспечения.

**Практическая ценность и реализация результатов.** Результаты диссертационного исследования могут использоваться при решении задач анализа надежности, в биомедицине, социологии, экономике, пищевой промышленности и других областях.

Исследования и разработка программного обеспечения проводились при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение №14.В37.21.0860 от 6 сентября 2012 г.), а также в рамках проектной части государственного задания (проекты № 2.541.2014/К и № 1.1009.2017/4.6).

Для программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS», в рамках которой были разработаны программные модули, позволяющие строить деграционные модели надежности, в частности гамма- и винеровские деграционные модели, получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016619972 (2016 г.) – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент), представленное в Приложении В.

Результаты диссертационного исследования были внедрены в практику деятельности ООО «Эко-Томск», что подтверждается соответствующим актом о внедрении.

**Соответствие диссертационной работы паспорту научной специальности.** Содержание диссертационной работы соответствует п.5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены на международном семинаре по моделированию “International Workshop on Simulation”, Вена, Австрия, 2015 г.; международной конференции “Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing”, Глазго, Шотландия, 2017 г.; международном семинаре “Applied methods of statistical analysis”, Новосибирск, 2013 г., 2015 г., 2017 г. и 2019 г.;

международном форуме “International Forum on Strategic Technology”, Новосибирск, 2016 г., международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”, Новосибирск, 2014 г., 2016 г. и 2018г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013 г., 2014 г., 2015 г. и 2016 г.; всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технологии. Инновации”, Новосибирск, 2012 г., 2014 г. и 2015 г.; конференции молодых исследователей “Progress through innovations”, Новосибирск, 2015 г.

**Публикации.** Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 24 печатных работах, в том числе 3 статья в научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК РФ, 6 статья в рецензируемых международных изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus, 14 публикация в материалах международных и российских конференций. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав основного содержания, заключения, списка литературы и 3 приложений. Основное содержание представлено на 113 страницах, включая 31 таблицу, 25 рисунков и список литературы из 112 источников.

**Краткое содержание работы.** В первой главе основной части диссертационной работы рассмотрены деграционные гамма- и винеровская модели, описан метод максимального правдоподобия для оценивания параметров деграционных моделей, а также проведен анализ статистических свойств оценок параметров моделей.

Во второй главе приведены исследования влияния величины дисперсии случайного параметра на точность оценивания параметров гамма- и винеровских деграционных моделей, предложены критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра рассмотренных

моделей, а также проведено исследование мощности предложенных критериев.

В третьей главе представлены результаты исследования распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей, приведен алгоритм проверки сложных гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, а также продемонстрированы результаты исследования мощности данных критериев относительно близких конкурирующих гипотез, соответствующих различным видам деградиционных моделей.

В четвертой главе представлено описание разработанных модулей программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» для работы с деградиционными моделями, использование данных модулей, а также результатов диссертационного исследования при решении задач анализа надежности арсенид-галлиевых лазеров, углеродистых резисторов и турбовентиляторных двигателей.

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность за постоянную поддержку и внимание к работе научному руководителю д.т.н., доценту Е.В. Чимитовой.

## **ГЛАВА 1 ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕГРАДАЦИОННЫХ ГАММА-И ВИНЕРОВСКОЙ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ**

В данной главе диссертационной работы рассмотрены вопросы построения гамма- и винеровских моделей. Представлены выражения для вычисления ОМП параметров моделей, а также проведен анализ статистических свойств ОМП параметров моделей. Обсуждаются проблемы проверки статистических гипотез о виде деградационных моделей.

### **1.1 Деградационные модели надежности**

В задачах анализа надежности для прогнозирования вероятности безотказной работы изделий в течение реальных сроков их эксплуатации используют данные об отказах тестируемых объектов. Возникновение отказов изделий может быть вызвано различными причинами: наличием производственного брака, нарушением условий эксплуатации или же просто старением материалов. Если речь идет о первых двух причинах отказов, то вероятность их возникновения можно свести к минимуму за счет доработки технологии производства и соблюдения рекомендаций по эксплуатации. Однако отказы, вызванные процессами износа материалов, исключить невозможно, поэтому задачи построения вероятностных моделей времени наработки до деградационного отказа в настоящее время вызывают все больший интерес [73].

Деградационные модели надежности применяются для решения двух видов задач:

- оценка остаточного времени безотказной работы для некоторого конкретного объекта;
- оценка распределения времен наработки до отказа для расчета основных показателей надежности совокупности однородных объектов.

Прогноз остаточного времени безотказной работы получают на основе данных о деградации одного конкретного объекта с использованием

различных подходов, таких как параметрические авторегрессионные модели, рекуррентные нейронные сети, градиентный бустинг, скрытые марковские модели и другие [57]. Для построения вероятностной модели надежности, на основе которой получают оценки показателей надежности, требуются данные о деградации по некоторой выборке объектов из исследуемой генеральной совокупности.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются деградационные модели надежности для решения второй задачи – оценивания распределения времен наработки до деградационного отказа.

*Деградационным процессом  $Z(t)$*  будем называть случайный процесс, характеризующий процесс деградации исследуемых изделий, который удовлетворяет следующим условиям:

1.  $Z(0) = 0$ ;
2.  $Z(t)$  является случайным процессом с независимыми приращениями [69];
3. математическое ожидание случайного процесса  $M(Z(t))$  – положительная возрастающая функция.

4. приращения  $\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t)$  подчиняются некоторому распределению с функцией плотности  $f(t; \theta)$ , где  $\Delta t$  – положительное приращение по времени,  $\theta$  – вектор параметров распределения.

Предполагается, что деградационный процесс наблюдается при некоторой постоянной во времени *нагрузке (ковариате)  $x$* , диапазон значений которой определяется условиями проведения эксперимента и представляет собой отрезок числовой прямой. В общем случае ковариата  $x$  представляет собой векторную величину, поскольку может учитываться влияние нескольких факторов, например температуры, напряжения, давления и прочих. Однако в настоящей работе для упрощения

математических выражений ковариата рассматривается как скалярная величина.

Влияние ковариаты  $x$  на изменение показателя деградации будем учитывать так же, как это делается в модели ускоренных испытаний [29, 89]:

$$Z_x(t) = Z\left(\frac{t}{r(x; \beta)}\right),$$

где  $r(x; \beta)$  – положительная функция,  $\beta$  – регрессионный параметр.

Существует широкое множество моделей функций от ковариат. Примерами наиболее часто используемых на практике моделей являются:

- логлинейная модель вида

$$r(x; \beta) = e^{\beta x}, \quad (1.1)$$

применяется, например, для анализа данных усталости при тестировании различных электронных компонент;

- степенная модель в форме

$$r(x; \beta) = e^{\beta \ln x}, \quad (1.2)$$

чаще используется в случаях, когда воздействием являются напряжение, механическая нагрузка;

- модель Аррениуса вида

$$r(x; \beta) = e^{\beta/x}, \quad (1.3)$$

применяется, когда в качестве нагрузки выступает, например, температура.

Обозначим математическое ожидание случайного процесса  $Z_x(t)$  через

$$M(Z_x(t)) = m_x(t),$$

где  $m_x(t)$  – положительная возрастающая функция. Будем называть ее *функцией тренда* показателя деградации. На рисунке 1.1 представлены графики основных видов функции тренда (деградационных кривых) в условных единицах деградации и времени: линейная, выпуклая, вогнутая.



Горизонтальная линия на уровне деградации, равном 10, представляет собой критическое значение  $\tilde{z}$ , при котором объект считается отказавшим [26].

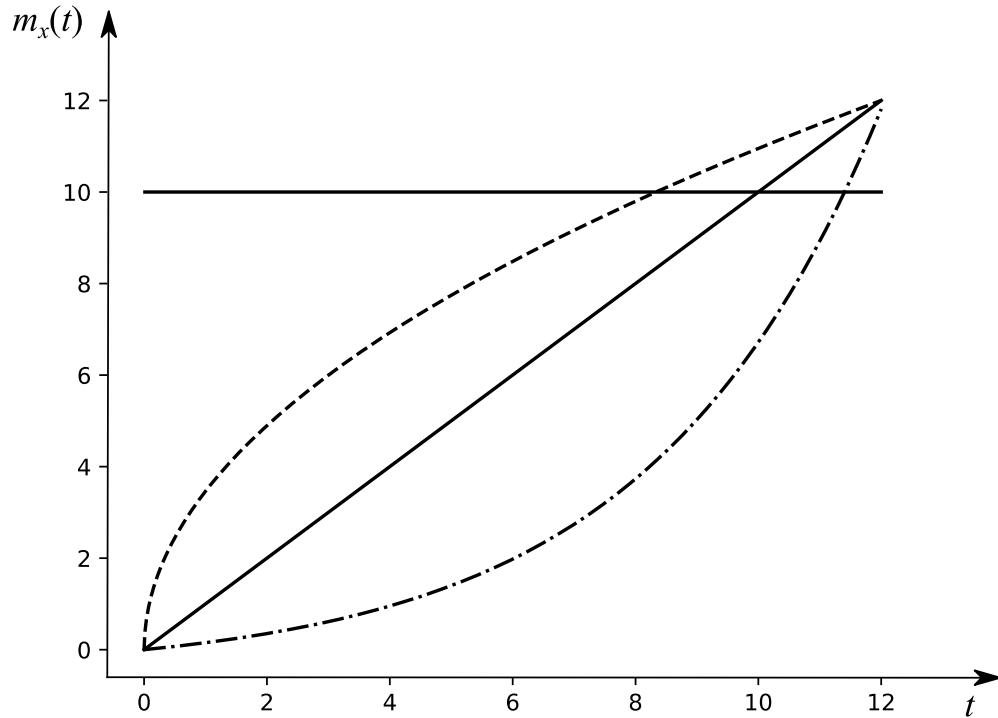


Рисунок 1.1 - Основные виды графиков функции тренда  $m_x(t)$

Таким образом, *время наработки до отказа*, которое зависит от координаты  $x$ , представляет собой случайную величину

$$T_x = \sup\{t : Z_x(t) < \tilde{z}\}.$$

Для удобства введем следующее обозначение функции тренда:

$$m_x(t) = \gamma_0 \cdot \nu_x(t), \quad (1.4)$$

где  $\nu_x(t)$  – положительная возрастающая функция.

В качестве примеров используемых на практике функций тренда можно привести:

- $m_x(t; \gamma, \beta) = \gamma_0 \frac{t}{r(x; \beta)}, \gamma_0 > 0;$  (1.5)

$$\bullet \quad m_x(t; \gamma, \beta) = \gamma_0 \left( \frac{t}{r(x; \beta)} \right)^{\gamma_1}, \quad \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0; \quad (1.6)$$

$$\bullet \quad m_x(t; \gamma, \beta) = \gamma_0 \left( e^{\frac{\gamma_1 t}{r(x; \beta)}} - 1 \right), \quad \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0. \quad (1.7)$$

*Функцией надежности* называется вероятность безотказной работы за время  $t$ :

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\},$$

где  $\tilde{z}$  – критическое значение показателя деградации, при достижении которого фиксируется отказ объекта [101].

Существует множество различных типов деградационных моделей в зависимости от сделанных предположений о виде модели: выбора базового распределения приращений показателя деградации [32, 42, 53], параметров заданного распределения [41, 60], выбранной функции тренда показателя деградации [41] и функции влияния объясняющих переменных [27]. Например, в [38] авторы определили в качестве функции тренда линейную функцию, а в [49] функция Аррениуса была рассмотрена как функция влияния объясняющих переменных.

В работах [17, 40, 61] авторы рассмотрели в качестве распределения приращений обратное гауссовское распределение, а в работе [24] – распределение Коши. Работы [20, 46, 47, 49, 58, 59, 72] посвящены способам построения деградационных моделей на основе нормального распределения, а вопросы построения деградационных гамма-моделей обсуждаются авторами в [2, 3, 30, 34, 35, 62, 65, 66]. Такой выбор распределения обусловлен тем, что вышеперечисленные законы обладают свойством воспроизводимости по параметрам, за счет чего можно легко определить распределение исследуемой случайной величины – показателя деградации в некоторый момент времени, а затем оценить требуемую вероятность безотказной работы.

Однако, благодаря широкому использованию в задачах анализа реальных данных, наибольший интерес представляют деградационные гамма- и винеровские модели. Рассмотрим процедуру построения данных моделей при условии введенных предположений.

### 1.1.1 Деградационная гамма-модель

Деградационный процесс  $Z_x(t)$  является *деградационным гамма-процессом*, если приращение  $\Delta Z_x(t) = Z_x(t + \Delta t) - Z_x(t)$  подчиняется гамма-распределению с функцией плотности

$$f_{Gamma}(u; \sigma, \Delta v_x(t)) = \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\Delta v_x(t)-1} \frac{e^{-u/\sigma}}{\sigma \cdot \Gamma(\Delta v_x(t))},$$

где  $\Delta v_x(t) = \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\sigma}$  – параметр формы,  $\sigma > 0$  – параметр масштаба [5, 103, 104, 111].

Выбор гамма-распределения в качестве распределения приращений обусловлен тем, что данное распределение обладает свойством воспроизводимости по параметру: если случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  подчиняются гамма-распределению с параметром масштаба  $\sigma$  и параметрами формы  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , соответственно, то их сумма  $\xi_1 + \xi_2$  имеет гамма-распределение с тем же параметром масштаба и параметром формы, равным  $\nu_1 + \nu_2$  [70]. Несложно показать, что деградационный гамма-процесс  $Z_x(t)$  в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_k$  представляет собой случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром масштаба  $\sigma$  и параметром формы, равным  $\frac{m_x(t_k)}{\sigma}$ .

Тогда функция надёжности для рассматриваемой деградационной гамма-модели принимает вид [101]:

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = F_{Gamma}\left(\tilde{z}; \sigma, \frac{m_x(t)}{\sigma}\right), \quad (1.8)$$

где  $F_{Gamma}(\cdot)$  – функция распределения гамма-распределения.

Для учета разброса значений деградационного показателя от объекта к объекту в гамма-модели определим параметр, который будет являться случайным. Пусть параметр  $\xi = \sigma^{-1}$  представляет собой случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметрами  $\delta^{-1}$  и  $\eta$  [50]:

$$\xi \sim F_{Gamma}(t; \delta^{-1}, \eta),$$

где параметр  $\delta^{-1}$  является параметром масштаба, а параметр  $\eta$  – параметром формы.

Выбор параметра масштаба  $\sigma$  в качестве случайной величины, отвечающей за разброс значений показателя деградации между объектами обусловлен тем, что значения данного параметра оказывают влияние на величину наклона функции тренда. Выбор гамма-распределения в качестве распределения  $\xi = \sigma^{-1}$ , объясняется тем, что параметр масштаба  $\sigma$  может принимать только положительные значения [6].

Поскольку математическое ожидание случайной величины  $\xi$  равно  $M\xi = \eta/\delta$ , а дисперсия  $D\xi = \eta/\delta^2$ , получаем, что параметр масштаба  $\sigma$  имеет математическое ожидание, равное  $M\sigma = \delta/(\eta - 1)$ , а также дисперсию

$$D\sigma = \frac{\delta^2}{(\eta - 1)^2 (\eta - 2)}$$

при  $\eta > 2$  [21]. Тогда маргинальная функция распределения для  $Z_x(t)$  в некоторый фиксированный момент времени будет записана как:

$$f_{Z_x(t)}(u; \delta, \eta, v_x(t)) = \int_0^{\infty} f_{Gamma}(u; \omega^{-1}, v_x(t)) f_{Gamma}(\omega; \delta^{-1}, \eta) d\omega =$$

$$= \frac{u^{v_x(t)-1} \delta^\eta}{(u + \delta)^{v_x(t)+\eta}} B^{-1}(v_x(t); \eta),$$

где  $B(y_1, y_2) = \int_0^1 t^{y_1-1} (1-t)^{y_2-1} dt$  при  $y_1 > 0, y_2 > 0$  – бета-функция (интеграл

Эйлера I рода). Параметр формы  $v_x(t)$  в таком случае равен:

$$v_x(t) = \frac{(\eta - 1) \cdot m_x(t)}{\delta}.$$

Следует отметить, что величина  $\frac{\eta}{\delta \cdot v_x(t)} \cdot Z_x(t)$  будет иметь распределение Фишера с параметрами  $2v_x(t)$  и  $2\eta$  [21]. В таком случае функция надежности деградационной гамма-модели со случайным параметром запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} S_x(t) = P\{T_x > t\} &= P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = \int_0^{\tilde{z}} f_{Z_x(t)}(u; \delta, \eta, v_x(t)) du = \\ &= F\left(\frac{\eta \cdot \tilde{z}}{\delta \cdot v_x(t)}; 2v_x(t), 2\eta\right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $F(\cdot)$  – функция распределения Фишера.

### 1.1.2 Винеровская деградационная модель

Деградационный процесс  $Z_x(t)$  является *винеровским деградационным процессом*, если приращения  $\Delta Z_x(t) = Z_x(t + \Delta t) - Z_x(t)$  подчиняются нормальному распределению с функцией плотности

$$f_N(u; \Delta s_x(t), \Delta \zeta_x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta \zeta_x(t)} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u - \Delta s_x(t)}{\Delta \zeta_x(t)} \right)^2},$$

где  $\Delta s_x(t) = m_x(t + \Delta t) - m_x(t)$  – это параметр сдвига, а

$\Delta \zeta_x(t) = \sigma \sqrt{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}$  – параметр масштаба, функция  $v_x(t)$

определена в выражении (1.4) [10, 107].

Если случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  подчиняются нормальному распределению с параметрами сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$  параметрами масштаба  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , соответственно, то их сумма  $\xi_1 + \xi_2$  имеет нормальное распределение с параметром сдвига  $\mu_1 + \mu_2$  и параметром масштаба  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  [70]. Таким образом, винеровский деградиционный процесс  $Z_x(t)$  в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_k$  представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметром сдвига, равным  $m_x(t_k)$ , и параметром масштаба, равным  $\sigma\sqrt{v_x(t_k)}$ .

Функция надёжности для рассматриваемой винеровской деградиционной модели принимает вид [8]:

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = \Phi\left(\frac{\tilde{z} - m_x(t)}{\sigma \cdot \sqrt{v_x(t)}}\right), \quad (1.10)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция стандартного нормального распределения.

Поскольку параметр  $\gamma_0$  функции тренда  $m_x(t)$  характеризует, по сути, скорость роста показателя деградации, то для винеровской модели со случайным параметром будем рассматривать параметр  $\xi = \gamma_0$  как случайную величину, имеющую усеченное нормальное распределение с функцией плотности [10]:

$$f_{trunc}(u; \mu, \delta) = \frac{f_N(u; \mu, \delta)}{1 - F_N(0; \mu, \delta)}, \quad (1.11)$$

где  $f_N(\cdot)$ ,  $F_N(\cdot)$  – функции плотности и распределения нормального закона, соответственно, параметр  $\mu$  является параметром сдвига, а параметр  $\delta$  – параметром масштаба.

Усеченным нормальным распределением называется распределение, которое формируется из нормального закона распределения путем ограничения интервала возможных значений для рассматриваемой

случайной величины. В данном случае используется усечение с левой стороны, интервал  $(0; +\infty)$ , так как значение параметра  $\xi$  должно быть положительным [84].

В случае модели со случайным параметром маргинальная функция плотности для  $Z_x(t)$  в фиксированный момент времени равна:

$$f_{Z_x(t)}(u; \nu_x(t), \sigma, \mu, \delta) = \int_0^{\infty} f_N(u; \omega \cdot \nu_x(t), \sigma \sqrt{\nu_x(t)}) f_{trunc}(\omega; \mu, \delta) d\omega.$$

Тогда функция надёжности для винеровской деградационной модели со случайным параметром будет вычисляться по формуле:

$$S_x(t) = P\{T_x > t\} = P\{Z_x(t) < \tilde{z}\} = \int_0^{\tilde{z}} f_{Z_x(t)}(u; \nu_x(t), \sigma, \mu, \delta) du. \quad (1.12)$$

## 1.2 Представление данных и оценивание параметров моделей

Пусть для каждого из  $n$  случайно отобранных из генеральной совокупности объектов получены измерения показателя деградации в виде случайного процесса  $Z^i(t)$ , а также соответствующая величина нагрузки (ковариаты)  $x^i$ , при которой эксплуатировался  $i$ -й объект,  $i = \overline{1, n}$ . Обозначим измерения показателя деградации для  $i$ -го объекта через

$$(0, Z_0^i), (t_1^i, Z_1^i), \dots, (t_{k_i}^i, Z_{k_i}^i), \quad j = \overline{1, k_i},$$

где  $k_i$  – это число измерений деградационного показателя во времени. Без потери общности будем считать, что начальное значение показателя старения  $Z_0^i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Обозначим выборку приращений через

$$\mathbf{X}_n = \left\{ \left( X_j^i = Z_j^i - Z_{j-1}^i, x^i \right), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i} \right\}.$$

Предполагая, что наблюдаемые случайные процессы  $Z^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  подчиняются рассматриваемой деградационной модели, можно оценить неизвестные параметры модели по выборке  $\mathbf{X}_n$  и построить прогноз

вероятности безотказной работы за наработку  $t$  при заданных значениях ковариаты. Для оценивания параметров деградиционной модели воспользуемся *методом максимального правдоподобия*.

Оценка максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$  вычисляется в результате максимизации логарифма функции правдоподобия по параметру  $\theta$ :

$$\ln L(\mathbf{X}_n; \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \ln f(X_j^i; \theta) \rightarrow \max_{\theta},$$

где  $f(\cdot)$  – соответствующая функция плотности распределения [91].

В случае, когда функция  $L(\mathbf{X}_n; \theta)$  дифференцируема по параметрам  $\theta_l$ ,  $l=1, \dots, m$ , для нахождения оценки максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$  в общем случае необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n; \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \quad l=1, \dots, m,$$

где  $m$  – размерность вектора параметров  $\theta$ .

При решении задачи оптимизации целесообразно провести масштабирование значений моментов времени измерения деградации к интервалу  $[0;1]$ .

Оценки максимального правдоподобия получили широкую популярность благодаря тому, что они обладают свойствами, определяющими качество метода оценивания [91]:

1. Асимптотической несмещенностью:

$$M\hat{\theta} \rightarrow \theta, \quad n \rightarrow \infty;$$

2. Состоятельностью:  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, \quad n \rightarrow \infty;$

3. При выполнении условий регулярности модели – свойствами асимптотической эффективности и нормальности:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{P} \xi \sim N(0, I_n^{-1}(\theta)), \quad n \rightarrow \infty,$$



где  $I_n(\theta)$  – информационное количество Фишера о параметре  $\theta$ , содержащееся в выборке объема  $n$ .

Как можно заметить, данные свойства оценок максимального правдоподобия являются асимптотическими, следовательно, характерны для данного метода оценивания при достаточно больших объемах выборок.

Рассмотрим применение метода максимального правдоподобия для оценивания параметров деградационных моделей.

Пусть случайные процессы  $Z_x^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , подчиняются деградационной гамма-модели с математическим ожиданием  $m_x(t; \gamma, \beta)$  и функцией от ковариат  $r(x; \beta)$ , тогда оценка максимального правдоподобия вектора параметров  $\theta = (\sigma, \gamma, \beta)$  будет вычисляться в результате решения задачи оптимизации:

$$\ln L(\mathbf{X}_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \ln f_{Gamma}(X_j^i; \sigma, \Delta v_x(t_j^i)) \rightarrow \max_{\theta}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta v_x(t_j^i) = \frac{m_x(t_j^i; \gamma, \beta) - m_x(t_{j-1}^i; \gamma, \beta)}{\sigma}$  – параметр формы [101].

В случае деградационной гамма-модели со случайным параметром, учитывая тот факт, что для данной модели параметр  $\xi = \sigma^{-1}$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\delta^{-1}$  и  $\eta$ , функция правдоподобия будет записана как произведение совместных функций плотности приращений  $X_j^i$  и функции плотности случайного параметра:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}_n) &= \prod_{i=1}^n f(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{k_i}^i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^{k_i} f_{Gamma}(X_j^i; \omega^{-1}, \Delta v_x(t_j^i)) \right] f_{Gamma}(\omega, \delta^{-1}, \eta) d\omega = \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\delta^\eta}{\Gamma(\eta)} \cdot \frac{\Gamma(\nu_x(t_k))}{(Z_k^i + \delta)^{\nu_x(t_k) + \eta}} \cdot \prod_{j=1}^{k_i} \frac{(X_j^i)^{\Delta \nu_x(t_j) - 1}}{\Gamma(\Delta \nu_x(t_j))} \right],$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера [6].

Если случайные процессы  $Z_x^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  подчиняются винеровской деградациионной модели с математическим ожиданием  $m_x(t; \gamma, \beta)$  и функцией от ковариат  $r(x; \beta)$ , тогда оценка максимального правдоподобия вектора параметров  $\theta = (\sigma, \gamma, \beta)$  будет вычисляться как:

$$\ln L(\mathbf{X}_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \ln f_N(X_j^i; \Delta s_x(t_j^i), \Delta \zeta_x(t_j^i)) \rightarrow \max_{\theta}, \quad (1.14)$$

где  $\Delta s_x(t_j^i) = \gamma_0 (\nu_x(t_j^i; \gamma, \beta) - \nu_x(t_{j-1}^i; \gamma, \beta))$  – параметр сдвига,  $\Delta \zeta_x(t_j^i) = \sigma \cdot \sqrt{\nu_x(t_j^i; \gamma, \beta) - \nu_x(t_{j-1}^i; \gamma, \beta)}$  – параметр масштаба [107].

Если же рассматривается винеровская деградациионная модель со случайным параметром, где параметр  $\xi = \gamma_0$  имеет усеченное нормальное распределение (1.11), функция правдоподобия будет записана аналогично деградациионной гамма-модели со случайным параметром:

$$L(\mathbf{X}_n) = \prod_{i=1}^n f(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{k_i}^i) = \\ = \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \left[ \prod_{j=1}^{k_i} f_N(X_j^i; \omega \cdot \nu_x(t), \sigma \sqrt{\nu_x(t)}) \right] f_{trunc}(\omega; \mu, \delta) d\omega.$$

Проведем исследование статистических свойств оценок параметров распределения приращений, функции тренда и регрессионного параметра для деградациионных гамма- и винеровских моделей с использованием методов статистического моделирования.

### 1.2.1 Исследование статистических свойств оценок параметров деградационных гамма- и винеровских моделей

Оценки максимального правдоподобия при достаточно больших объемах выборок обладают свойствами асимптотической несмещенности и состоятельности. Однако на практике для проведения испытаний, как правило, выделяют довольно небольшое число изделий, в связи с чем возникает необходимость исследования статистических свойств оценок параметров, полученных по ограниченным объемам выборок.

Исследование ОМП параметров распределения приращений, функции тренда и регрессионного параметра для деградационных гамма- и винеровских моделей проводилось с использованием методов имитационного моделирования в случае линейной или степенной функции тренда при различных объемах выборок. Для проведения данного исследования разработан модуль программной системы статистического анализа данных типа времени жизни LiTiS 1.3 [110], позволяющий генерировать псевдослучайные величины в соответствии с заданной деградационной моделью и планом эксперимента, а также вычислять оценки параметров модели методом максимального правдоподобия.

Выборки приращений показателя деградации генерировались в соответствии со следующим планом эксперимента:

- ковариата  $x \in \{1, 2\}$ ;
- $n$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводились в моменты времени  $t_1 = 10$ ,  $t_2 = 15$ ,  $t_3 = 25$ ,  $t_4 = 30$ .

Количество  $M$  моделируемых выборок, по которым исследовались законы распределения оценок по выборкам объема  $n$ , было взято равным

10000. Исследования проводились для линейной функции тренда (1.5) и степенной функции тренда (1.6) и логлинейной функции от ковариат (1.1).

В случае деградационной гамма-модели неизвестными параметрами являются:

- параметр масштаба  $\sigma$  гамма-распределения приращений;
- параметры функции тренда  $\gamma$ ;
- регрессионный параметр  $\beta$ .

В таблице 1.1 представлены оценки смещения (разность между оценкой математического ожидания ОМП и истинным значением параметра) и среднеквадратическое отклонение (СКО) ОМП параметров деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.1 – Свойства ОМП параметров деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.031	0.25
	$n = 60$	0.005	0.14
	$n = 200$	0.002	0.05
	$n = 500$	0.0006	0.04
$\beta$	$n = 20$	0.022	0.32
	$n = 60$	0.006	0.23
	$n = 200$	0.001	0.10
	$n = 500$	0.0007	0.06
$\sigma$	$n = 20$	0.023	0.17
	$n = 60$	0.010	0.10
	$n = 200$	0.004	0.08
	$n = 500$	0.0015	0.05

В таблице 1.2 представлены оценки смещения и СКО оценок максимального правдоподобия параметров деградационной гамма-модели со степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат

(1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.2 – Свойства ОМП параметров деградационной гамма-модели со степенной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.043	0.28
	$n = 60$	0.018	0.20
	$n = 200$	0.008	0.08
	$n = 500$	0.003	0.05
$\gamma_1$	$n = 20$	0.012	0.11
	$n = 60$	0.009	0.07
	$n = 200$	0.003	0.04
	$n = 500$	0.0004	0.01
$\beta$	$n = 20$	0.037	0.32
	$n = 60$	0.021	0.17
	$n = 200$	0.006	0.11
	$n = 500$	0.002	0.06
$\sigma$	$n = 20$	0.029	0.22
	$n = 60$	0.014	0.15
	$n = 200$	0.007	0.07
	$n = 500$	0.003	0.04

В случае деградационной гамма-модели со случайным параметром неизвестными параметрами являются:

- параметры масштаба  $\delta$  и формы  $\eta$  гамма-распределения случайного параметра  $\xi$ ;
- параметры функции тренда  $\gamma$ ;
- регрессионный параметр  $\beta$ .

В таблице 1.3 представлены оценки смещения и среднеквадратическое отклонение (СКО) ОМП параметров деградационной гамма-модели со случайным параметром и линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 10$ ,  $\alpha = 10$ .

Таблица 1.3 – Свойства ОМП параметров деградационной гамма-модели со случайным параметром и линейной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.038	0.31
	$n = 60$	0.010	0.20
	$n = 200$	0.008	0.11
	$n = 500$	0.001	0.08
$\beta$	$n = 20$	0.028	0.34
	$n = 60$	0.010	0.25
	$n = 200$	0.003	0.09
	$n = 500$	0.001	0.04
$\delta$	$n = 20$	0.056	0.19
	$n = 60$	0.027	0.10
	$n = 200$	0.009	0.05
	$n = 500$	0.004	0.01
$\alpha$	$n = 20$	0.074	0.27
	$n = 60$	0.045	0.17
	$n = 200$	0.023	0.09
	$n = 500$	0.009	0.03

В таблице 1.4 представлены оценки смещения и СКО оценок максимального правдоподобия параметров деградационной гамма-модели со случайным параметром и степенной функцией тренда (1.6) с логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 10$ ,  $\eta = 10$ .

Таблица 1.4 – Свойства ОМП параметров деградационной гамма-модели со случайным параметром и степенной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.051	0.30
	$n = 60$	0.024	0.22
	$n = 200$	0.011	0.15
	$n = 500$	0.005	0.08
$\gamma_1$	$n = 20$	0.018	0.17
	$n = 60$	0.012	0.10
	$n = 200$	0.005	0.07
	$n = 500$	0.001	0.03

Продолжение таблицы 1.4

$\beta$	$n = 20$	0.042	0.39
	$n = 60$	0.029	0.23
	$n = 200$	0.016	0.15
	$n = 500$	0.008	0.06
$\delta$	$n = 20$	0.063	0.19
	$n = 60$	0.031	0.13
	$n = 200$	0.015	0.09
	$n = 500$	0.002	0.04
$\eta$	$n = 20$	0.079	0.25
	$n = 60$	0.053	0.21
	$n = 200$	0.020	0.18
	$n = 500$	0.012	0.11

Из приведенных таблиц 1.1 – 1.4 видно, что как в случае линейной, так и в случае степенной функции тренда для рассмотренных деградационных гамма-моделей с ростом объема выборки смещение и среднее квадратическое отклонение оценок параметров снижаются, что косвенно подтверждает свойства асимптотической несмещенности и состоятельности ОМП.

Аналогично были проведены исследования статистических свойств ОМП параметров винеровских деградационных моделей.

В случае винеровской деградационной модели оценивались следующие параметры:

- параметр масштаба  $\sigma$  нормального распределения приращений;
- параметры функции тренда  $\gamma$ ;
- регрессионный параметр  $\beta$ .

В таблице 1.5 представлены оценки смещения и среднее квадратическое отклонение (СКО) ОМП параметров винеровской деградационной модели с линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.5 – Свойства ОМП параметров винеровской деградационной модели с линейной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.020	0.05
	$n = 60$	0.010	0.03
	$n = 200$	0.003	0.01
	$n = 500$	0.001	0.01
$\beta$	$n = 20$	0.025	0.10
	$n = 60$	0.013	0.08
	$n = 200$	0.007	0.03
	$n = 500$	0.002	0.01
$\sigma$	$n = 20$	0.014	0.07
	$n = 60$	0.009	0.04
	$n = 200$	0.005	0.01
	$n = 500$	0.002	0.01

В таблице 1.6 представлены оценки смещения и СКО ОМП параметров винеровской деградационной модели со степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.6 – Свойства ОМП параметров винеровской деградационной модели со степенной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_0$	$n = 20$	0.013	0.05
	$n = 60$	0.007	0.02
	$n = 200$	0.004	0.01
	$n = 500$	0.001	0.01
$\gamma_1$	$n = 20$	0.009	0.05
	$n = 60$	0.003	0.02
	$n = 200$	0.001	0.01
	$n = 500$	0.0005	0.01
$\beta$	$n = 20$	0.020	0.07
	$n = 60$	0.011	0.03
	$n = 200$	0.005	0.01
	$n = 500$	0.002	0.01
$\sigma$	$n = 20$	0.015	0.09
	$n = 60$	0.010	0.05
	$n = 200$	0.003	0.01
	$n = 500$	0.001	0.01



Кроме того, исследование статистических свойств ОМП параметров были проведены для винеровской деградационной модели со случайным параметром, при этом список оцениваемых параметров расширился за счет появления распределения параметра  $\xi$ :

- параметр масштаба  $\sigma$  нормального распределения приращений;
- параметры сдвига  $\mu$  и масштаба  $\delta$  усеченного нормального распределения случайного параметра  $\xi$ ;
- параметры функции тренда  $\gamma$ ;
- регрессионный параметр  $\beta$ .

В таблице 1.7 представлены оценки смещения и среднеквадратическое отклонение (СКО) ОМП параметров винеровской деградационной модели со случайным параметром и линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.7 – Свойства ОМП параметров винеровской деградационной модели со случайным параметром и линейной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\beta$	$n = 20$	0.031	0.14
	$n = 60$	0.015	0.10
	$n = 200$	0.009	0.05
	$n = 500$	0.004	0.02
$\mu$	$n = 20$	0.038	0.27
	$n = 60$	0.019	0.19
	$n = 200$	0.010	0.12
	$n = 500$	0.005	0.07
$\delta$	$n = 20$	0.027	0.15
	$n = 60$	0.014	0.11
	$n = 200$	0.009	0.04
	$n = 500$	0.004	0.02
$\sigma$	$n = 20$	0.015	0.09
	$n = 60$	0.010	0.05
	$n = 200$	0.005	0.02
	$n = 500$	0.002	0.01

В таблице 1.8 представлены оценки смещения и СКО оценок максимального правдоподобия параметров гамма деградационной модели со степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат (1.1). В качестве истинных значений параметров были приняты  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 1.8 – Свойства ОМП параметров винеровской деградационной модели со случайным параметром и степенной функцией тренда

	Объем выборки	Оценка смещения	СКО
$\gamma_1$	$n = 20$	0.013	0.09
	$n = 60$	0.008	0.06
	$n = 200$	0.003	0.03
	$n = 500$	0.001	0.01
$\beta$	$n = 20$	0.027	0.13
	$n = 60$	0.018	0.08
	$n = 200$	0.012	0.05
	$n = 500$	0.008	0.02
$\mu$	$n = 20$	0.021	0.25
	$n = 60$	0.009	0.20
	$n = 200$	0.007	0.14
	$n = 500$	0.004	0.06
$\delta$	$n = 20$	0.018	0.10
	$n = 60$	0.010	0.06
	$n = 200$	0.005	0.02
	$n = 500$	0.003	0.01
$\sigma$	$n = 20$	0.012	0.10
	$n = 60$	0.007	0.05
	$n = 200$	0.004	0.02
	$n = 500$	0.001	0.01

Результаты, полученные для винеровской деградационной модели, также подтверждают свойства асимптотической несмещенности и состоятельности ОМП параметров моделей.

Необходимо отметить, что значения оценок смещения и СКО оценок параметров деградационных моделей со случайным параметром оказались в целом больше соответствующих значений, полученных в случае моделей без случайных параметров для обеих рассмотренных функций тренда.

Данный результат объясняется тем, что размер вектора неизвестных параметров в случае деградационной модели со случайным параметром больше, чем у соответствующей модели без случайного параметра. Вместе с тем, если разброс значений показателя деградации от объекта к объекту является ярко выраженным, то модель без случайного параметра окажется неадекватной. Другими словами, должны быть веские основания для использования модели со случайным параметром, процедура оценивания параметров для которой существенно сложнее.

Основной проблемой при выборе между моделями со случайным параметром и без является отсутствие статистических критериев, пригодных для проверки значимости дисперсии случайного параметра в случае деградационных моделей. В данной диссертационной работе для проверки статистической гипотезы о незначимости случайного параметра для деградационных гамма- и винеровской моделей, предлагаются критерии, предусматривающие интерактивный режим исследования (методами статистического моделирования) распределений статистик применяемых критериев в ходе самой проверки этой гипотезы.

### **1.3 Постановка задачи проверки гипотезы о виде модели**

Обязательным этапом построения деградационной модели надежности, впрочем, как и любой другой вероятностной модели, является проверка статистической гипотезы о виде модели. Целью такой проверки является необходимость удостовериться в том, что выбранная деградационная модель максимально близко описывает исследуемые данные, и построенный на основе данной модели прогноз надежности не повлечет за собой серьезные ошибки.

Существует два вида гипотез о виде вероятностной модели: простые и сложные. Простая гипотеза о виде распределения имеет следующий вид [91]:

$$H_0 : f(t; \theta) = f(t; \theta_0),$$

где  $f(\cdot)$  – функция плотности заданного закона распределения, а  $\theta_0$  – известный параметр распределения.

В случае проверки сложной гипотезы [85, 91]

$$H_0 : f(t) \in \{f(t; \theta), \theta \in \Theta\},$$

где  $\Theta$  – параметрическое множество, необходимо учесть, что неизвестный параметр  $\theta$  оценивается по той же выборке, по которой осуществляется проверка гипотезы.

Сформулируем сложные гипотезы о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей.

В случае деградиционной гамма-модели гипотезу  $H_0$  можно записать следующим образом:

$$H_0 : F_{\Delta z_x(t)}(z) \in \left\{ F_{Gamma}(z; \sigma, \Delta v(t)), \Delta v(t) = \frac{m_x(t + \Delta t; \gamma, \beta) - m_x(t; \gamma, \beta)}{\sigma}, \right. \\ \left. \sigma, \gamma, \beta \in \Theta \right\}.$$

Когда же в рассмотрении находится винеровская деградиционная модель, гипотеза  $H_0$  принимает вид:

$$H_0 : F_{\Delta z_x(t)}(z) \in \left\{ F_N(z; \Delta s(t), \sigma), \Delta s(t) = \gamma_0 (v_x(t + \Delta t; \gamma, \beta) - v_x(t; \gamma, \beta)), \right. \\ \left. \Delta \zeta(t) = \sigma \sqrt{v_x(t + \Delta t; \gamma, \beta) - v_x(t; \gamma, \beta)}, \gamma, \beta \in \Theta \right\}.$$

Для проверки гипотез о виде вероятностной модели по выборкам независимых одинаково распределенных случайных величин существует целый ряд критериев согласия, например, критерии типа хи-квадрат, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и многие другие. Однако к выборке приращений  $\mathbf{X}_n$  классические критерии согласия неприменимы, поскольку элементы данной выборки в общем случае не являются одинаково распределенными.

Введём следующее преобразование приращений деградационного показателя [7, 14, 107]:

– для деградационной гамма-модели:

$$R_j^i = F_{Gamma} \left( X_j^i; \hat{\sigma}, \Delta v(t_j^i) \right), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i}, \quad (1.15)$$

$$\text{где } \Delta v(t_j^i) = \frac{m_x(t_j^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta}) - m_x(t_{j-1}^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta})}{\hat{\sigma}};$$

– для винеровской деградационной модели:

$$R_j^i = F_N \left( t; \Delta s(t_j^i), \Delta \zeta(t_j^i) \right), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i}, \quad (1.16)$$

$$\text{где } \Delta s(t_j^i) = \gamma_0 \left( v_x(t_j^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta}) - v_x(t_{j-1}^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta}) \right),$$

$$\Delta \zeta(t_j^i) = \sigma \sqrt{v_x(t_j^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta}) - v_x(t_{j-1}^i; \hat{\gamma}, \hat{\beta})}.$$

При справедливости гипотезы  $H_0$ :

$$R_j^i \sim Rav(0,1), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i}.$$

Таким образом, задача проверки гипотезы о виде распределения приращений сводится к проверке гипотезы о равномерном распределении случайных величин  $R_j^i$ ,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i}$ . Основным препятствием при проверке данной гипотезы является тот факт, что распределение статистики критериев согласия в данном случае не известно.

В настоящей диссертационной работе методами статистического моделирования проводится исследование распределений статистик и мощности критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при проверке сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровской моделей.

## 1.4 Методика статистического моделирования при исследовании распределений статистик

Методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей (метод Монте-Карло) получила широкое распространение при решении задач математической статистики, например, при моделировании распределений оценок параметров и статистик критериев.

Методика статистического моделирования предполагает моделирование эмпирических распределений статистик критериев, вычисляемых по выборкам псевдослучайных величин, построение аналитических моделей, наилучшим образом описывающих полученные эмпирические распределения, а также уточнение построенных моделей по серии экспериментов.

Рассмотрим применение метода Монте-Карло на примере моделирования распределения статистики критерия согласия при проверке сложной гипотезы о принадлежности распределения  $F(t)$  наблюдаемой случайной величины некоторому параметрическому семейству распределений:

$$H_0: F(t) \in \{F_0(t; \theta), \theta \in \Theta\}.$$

Для начала необходимо смоделировать  $M$  выборок того же объема  $n$ , что и выборка, для которой необходимо проверить гипотезу  $H_0$  в соответствии с законом распределения  $F_0(t; \theta)$ . Затем следует вычислить оценки тех же параметров закона распределения для каждой из  $M$  выборок и значение статистики  $s$  выбранного критерия согласия. Таким образом будет сформирована выборка значений статистики  $S_1, S_2, \dots, S_M$  с условным законом распределения  $G(s|H_0)$ . По полученной выборке  $S_1, S_2, \dots, S_M$  при достаточно большом  $M$  можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения  $G_M(s|H_0)$ , которой можно

непосредственно воспользоваться для утверждения, следует ли принимать гипотезу  $H_0$ .

Выбор требуемого количества реализаций  $M$  производится на основании заданной доверительной вероятности  $\gamma$  [96]. В частности, для определения функции  $G(s|H_0)$  с помощью эмпирической функции распределения  $G_M(s|H_0)$  с погрешностью моделирования, не превышающей величину  $\varepsilon > 0$ , требуемое число повторений  $M$  можно вычислить следующим образом:

$$M = \left\lceil t_\gamma^2 \frac{G(s|H_0)(1 - G(s|H_0))}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1,$$

где  $t_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)$  – квантиль стандартного нормального закона распределения.

Абсолютная погрешность моделирования зависит от величины распределения  $G(s|H_0)$  и достигает максимума при  $G(s|H_0) = 0.5$ . Таким образом, необходимое число повторений  $M$  можно оценить как:

$$M \leq \left\lceil t_\gamma^2 \frac{1}{4\varepsilon^2} \right\rceil + 1.$$

В настоящей работе с использованием метода Монте-Карло проведено исследование статистических свойств оценок параметров деградационных моделей, а также распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия при проверке гипотез о виде деградационной модели [111]. В основе метода Монте-Карло лежит генерация псевдослучайных величин. В данной работе при выполнении исследований использовался датчик «WELL» (Well Equidistributed Long-period Linear), в модификации WELL512, который имеет период  $2^{512} - 1$  и обладает высокой производительностью [36].

## Выводы по главе 1

В данной главе диссертации рассмотрены вопросы построения деградационных гамма- и винеровских моделей. В ходе изучения и анализа рассмотренных моделей, а также в результате исследования статистических свойств ОМП параметров моделей показана актуальность решения следующих задач:

1) исследование влияния величины дисперсии случайного параметра на точность ОМП параметров деградационных моделей;

2) разработка критериев проверки гипотезы о незначимости случайного параметра для деградационных моделей;

3) исследование распределений статистик и мощности критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга при проверке гипотез о виде деградационных моделей;

4) разработка алгоритма, позволяющего осуществлять проверку сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровских моделей;

5) разработка программного обеспечения, позволяющего осуществлять оценку параметров, а также проверку гипотез относительно деградационных гамма- и винеровских моделей.



## **ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ЗНАЧИМОСТИ ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОГО ПАРАМЕТРА ДЕГРАДАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

В данной главе представлены результаты исследования влияния величины дисперсии случайного параметра на точность оценивания параметров гамма- и винеровских деградационных моделей, предложены критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра для рассмотренных моделей, проведено исследование мощности предложенных критериев. Результаты исследований, представленные в данной главе, опубликованы в [6, 10, 12, 13, 14, 106, 108, 109].

### **2.1 Исследование влияния величины дисперсии случайного параметра на точность ОМП параметров деградационных моделей**

Вполне естественно, что процесс деградации развивается по-разному для различных объектов, и кажется разумным построение деградационной модели со случайным параметром, который отвечает за разброс значений показателя деградации от объекта к объекту. Однако выбор такой модели приводит к увеличению размерности вектора неизвестных параметров, так как помимо уже имеющихся параметров в модели, добавляются параметры распределения случайного параметра. Поэтому необходимо выяснить, позволяет ли введение случайного параметра в модель получить более точные оценки параметров.

Сравним точность получаемых оценок параметров для деградационных гамма- и винеровских моделей со случайным параметром и без в зависимости от величины дисперсии случайного параметра. Дисперсия случайного параметра равна:

– в случае деградационной гамма-модели:

$$D\sigma = \frac{\delta^2}{(\eta - 1)^2 (\eta - 2)},$$

– в случае винеровской модели:

$$D\xi = \delta^2 \left( 1 - \frac{\mu \cdot f_N(0; \mu, \delta)}{1 - F_N(0; \mu, \delta)} - \left( \frac{\delta \cdot f_N(0; \mu, \delta)}{1 - F_N(0; \mu, \delta)} \right)^2 \right).$$

Обозначим через  $\theta$  вектор параметров модели. Для исследования точности оценивания параметров рассматриваемых моделей вычислялись значения относительной погрешности получаемых оценок  $\hat{\theta}$ :

$$\psi = \left( \left| \frac{\theta_1 - \hat{\theta}_1}{\theta_1} \right|, \dots, \left| \frac{\theta_m - \hat{\theta}_m}{\theta_m} \right| \right),$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_m$  – истинные значения параметров,  $m$  – размерность вектора параметров  $\theta$ . Полученный результат усредним по  $M = 10000$  выборкам.

Значения относительной погрешности оценок максимального правдоподобия параметров деградиционных гамма- и винеровских моделей получены в случае различных значений параметров  $(\delta, \eta)$  и  $(\mu, \delta)$  распределения случайных параметров деградиционных гамма- и винеровской моделей, соответственно. Выборки приращений деградиционного показателя генерировались из модели со случайным параметром в соответствии со следующими исходными данными:

- ковариата  $x \in \{1, 2\}$ ;
- $n = 10$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводились в моменты времени 10, 15, 25, 30, 45, 55, 60, 65, 70;

В качестве функции тренда  $m_x(t; \gamma, \beta)$  рассматриваются линейная функция тренда (1.5) и степенная функция вида (1.6) с логлинейной функцией от ковариат (1.1). Количество моделируемых выборок  $M = 10000$ .

Для деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда  $m_x(t; \gamma, \beta)$  были выбраны  $\gamma_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 2.1 – Относительная погрешность оценок параметров деградационных гамма-моделей для линейной функции тренда и различных значений параметров распределения случайного параметра  $\sigma$

Деградационная гамма- модель	$\gamma_0$	$\beta$	$\sigma$	
			$\delta$	$\eta$
$D\sigma = 0.04$				
Без случайного параметра	0.11	0.08	0.09	
Со случайным параметром	0.13	0.12	0.15	0.12
$D\sigma = 0.15$				
Без случайного параметра	0.19	0.15	0.17	
Со случайным параметром	0.16	0.14	0.16	0.11
$D\sigma = 3.86$				
Без случайного параметра	0.27	0.21	0.25	
Со случайным параметром	0.19	0.17	0.13	0.12

Для гамма-модели со степенной функцией тренда зададим следующие значения  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ .

Таблица 2.2 – Относительная погрешность оценок параметров деградационных гамма-моделей в случае степенной функции тренда и различных значений параметров распределения случайного параметра  $\sigma$

Деградационная гамма- модель	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\beta$	$\sigma$	
				$\delta$	$\eta$
$D\sigma = 0.04$					
Без случайного параметра	0.14	0.13	0.17	0.16	
Со случайным параметром	0.16	0.18	0.20	0.13	0.14
$D\sigma = 0.15$					
Без случайного параметра	0.23	0.19	0.25	0.20	
Со случайным параметром	0.17	0.20	0.19	0.15	0.16
$D\sigma = 3.86$					
Без случайного параметра	0.32	0.24	0.27	0.29	
Со случайным параметром	0.19	0.22	0.20	0.16	0.18

В случае винеровской деградационной модели с линейным трендом в качестве истинных значений были выбраны  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 2.3 – Относительная погрешность оценок параметров винеровских деградационных моделей в случае линейной функции тренда и различных значений параметров распределения случайного параметра  $\gamma_0$

Винеровская деградационная модель	$\gamma_0$		$\beta$	$\sigma$
	$\mu$	$\delta$		
	$D\xi = 0.19$			
Без случайного параметра	0.15		0.17	0.09
Со случайным параметром	0.18	0.21	0.13	0.10
	$D\xi = 0.32$			
Без случайного параметра	0.19		0.20	0.12
Со случайным параметром	0.14	0.17	0.11	0.09
	$D\xi = 0.53$			
Без случайного параметра	0.22		0.24	0.13
Со случайным параметром	0.13	0.15	0.10	0.07

В случае винеровской деградационной модели со степенной функцией тренда были заданы следующие значения:  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Таблица 2.4 – Относительная погрешность оценок параметров винеровских деградационных моделей в случае различных функций тренда и значений параметров распределения случайного параметра  $\gamma_0$

Винеровская деградационная модель	$\gamma_0$		$\gamma_1$	$\beta$	$\sigma$
	$\mu$	$\delta$			
	$D\xi = 0.19$				
Без случайного параметра	0.11		0.14	0.12	0.07
Со случайным параметром	0.15	0.18	0.15	0.16	0.09
	$D\xi = 0.32$				
Без случайного параметра	0.14		0.17	0.14	0.10
Со случайным параметром	0.13	0.15	0.11	0.13	0.07
	$D\xi = 0.53$				
Без случайного параметра	0.19		0.21	0.17	0.12
Со случайным параметром	0.10	0.11	0.08	0.11	0.04

Как можно увидеть из таблиц 2.1 – 2.4, с ростом величины дисперсии случайного параметра точность оценивания повышается для моделей со случайным параметром, как в случае деградационной гамма-модели, так и в случае винеровской деградационной модели. В случае модели без случайного параметра наблюдается обратная зависимость: чем больше

значение дисперсии случайного параметра, тем больше относительная погрешность оценивания.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что правильно выбранная модель со случайным параметром или без повысит точность оценивания параметров, а, следовательно, и позволит в дальнейшем получить более точную оценку надежности.

В связи с чем, появляется необходимость разработать статистические критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра для рассматриваемых деградационных моделей.

## **2.2 Проверка гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной модели**

Если разброс значений от объекта к объекту довольно велик, деградационная модель без случайного параметра может оказаться неподходящей для дальнейшего анализа. Таким образом, появляется необходимость в проверке гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной модели:

$$H_0 : \xi = const .$$

Принятие данной гипотезы будет фактически означать, что исходные данные соответствуют деградационной модели без случайного параметра.

Конкурирующая гипотеза, соответствующая деградационной модели со случайным параметром, имеет вид:

$$H_1 : D\xi > 0 .$$

Для проверки гипотезы  $H_0$  рассмотрим статистический критерий отношения правдоподобия. Критерий отношения правдоподобия обычно используется для определения наилучшей из двух предложенных моделей.

Значение статистики критерия рассчитывается как:

$$\lambda_n = \ln \frac{L(\mathbf{X}_n | H_1)}{L(\mathbf{X}_n | H_0)},$$

где  $L(\mathbf{X}_n | H_0)$  – это значение максимума функции правдоподобия для деградационной модели без случайного параметра,  $L(\mathbf{X}_n | H_1)$  – значение максимума функции правдоподобия для деградационной модели со случайным параметром. При достаточно больших значениях  $\lambda_n$  нулевая гипотеза отклоняется.

Как известно, согласно лемме Неймана-Пирсона, критерий отношения правдоподобия является наиболее мощным при проверке лишь простых гипотез, чего нельзя сказать о нем в случае проверки сложных гипотез с учетом оценки параметров. Поэтому в качестве альтернативного подхода в диссертации предлагается критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра деградационной модели.

При работе с деградационной гамма-моделью со случайным параметром вида (1.9) оценка дисперсии случайного параметра  $\sigma$  равна

$$d_n = \frac{\hat{\delta}_n^2}{(\hat{\eta}_n - 1)^2 (\hat{\eta}_n - 2)}, \quad (2.3)$$

где  $\hat{\delta}_n$  и  $\hat{\eta}_n$  являются оценками максимального правдоподобия параметра формы и масштаба распределения случайного параметра  $\sigma$ , соответственно.

Для винеровской деградационной модели со случайным параметром вида (1.12) оценка дисперсии случайного параметра рассчитывается следующим образом:

$$d_n = \hat{\delta}_n^2 \left( 1 - \frac{\hat{\mu}_n \cdot f_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)}{1 - F_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)} - \left( \frac{\hat{\delta}_n \cdot f_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)}{1 - F_N(0; \hat{\mu}_n, \hat{\delta}_n)} \right)^2 \right), \quad (2.4)$$

где  $\hat{\mu}_n$  и  $\hat{\delta}_n$  являются оценками максимального правдоподобия параметров сдвига и масштаба усеченного нормального распределения, соответственно.

Для того чтобы определить, может ли выбранная оценка дисперсии  $d_n$  быть использована в качестве статистики критерия, проведем исследование статистических свойств  $d_n$  для деградационной гамма-модели и винеровской деградационной модели.

В таблице 2.5 представлены значения среднего и выборочной дисперсии оценок  $d_n$ , полученных по  $M=10000$  смоделированных выборок приращений для деградационных гамма-моделей.

Для проведения исследований были заданы следующие истинные значения параметров:  $\delta=1.5$ ,  $\eta=10$ ,  $\gamma_1=0.002$  – для деградационной гамма-модели со случайным параметром, и  $\sigma=14$ ,  $\gamma_1=0.002$  – для деградационной гамма-модели без случайного параметра.

Таблица 2.5. Значения среднего  $\bar{X}$  и выборочной дисперсии  $S^2$  оценки  $d_n$  вида (2.3)

Деградационная гамма-модель	Статистика	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$
Без случайного параметра	$\bar{X}$	$2.55 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$1.79 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$
	$S^2$	$4.08 \cdot 10^{-11}$	$2.19 \cdot 10^{-11}$	$1.36 \cdot 10^{-11}$	$1.02 \cdot 10^{-11}$	$7.53 \cdot 10^{-12}$
Со случайным параметром	$\bar{X}$	$4.01 \cdot 10^{-3}$	$3.63 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-3}$	$3.56 \cdot 10^{-3}$	$3.54 \cdot 10^{-3}$
	$S^2$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$4.28 \cdot 10^{-3}$	$6.88 \cdot 10^{-3}$	$5.49 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$

Аналогичные исследования проведены для винеровских деградационных моделей. Выбранный объем моделирования  $M=10000$ , истинные значения параметров равны  $\sigma=2$ ,  $\mu=0.5$ ,  $\delta=0.05$  – для винеровской деградационной модели со случайным параметром, и  $\sigma=2$ ,  $\gamma_0=0.5$  – для винеровской деградационной модели без случайного параметра. Полученные значения среднего и выборочной дисперсии оценок  $d_n$  для винеровских деградационных моделей представлены в таблице 2.6.

Таблица 2.6. Значения среднего  $\bar{X}$  и выборочной дисперсии  $S^2$  оценки  $d_n$  вида (2.4)

Винеровская модель	Статистика	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$
Без случайного параметра	$\bar{X}$	$5.38 \cdot 10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^{-7}$	$8.01 \cdot 10^{-8}$	$5.68 \cdot 10^{-8}$	$3.04 \cdot 10^{-8}$
	$S^2$	$1.97 \cdot 10^{-9}$	$9.90 \cdot 10^{-10}$	$6.45 \cdot 10^{-10}$	$2.71 \cdot 10^{-10}$	$8.73 \cdot 10^{-12}$
Со случайным параметром	$\bar{X}$	$7.30 \cdot 10^{-3}$	$5.92 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$2.59 \cdot 10^{-3}$
	$S^2$	$6.12 \cdot 10^{-4}$	$3.17 \cdot 10^{-4}$	$9.93 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-5}$	$3.91 \cdot 10^{-5}$

Как видно из таблиц 2.5 и 2.6, средние значения оценки дисперсии  $d_n$ , полученные для обеих деградиционных моделей без случайного параметра, с увеличением объема выборки стремятся к нулю, в отличие от средних значений  $d_n$ , полученных для моделей со случайным параметром, которые стремятся к соответствующим истинным значениям дисперсии:

- $D\sigma = 3.49 \cdot 10^{-3}$  в случае гамма-модели;
- $D\xi = 2.5 \cdot 10^{-3}$  в случае винеровской модели.

Таким образом, можно сделать вывод, что оценка дисперсии  $d_n$  может быть использована в качестве статистики критерия для проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра. Аналогично критерию отношения правдоподобия, гипотеза  $H_0$  будет отклоняться при достаточно больших значениях  $d_n$ .

Теоретическое распределение статистик предложенных критериев остается неизвестным, так как на вид распределения влияют ряд факторов, таких как метод оценивания параметров модели, вид функции тренда, значения и число моментов замера показателя деградации, объем выборки и другие. Следовательно, применение данных критериев возможно только с использованием методов статистического моделирования в интерактивном режиме проверки гипотезы.

Алгоритм проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра можно сформулировать следующим образом:



1. Сгенерировать выборку приращений для деградационной модели без случайного параметра в соответствии с заданными планом эксперимента и параметрами, представляющими собой значения оценок максимального правдоподобия, полученные по исходной выборке.

2. Методом максимального правдоподобия оценить параметры деградационной модели без случайного параметра по смоделированной выборке, полученной в пункте 1, используя функцию правдоподобия вида (1.8) в случае деградационной гамма-модели или вида (1.10) в случае винеровской деградационной модели.

3. Методом максимального правдоподобия оценить параметры деградационной модели со случайным параметром по смоделированной выборке, полученной в пункте 1, используя функцию правдоподобия вида (1.9) в случае деградационной гамма-модели или вида (1.12) в случае винеровской деградационной модели.

4. Вычислить значения статистик  $\lambda_n$  и  $d_n$ .

5. Повторив действия из пунктов 1 – 4  $M$  число раз, получить эмпирическую функцию распределения  $G_M(s | H_0)$ ,  $s \in \mathbf{R}$  для каждого из предложенных критериев.

6. Вычислить значения достигаемого уровня значимости  $\alpha_n = 1 - G_M(S_n | H_0)$ , где  $S_n$  – это соответствующее значение статистики ( $\lambda_n$  или  $d_n$ ).

7. Если значение  $\alpha_n$  меньше заданного уровня значимости  $\alpha$ , гипотеза  $H_0$  отклоняется.

### 2.3 Исследование мощности предложенных критериев проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной модели

Для сравнения мощности критерия отношения правдоподобия и критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра, для различных пар конкурирующих гипотез были проведены исследования с помощью метода Монте-Карло.

Значения мощности для обоих критериев были получены для деградационных гамма- и винеровской моделей при различных объемах выборок, моментах времени измерения показателя деградации  $t_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , а также различной величине дисперсии случайного параметра. Используемый объем моделирования равен  $M = 10000$ , уровень значимости задан равным  $\alpha = 0.01$ . В таблицах 2.7 и 2.8 представлены оценки мощности предложенных критериев для деградационной гамма-модели и винеровской деградационной модели, соответственно, при различных наборах моментов времени измерения показателя деградации:

$$T_1 : t_j = t_{j-1} + 400, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 10},$$

$$T_2 : t_j = t_{j-1} + 250, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 16},$$

$$T_3 : t_j = t_{j-1} + 125, \text{ где } t_0 = 0, j = \overline{1, 32}.$$

В случае деградационной гамма-модели при справедливости гипотезы  $H_0$  выборки приращений генерируются из модели без случайного параметра с параметром масштаба равным  $\sigma = 14$ . Если же верна конкурирующая гипотеза  $H_1$ , выборки генерируются из модели со случайным параметром с параметрами  $\delta = 1.5$ ,  $\eta = 28$ ,  $\gamma_1 = 0.002$ . В качестве функции тренда была выбрана линейная функция вида (1.5).

Таблица 2.7. Оценки мощности критериев проверки значимости дисперсии случайного параметра для деградиационной гамма-модели при различных наборах моментов времени измерения показателя деградации

Моменты замера	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$T_1$	0.69	0.93	0.99	1.0
$T_2$	0.70	0.94	0.99	1.0
$T_3$	0.71	0.94	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$T_1$	0.67	0.92	0.99	1.0
$T_2$	0.69	0.93	0.99	1.0
$T_3$	0.70	0.95	0.99	1.0

При работе с винеровской деградиационной моделью при справедливой гипотезе  $H_0$  выборки приращений аналогично генерируются из модели без случайного параметра с параметром тренда равным  $\gamma_0 = 0.5$ . В случае же, если верна конкурирующая гипотеза  $H_1$ , выборки генерируются из модели со случайным параметром с параметрами  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 0.05$ . Аналогично гамма-модели, в качестве функции тренда была выбрана линейная функция вида (1.5).

Таблица 2.8. Оценки мощности критериев проверки значимости дисперсии случайного параметра для винеровской деградиационной модели при различных наборах моментов времени измерения показателя деградации

Моменты замера	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$T_1$	0.50	0.82	0.94	1.0
$T_2$	0.61	0.84	0.98	1.0
$T_3$	0.64	0.87	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$T_1$	0.53	0.81	0.90	1.0
$T_2$	0.59	0.84	0.96	1.0
$T_3$	0.62	0.85	0.99	1.0

Как видно из таблиц 2.7 и 2.8, для деградационной гамма-модели и винеровской деградационной модели мощность обоих критериев растет с увеличением числа тестируемых объектов  $n$ , а также частоты измерений показателя деградации.

Следующее исследование было проведено для того, чтобы продемонстрировать, как меняется мощность в зависимости от величины дисперсии случайного параметра.

В случае деградационной гамма-модели при увеличении параметра формы  $\eta$  величина дисперсии  $D\xi$  уменьшается, вследствие чего были рассмотрены различные значения параметров  $\eta_1 = 42$ ,  $\eta_2 = 35$ ,  $\eta_3 = 28$  при фиксированном значении параметра масштаба  $\delta = 1.5$ . Для винеровской же деградационной модели, величина дисперсии растет с увеличением значения параметра масштаба  $\delta$ , в связи с чем для исследования были выбраны следующие значения:  $\delta_1 = 0.05$ ,  $\delta_2 = 0.1$ ,  $\delta_3 = 0.5$ .

В качестве иллюстрации влияния величины дисперсии случайного параметра на разброс значений деградационного показателя между объектами на рисунках 2.1–2.4 представлены графики изменения показателя деградации для деградационной гамма-модели и различных значений параметра формы случайного параметра, а также график для гамма-модели без случайного параметра. Как видно из рисунков 2.3 и 2.4, в случае деградационной гамма-модели со случайным параметром с параметром формы, равным  $\eta = 42$ , изменение показателя деградации от объекта к объекту незначительно отличается от того, что было получено для модели без случайного параметра, что говорит о том, что различать данные случаи довольно трудно без специальных критериев.

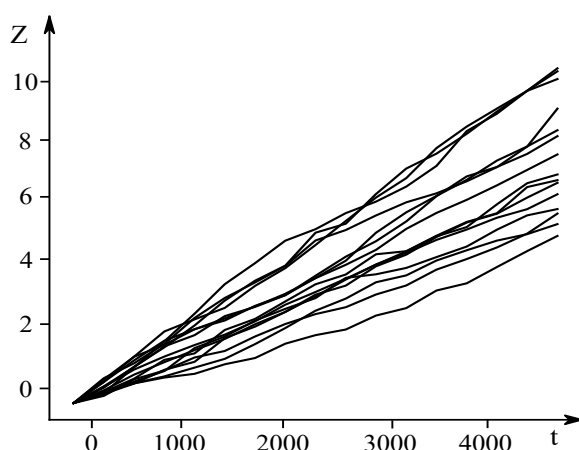


Рисунок 2.1 – Изменение деградационного показателя в случае параметра формы  $\eta = 28$  случайного параметра  $\sigma$

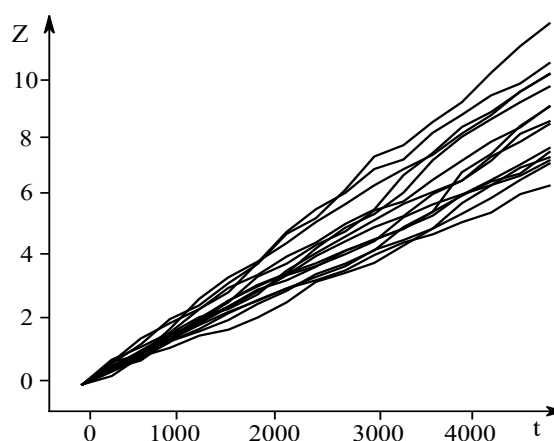


Рисунок 2.2 – Изменение деградационного показателя в случае параметра формы  $\eta = 35$  случайного параметра  $\sigma$

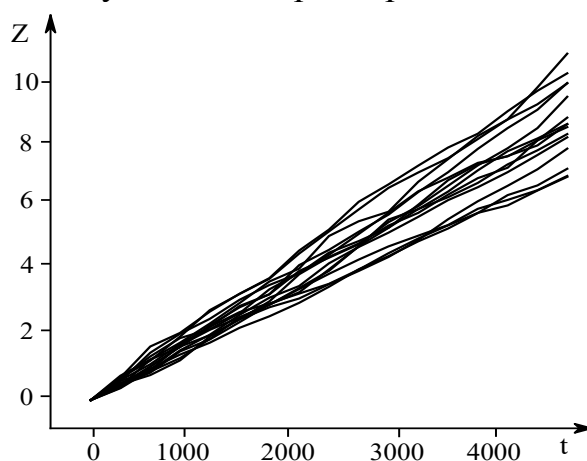


Рисунок 2.3 – Изменение деградационного показателя в случае параметра формы  $\eta = 42$  случайного параметра  $\sigma$

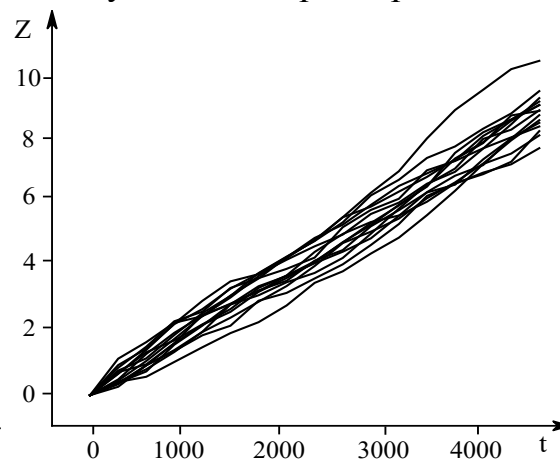


Рисунок 2.4 – Изменение деградационного показателя в случае деградационной гамма-модели без случайного параметра

Для проведения исследования моменты замера были получены по формуле  $t_j = t_{j-1} + 250$ , где  $t_0 = 0$ ,  $j = \overline{1, 16}$ . Уровень значимости  $\alpha$  был выбран равным 0.01. Оценки мощности предложенных критериев для различных значений параметра формы  $\eta$  случайного параметра  $\sigma$  деградационной гамма-модели и числа тестируемых объектов  $n$  представлены в таблице 2.9. В таблице 2.10 аналогично приведены оценки мощности предложенных критериев для различных значений параметра

масштаба  $\delta$  случайного параметра  $\xi$  винеровской деградационной модели и числа тестируемых объектов  $n$ .

Таблица 2.9. Оценки мощности критериев проверки значимости дисперсии случайного параметра при различных значениях параметра формы  $\eta$  случайного параметра  $\sigma$  деградационной гамма-модели и числа тестируемых объектов  $n$

Параметр формы $\eta$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$\eta_1 = 42$	0.69	0.94	0.99	1.0
$\eta_2 = 35$	0.69	0.94	0.99	1.0
$\eta_3 = 28$	0.70	0.94	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$\eta_1 = 42$	0.67	0.93	0.98	0.99
$\eta_2 = 35$	0.68	0.93	0.98	0.99
$\eta_3 = 28$	0.69	0.93	0.99	1.0

Таблица 2.10. Оценки мощности критериев проверки значимости дисперсии случайного параметра при различных значениях параметра масштаба  $\delta$  случайного параметра  $\xi$  винеровской деградационной модели и числа тестируемых объектов  $n$

Параметр масштаба $\delta$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра				
$\delta_1 = 0.05$	0.56	0.82	0.99	1.0
$\delta_2 = 0.1$	0.63	0.86	0.99	1.0
$\delta_3 = 0.5$	0.64	0.89	0.99	1.0
Критерий отношения правдоподобия				
$\delta_1 = 0.05$	0.51	0.79	0.97	0.99
$\delta_2 = 0.1$	0.58	0.83	0.97	1.0
$\delta_3 = 0.5$	0.60	0.85	0.99	1.0

Как видно из таблиц 2.9 и 2.10, значения мощности постепенно увеличиваются с ростом величины дисперсии случайного параметра. Кроме того, можно предположить, что критерий, основанный на оценке дисперсии

случайного параметра, по мощности несколько превосходит критерий отношения правдоподобия.

## **Выводы по главе 2**

В данной главе получены следующие результаты:

1) Проведено исследование точности ОМП параметров для деградационных гамма- и винеровских моделей в зависимости от величины дисперсии случайного параметра. Показано, что правильно выбранный тип деградационной модели (со случайным параметром или без) повысит точность оценивания параметров, а, следовательно, и позволит в дальнейшем получить более точную оценку надежности.

2) Для определения наиболее подходящего типа деградационной модели предложены статистические критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационных моделей: критерий отношения правдоподобия, а также критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра.

3) С помощью метода Монте-Карло проведено исследование мощности предложенных критериев для деградационной гамма-модели и винеровской деградационной модели при различных объемах выборок, моментах времени измерения показателя деградации, а также различной величине дисперсии случайного параметра. Оценки мощности критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра, оказались несколько выше соответствующих оценок мощности критерия отношения правдоподобия при малых объемах выборок.

### ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК И МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ВИДЕ ДЕГРАДАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В данной главе представлены результаты исследования распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровской моделей, приведен алгоритм проверки сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровской моделей с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, а также продемонстрированы результаты исследования мощности данных критериев относительно близких конкурирующих гипотез, соответствующих различным видам деградационных моделей. Результаты исследований, представленные в данной главе, опубликованы в [6 – 9, 11, 13, 99 – 101, 105, 108].

#### 3.1 Непараметрические критерии согласия

Как утверждалось в разделе 1.3, элементы выборки приращений  $\mathbf{X}_n$  в общем случае не являются одинаково распределенными, в связи с чем для проверки гипотезы о виде деградационной модели было введено преобразование  $R_j^i$ , соответствующее формулам (1.15) и (1.16) для деградационных гамма- и винеровской моделей.

Обозначим через  $R_{(1)}^* \leq R_{(2)}^* \leq \dots \leq R_{(N)}^*$ ,  $N = \sum_{i=1}^n k_i$  элементы вариационного ряда, построенного по выборке

$$\mathbf{R}_N = \{R_j^i, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k_i}\}.$$

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки  $\mathbf{R}_N$  равномерному распределению  $Rav(0,1)$  можно воспользоваться непараметрическими



критериями согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга [92].

В критерии типа Колмогорова в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законами распределения используется статистика с поправкой Большева [71] вида:

$$S_k = \frac{6ND_N + 1}{6\sqrt{N}}, \quad (3.1)$$

где  $D_N = \max(D_N^+, D_N^-)$ ,  $D_N^+ = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{i}{N} - R_{(i)}^* \right\}$ ,  $D_N^- = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ R_{(i)}^* - \frac{i-1}{N} \right\}$ . При

проверке простой гипотезы  $H_0$ , когда значения параметров определены по результатам предыдущего эксперимента, предельным распределением статистики (3.1) является закон Колмогорова [91]:

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2}.$$

В критерии типа Крамера-Мизеса-Смирнова используется статистика вида [92]

$$S_\omega = N\omega_N^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^N \left\{ R_{(i)}^* - \frac{2i-1}{2N} \right\}^2, \quad (3.2)$$

а в критерии типа Андерсона-Дарлинга – статистика в форме [1]

$$S_\Omega = -N - 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2i-1}{2N} \ln R_{(i)}^* + \left( 1 - \frac{2i-1}{2N} \right) \ln(1 - R_{(i)}^*) \right\}. \quad (3.3)$$

При проверке простой гипотезы  $H_0$  предельным распределением статистик (3.2) и (3.3) являются распределения  $a1(s)$  и  $a2(s)$ , соответственно [91].

Гипотеза  $H_0$  отвергается при больших значениях статистик, что означает, что данные критерии являются правосторонними.

Необходимо учитывать то, что проверяемая гипотеза, как правило, является сложной, поскольку неизвестные параметры модели оцениваются по тем же данным, по которым проверяется согласие. При проверке

сложных гипотез условные распределения данных статистик зависят от ряда факторов: метода оценивания параметров, типа оцениваемого параметра, числа оцениваемых параметров и других факторов. Поэтому для вычисления достигнутого уровня значимости  $\alpha$  и принятия решения о нулевой гипотезе о виде деградационной модели условное распределение статистики критерия согласия  $G(S|H_0)$  может быть оценено только в интерактивном режиме проверки гипотезы [74, 90, 91].

### **3.2 Исследование распределений статистик непараметрических критериев согласия для деградационных моделей**

Если значения параметров деградационной модели известны заранее, то проверяется простая гипотеза и предельное распределение рассматриваемых статистик в этом случае известно. Например, на рисунке 3.1 представлены эмпирическое распределение статистики Колмогорова (3.1), полученное при проверке простой гипотезы о виде деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1) с параметрами  $\sigma=1$ ,  $\gamma_0=0.7$ ,  $\beta=0.5$ , а также распределение Колмогорова  $K(S)$ . Выборки приращений показателя деградации генерировались в соответствии со следующим планом эксперимента:

- ковариата  $x \in \{0.6, 0.8\}$ ;
- $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводились в моменты времени  $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Количество  $M$  моделируемых выборок, по которым исследовались законы распределения статистик, было взято равным 10000.

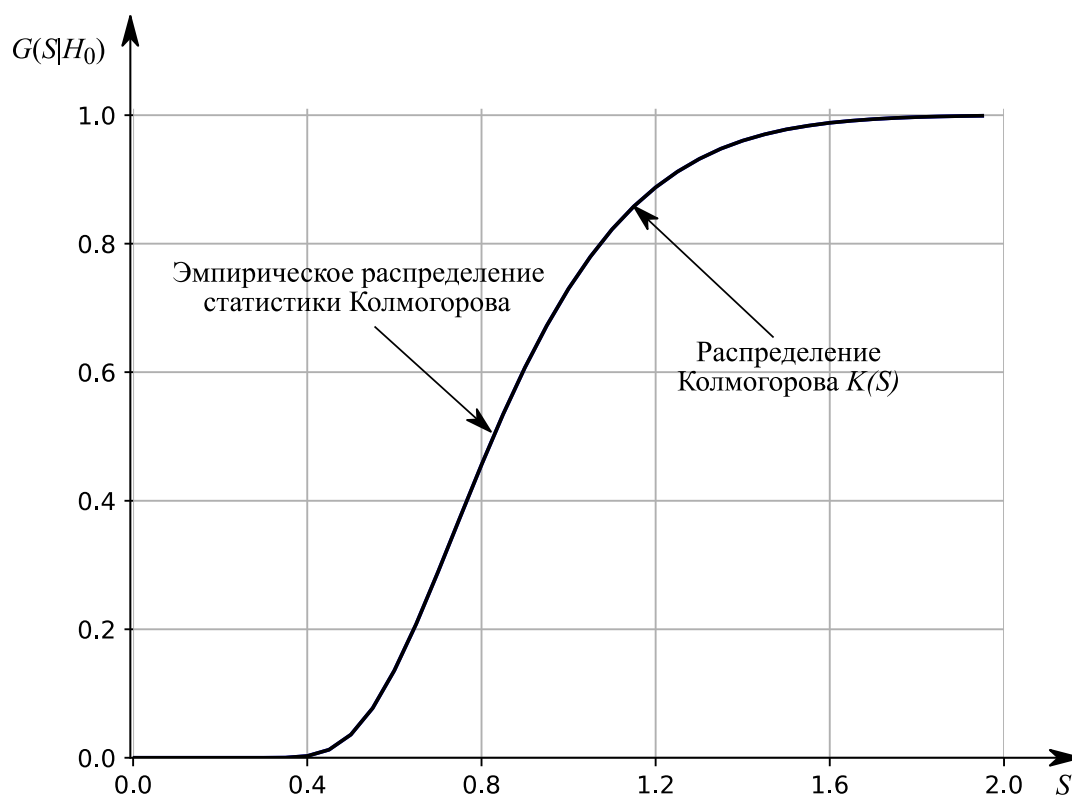


Рисунок 3.1 – Эмпирическое и теоретическое распределения статистики критерия Колмогорова при справедливости простой гипотезы о виде деградиционной гамма-модели

Как видно из рисунка 3.1, эмпирическое распределение статистики, полученное при проверке простой гипотезы о виде деградиционной гамма-модели, согласуется с теоретическим распределением Колмогорова, что подтверждается значениями статистики  $S_M$  и достигнутых уровней значимости  $\alpha_M$ , представленными в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Значения статистик и достигнутых уровней значимости при проверке согласия эмпирического распределения статистики Колмогорова и теоретического распределения Колмогорова

Название критерия	$S_M$	$\alpha_M$
Колмогорова	0.806	0.534
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.153	0.379
Андерсона-Дарлинга	0.885	0.423

Аналогичный результат получен для критериев Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга, в том числе и при проверке простой гипотезы о виде винеровской деградационной модели.

Как показано в [91], при проверке сложной гипотезы о виде гамма-распределения на условное распределение  $G(S | H_0)$  непараметрических критериев согласия помимо прочих факторов оказывает влияние значение параметра формы гамма-распределения. Следовательно, при проверке гипотезы о виде деградационной гамма-модели распределения статистик (3.1) – (3.3) зависят от вида функции тренда, вида функции от ковариат и плана эксперимента. С использованием методов имитационного моделирования проведено исследование зависимости распределений статистик критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга от вышеуказанных факторов в случае деградационной гамма-модели. Результаты исследований приведены на примере критерия типа Колмогорова.

Для исследования распределения статистик критериев согласия в зависимости от вида функции тренда и функции от ковариат рассмотрен следующий план эксперимента:

- ковариата  $x \in \{0.6, 0.8\}$ ;
- $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Количество  $M$  моделируемых выборок, по которым исследовались законы распределения статистик, было взято равным 10000.

На рисунке 3.2 представлены эмпирические функции распределения статистики Колмогорова при проверке сложной гипотезы о виде деградационной гамма-модели для линейной (1.5), степенной (1.6) и

экспоненциальной (1.7) функций тренда. В качестве функции от ковариат была выбрана логлинейная функция вида (1.1). Для аналогичного исследования зависимости функции распределения статистики Колмогорова от выбора функции от ковариат рассмотрены логлинейная (1.1), степенная (1.2) функции, а также функция Аррениуса (1.3). Полученные эмпирические распределения статистики Колмогорова при проверке сложной гипотезы о виде гамма-модели с линейной функцией вида тренда вида (1.5) представлены на рисунке 3.3.

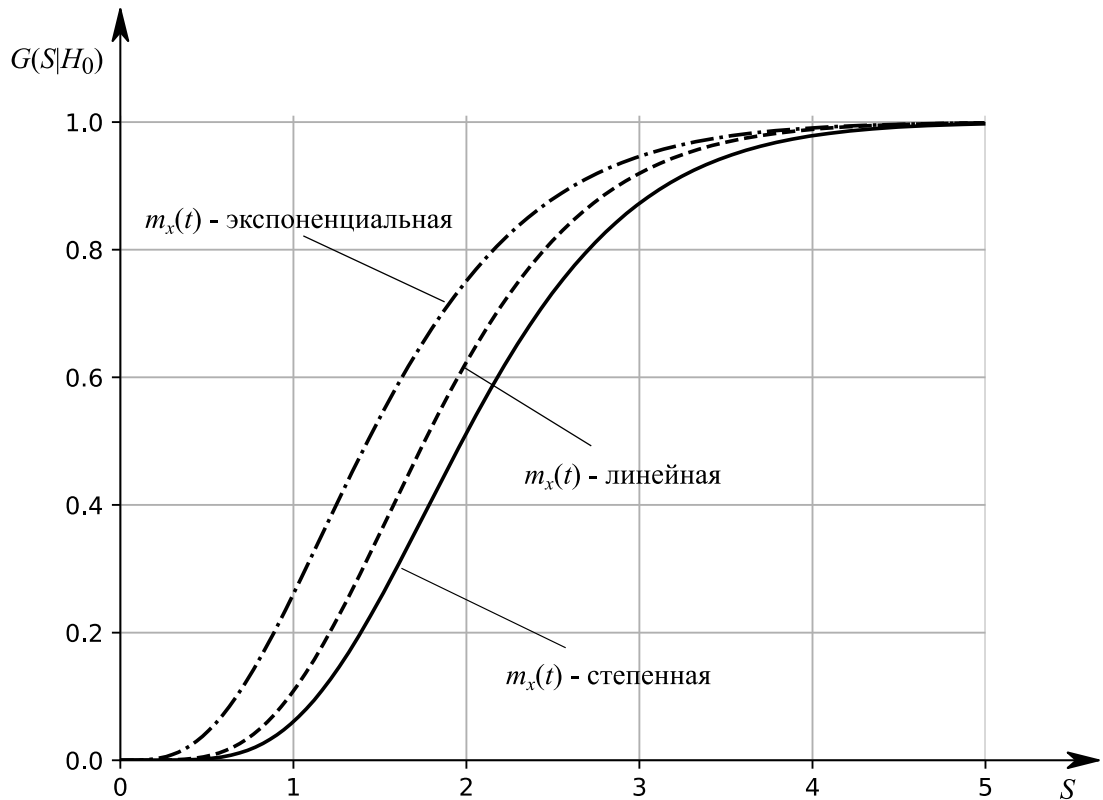


Рисунок 3.2 – Эмпирические функции распределения статистики Колмогорова при справедливости сложных гипотез о виде гамма-модели с различными функциями тренда показателя деградации

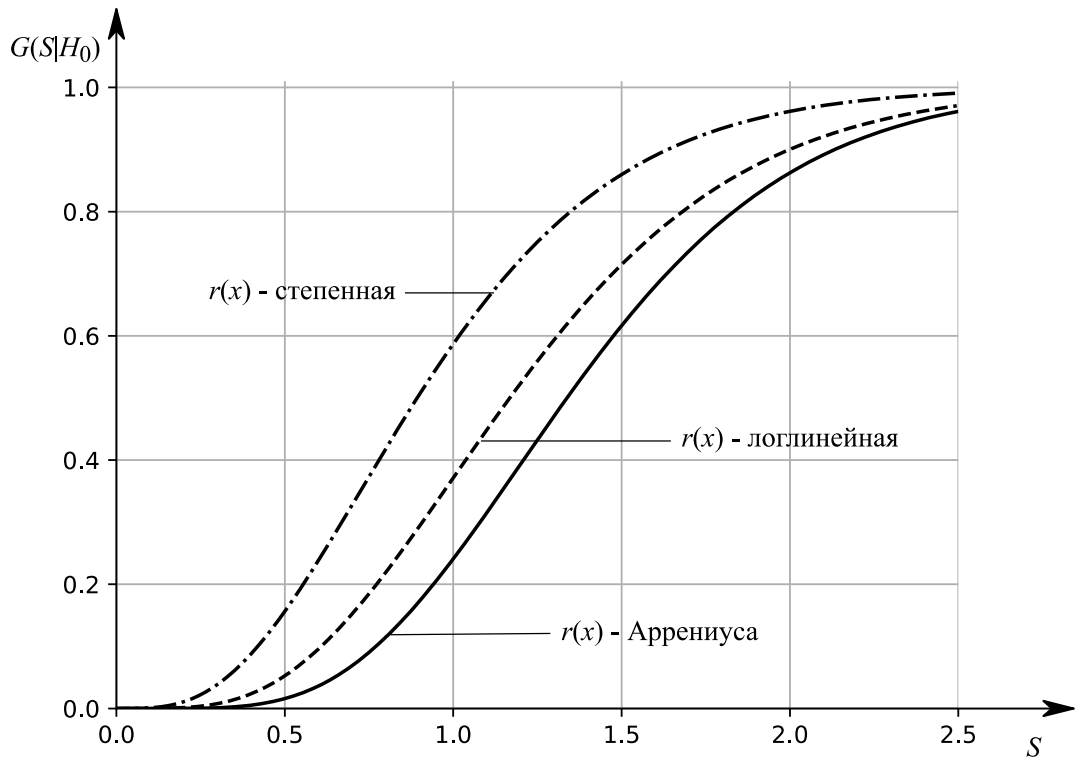


Рисунок 3.3 – Эмпирические функции распределения статистики Колмогорова при справедливости сложных гипотез о виде гамма-модели с различными функциями от ковариат

Как видно из рисунков 3.2 – 3.3, распределение статистики критерия существенно зависит как от выбора функции влияния объясняющих переменных, так и от выбора функции тренда. Аналогичные результаты были получены для критериев типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Исследование распределений статистики критерия типа Колмогорова для деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда вида (1.5) и логлинейной функцией от ковариат вида (1.1) в зависимости от выбора значений замеров по времени и значений ковариат проводилось при трех различных планах эксперимента:

- План 1:
  - ковариата  $x \in \{2.0, 5.0\}$ ;

- $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .
- План 2:
  - ковариата  $x \in \{10, 15\}$ ;
  - $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
  - для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{0, 5.0, 10.0, \dots, 45\}$ .
- План 3:
  - ковариата  $x \in \{50, 75\}$ ;
  - $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
  - для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{0, 3.0, 7.0, 9.0, \dots, 39.0\}$ .

Полученные эмпирические распределения статистик Колмогорова представлены на рисунке 3.4. Рисунок 3.4 демонстрирует существенную зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от выбранных планов эксперимента. Аналогичные результаты были получены для критериев типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Тем самым, проведенные исследования подтверждают зависимость распределения статистик непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга от значения параметра формы гамма-распределения при проверке гипотезы о виде деградационной гамма-модели. Как показано в [91], в отличие от случая проверки гипотезы о гамма-распределении, распределения статистик

непараметрических критериев согласия при проверке нормальности не зависят от значений параметров сдвига и масштаба.

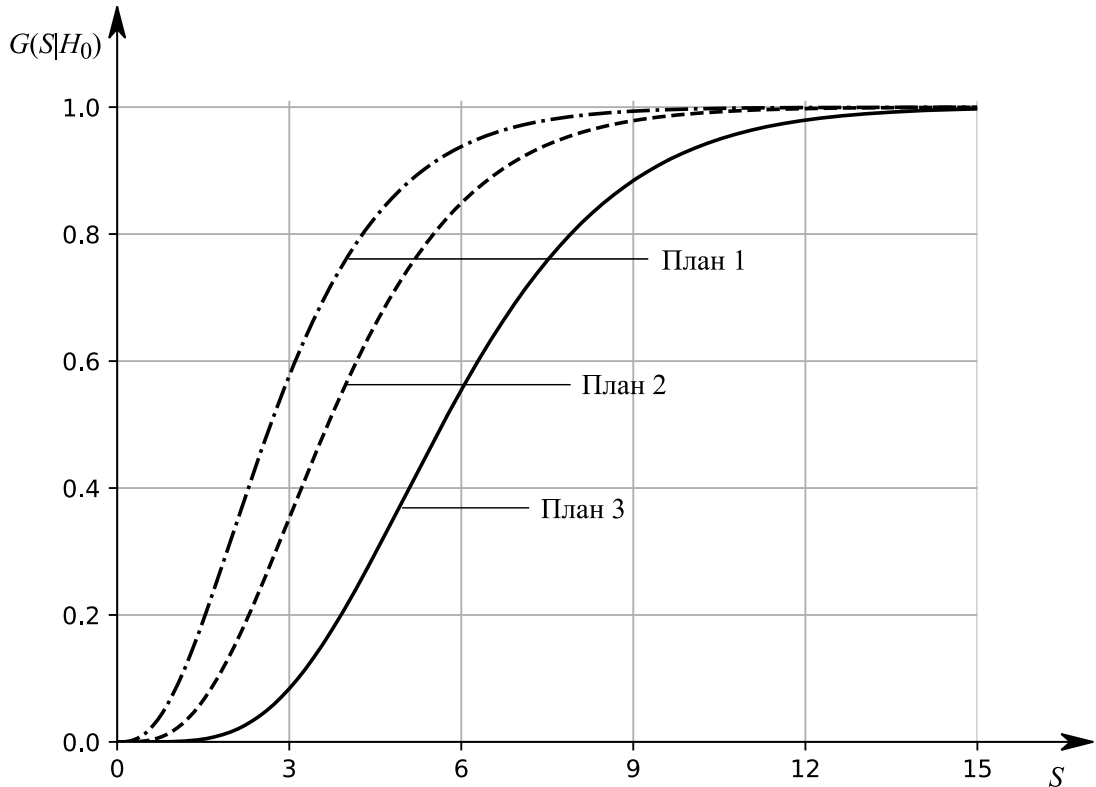


Рисунок 3.4 - Эмпирические распределения статистики критерия типа Колмогорова при справедливости сложных проверяемых гипотез, построенные при различных значениях замеров по времени и значениях ковариат

Тем не менее, при проверке сложной гипотезы о виде винеровской деградационной модели распределения статистик критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга оказались зависящими от вида функции тренда, вида функции от ковариат и плана эксперимента. В качестве примера на рисунках 3.5, 3.6 представлены эмпирические распределения статистики Колмогорова при проверке сложной гипотезы о винеровской деградационной модели при различных функциях тренда и различных функциях от ковариат, соответственно.

Для исследования рассмотрен следующий план эксперимента:

- ковариата  $x \in \{0.6, 0.8\}$ ;



- $n = 30$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

На рисунке 3.5 представлены эмпирические функции распределения статистики Колмогорова для винеровских моделей с линейной (1.5), степенной (1.6) и экспоненциальной (1.7) функциями тренда и функцией Аррениуса вида (1.3) в качестве функции от ковариат.

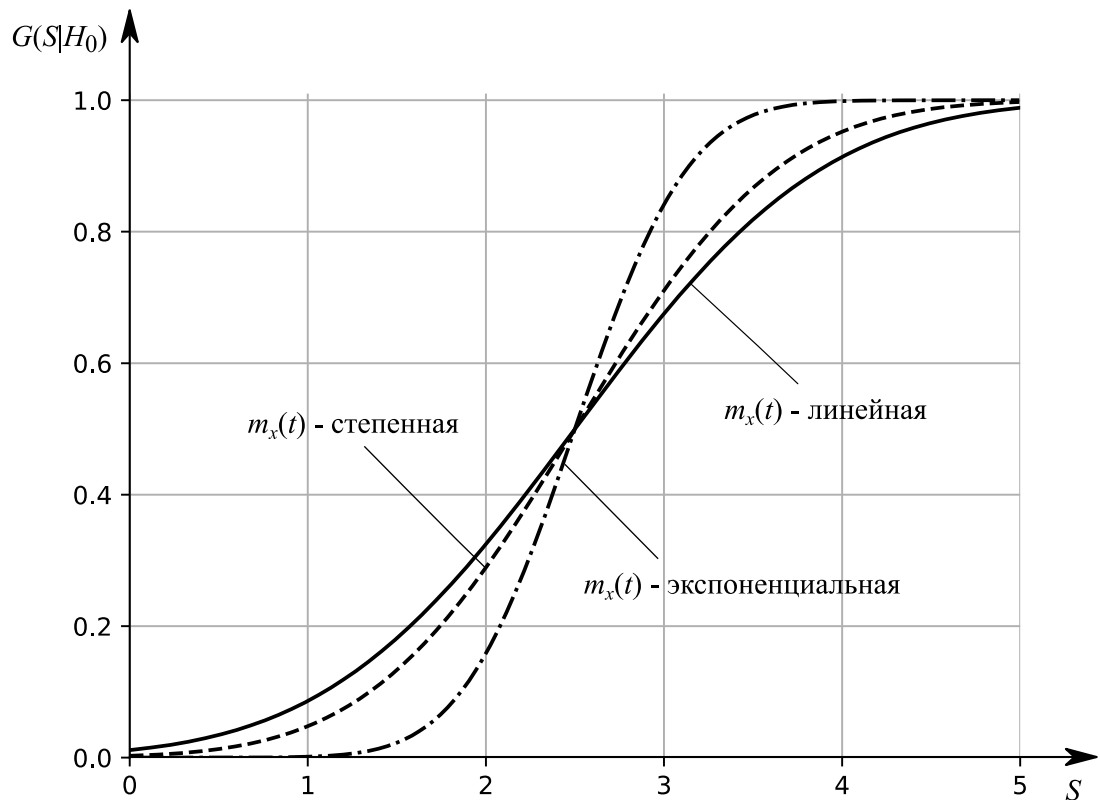


Рисунок 3.5 – Эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова при справедливости сложной проверяемой гипотезы для винеровской деградационной модели в зависимости от выбора функции тренда

На рисунке 3.6 представлены эмпирические функции распределения статистики Колмогорова для винеровских моделей с логлинейной (1.1),

степенной (1.2) функциями и функцией Аррениуса (1.3) в качестве функции от ковариат, а также линейной функцией тренда (1.5).

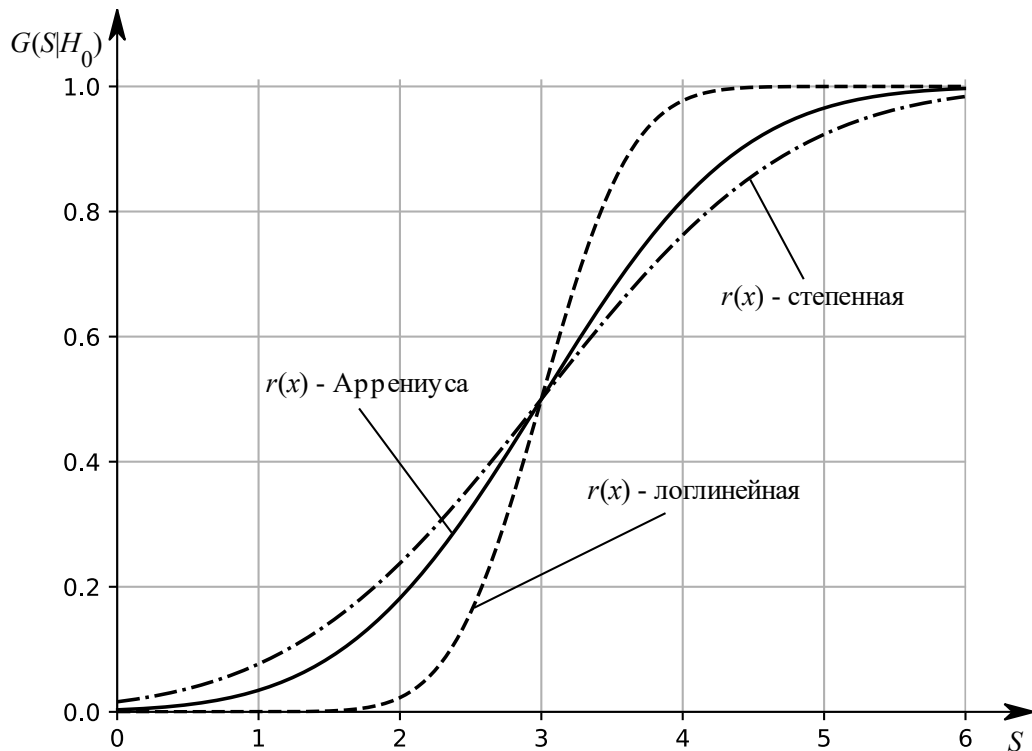


Рисунок 3.6 – Эмпирические функции распределения статистики критерия типа Колмогорова при справедливости сложной проверяемой гипотезы для винеровской деградационной модели в зависимости от выбора функции влияния объясняющих переменных

Из рисунков 3.5, 3.6 видно, что выбор функции тренда и функции от ковариат влияет на распределение статистики критерия типа Колмогорова при проверке сложной гипотезы о виде винеровской деградационной модели. Аналогичные результаты были получены для критериев типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что применение рассматриваемых критериев согласия для проверки сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровской моделей возможно при моделировании распределений статистик в интерактивном режиме проверки гипотезы. В связи с этим, сформулирован алгоритм

моделирования распределений статистик, позволяющий осуществлять проверку гипотезы о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей:

1. По исходной выборке приращений показателя деградации найти ОМП параметров деградиционной модели, соответствующей гипотезе  $H_0$ , по формуле (1.13) для деградиционной гамма-модели или (1.14) для винеровской деградиционной модели.

2. На основе деградиционной модели с полученными оценками параметров сгенерировать выборку приращений  $\mathbf{X}_n$  в соответствии с заданным планом эксперимента (при заданных значениях ковариаты, количествах объектов, соответствующих различным значениям ковариаты, и моментах времени измерения показателя деградации).

3. По полученной выборке  $\mathbf{X}_n$  оценить параметры модели методом максимального правдоподобия по формуле (1.13) для деградиционной гамма-модели или (1.14) для винеровской деградиционной модели.

4. Сформировать выборку  $\mathbf{R}_N$  по формуле (1.15) для деградиционной гамма-модели или (1.16) для винеровской деградиционной модели.

5. По выборке  $\mathbf{R}_N$  вычислить значение статистики непараметрического критерия согласия (статистики  $S_K$ ,  $S_\omega$  или  $S_\Omega$ ) в соответствии с (3.1), (3.2) или (3.3).

6. Повторяя пункты 2-5  $M$  раз, получить выборку статистик объёма  $M$ , на основе которой построить эмпирическую функцию распределения  $G_M(s | H_0)$ ,  $s \in \mathbf{R}$ .

По полученному эмпирическому распределению  $G_M(s | H_0)$  вычисляется оценка достигнутого уровня значимости  $\alpha_N = 1 - G_M(S_N | H_0)$ , где  $S_N$  – значение соответствующей статистики, полученное по исходной выборке, по которой проверяется гипотеза  $H_0$ . Если  $\alpha_N$  не превышает заданного уровня значимости  $\alpha$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается.

### 3.3 Сравнительный анализ мощности критериев согласия для деградационных моделей

Мощностью критерия называется вероятность отвергнуть неверную гипотезу при уровне значимости  $\alpha$ :  $1 - G(S_\alpha | H_1)$ , где  $S_\alpha$  – критическое значение статистики критерия. Очевидно, что чем больше мощность критерия, тем выше его способность различать близкие конкурирующие гипотезы [847, 86].

Исследование мощности критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для деградационных гамма- и винеровской моделей проводилось при различных видах конкурирующих гипотез в зависимости от объема выборки приращений показателя деградации.

В таблицах 3.2 – 3.5 представлены оценки мощности рассматриваемых критериев согласия при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о виде деградационной гамма-модели с линейной функцией тренда (1.5), логлинейной функцией от ковариат (1.1) при  $\alpha = 0.01$  относительно различных конкурирующих гипотезах:

1.  $H_1^1$ : Деградационная модель с распределением приращений, соответствующим распределению Вейбулла с функцией плотности

$$f(x; \theta_0, \theta_1) = \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}}, \quad x \geq 0,$$

где  $\theta_1 = m_x(t + \Delta t) - m_x(t)$  – параметр масштаба,  $\theta_0 > 0$  – параметр формы [4, 102]. В качестве функции тренда рассматривалась линейная функция вида (1.5) с логлинейной функцией от ковариат вида (1.1) при  $\theta_0 = 0.8$ ,  $\gamma_0 = 0.5$ ,  $\beta = 0.8$ ;

2.  $H_1^2$ : Деградационная гамма-модель со степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат вида (1.1),  $\sigma = 1$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 0.8$ ;

3.  $H_1^3$ : Деградационная гамма-модель с линейной функцией тренда (1.5) и функцией Аррениуса (1.3) в качестве функции от ковариат при  $\sigma = 1$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $\beta = 1.4$ ;

4.  $H_1^4$ : Деградационная гамма-модель со случайным параметром, линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат вида (1.1) при  $\delta = 1$ ,  $\eta = 1.5$ ,  $\gamma_0 = 0.5$ ,  $\beta = 0.8$ .

Для исследования рассмотрен следующий план эксперимента:

- ковариата  $x \in \{1, 2\}$ ;
- $n = 10$  и  $n = 20$  объектов случайным образом отбираются в 2 равные группы, соответствующие разным значениям ковариаты;
- для каждого объекта замеры показателя деградации проводятся в моменты времени  $T = \{t_i + i, i = \overline{0, k-1}\}$  для  $k = 10$  и  $T = \{t_i + i \cdot 0.5, i = \overline{1, k}\}$  для  $k = 20$  при  $t_0 = 0$ .

При моделировании распределений статистик при верной гипотезе  $H_0$  значения параметров деградационной гамма-модели задавались следующим образом:  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.8$ . Количество  $M$  моделируемых выборок, по которым исследовалась мощность критериев, было взято равным 10000.

В таблицах 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 представлены оценки мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при проверке сложной гипотезы  $H_0$  против конкурирующих гипотез  $H_1^1$ ,  $H_1^2$ ,  $H_1^3$  и  $H_1^4$ , соответственно.

Таблица 3.2 – Оценки мощности критериев согласия для гамма-модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^1$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.48	0.71	0.73
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.58	0.84	0.84
Андерсона-Дарлинга	0.61	0.79	0.82

Таблица 3.3 – Оценки мощности критериев согласия для гамма-модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^2$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.77	0.88	0.89
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.83	0.92	0.93
Андерсона-Дарлинга	0.84	0.98	0.98

Таблица 3.4 – Оценки мощности критериев согласия для гамма-модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^3$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.62	0.78	0.79
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.68	0.86	0.86
Андерсона-Дарлинга	0.72	0.83	0.85

Таблица 3.5 – Оценки мощности критериев согласия для гамма-модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^4$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.54	0.59	0.60
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.59	0.60	0.61
Андерсона-Дарлинга	0.67	0.62	0.64

Как видно из таблиц 3.2 – 3.5, с ростом объема выборки мощность критериев увеличивается, при этом более предпочтительными по мощности для всех рассмотренных пар конкурирующих гипотез оказались критерии типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга.

Аналогично проведем исследование мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и

Андерсона-Дарлинга при проверке сложной гипотезы  $H_0$ , соответствующей винеровской деградиационной модели со степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат вида (1.1) с параметрами  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим следующие конкурирующие гипотезы:

1.  $H_1^1$ : Деградиационная модель с распределением приращений, соответствующим логистическому распределению с функцией плотности:

$$f(x; \theta_0, \theta_1) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} e^{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}} \left/ \left( 1 + e^{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}} \right)^2 \right., \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где  $\theta_1 = m_x(t + \Delta t) - m_x(t)$  – параметр масштаба,  $\theta_0$  – параметр сдвига [4, 102]. В качестве функции тренда рассматривалась степенная функция вида (1.6) с логлинейной функцией от ковариат вида (1.1), с параметрами  $\theta_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ;

2.  $H_1^2$ : Винеровская деградиационная модель с линейной функцией тренда (1.5) и логлинейной функцией от ковариат (1.1), с параметрами  $\gamma_0 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ ;

3.  $H_1^3$ : Винеровская деградиационная модель со степенной функцией тренда (1.6), функцией Аррениуса (1.3) в качестве функции от ковариат, с параметрами  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\sigma = 1$ .

4.  $H_1^4$ : Винеровская деградиационная модель со случайным параметром, степенной функцией тренда (1.6) и логлинейной функцией от ковариат вида (1.1) с параметрами,  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$ .

Для исследования мощности критериев согласия в случае винеровской деградиационной модели используем план эксперимента, описанный выше для деградиационной гамма-модели.

В таблицах 3.6 – 3.9 представлены оценки мощности непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке сложной гипотезы  $H_0$  о виде винеровской деградиционной модели против конкурирующих гипотез  $H_1^1$ ,  $H_1^2$ ,  $H_1^3$  и  $H_1^4$ , соответственно.

Таблица 3.6 – Оценки мощности критериев согласия для винеровской модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^1$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.70	0.75	0.70
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.71	0.83	0.84
Андерсона-Дарлинга	0.71	0.83	0.84

Таблица 3.7 – Оценки мощности критериев согласия для винеровской модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^2$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.32	0.535	0.58
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.49	0.70	0.72
Андерсона-Дарлинга	0.52	0.72	0.73

Таблица 3.8 – Оценки мощности критериев согласия для винеровской модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^3$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.35	0.41	0.45
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.48	0.58	0.60
Андерсона-Дарлинга	0.50	0.61	0.65

Таблица 3.9 – Оценки мощности критериев согласия для винеровской модели в случае конкурирующей гипотезы  $H_1^4$

Критерии согласия	$n = 20, k = 10$	$n = 20, k = 20$	$n = 40, k = 10$
Колмогорова	0.27	0.29	0.30
Крамера-Мизеса-Смирнова	0.35	0.40	0.40
Андерсона-Дарлинга	0.38	0.43	0.44

Из таблиц 3.6 – 3.9 можно сделать вывод, что мощность рассмотренных критериев согласия увеличивается с ростом объема



выборки, и для всех рассмотренных пар конкурирующих гипотез более предпочтительными по мощности оказались критерии типа Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлингга.

### **Выводы по главе 3**

В данной главе проведено исследование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке простых и сложных гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей. Показано, что при проверке сложных гипотез распределения статистик рассмотренных критериев зависят от вида проверяемой гипотезы: выбора функции тренда, функции от ковариат, а также от плана эксперимента.

Разработан алгоритм проверки сложных гипотез о виде деградиционных гамма- и винеровской моделей с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлингга. Показано, что на рассмотренных объемах выборок данные критерии способны различать близкие конкурирующие гипотезы, соответствующие различным видам деградиционных моделей (различным распределениям приращений деградиционного показателя, функциям тренда и функциям от ковариат).

## ГЛАВА 4 ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ

В данной главе представлено описание разработанных программных модулей для работы с деградационными моделями, использование данных модулей, а также результатов диссертационного исследования при решении задач анализа надежности арсенид-галлиевых лазеров, углеродистых резисторов и турбовентиляторных двигателей. Результаты решения задач, представленные в данной главе, опубликованы в [4, 9, 13, 15, 101, 108, 109].

### 4.1 Описание разработанного программного обеспечения

Полученные результаты настоящего диссертационного исследования реализованы в модуле программной системы LiTiS [110]. LiTiS (Life Time Statistics) – пакет статистического анализа данных типа времени жизни, который позволяет строить вероятностные модели надежности и выживаемости. Ядро программного комплекса и все его составные части написаны на языке программирования C# с использованием технологии Windows Presentation Foundation (WPF). В программном пакете реализованы модули оценивания параметров, проверки гипотез о виде распределения и построения регрессионных моделей по данным типа времени жизни. Ранее построение моделей основывалось на данных об отказах тестируемых изделий. В данной версии реализованы алгоритмы построения моделей и расчета оценок надежности на основе данных о деградационных процессах.

Разработанный программный модуль включает в себя классы:

- *DegradationModel*,
- *DegradationWithCovariateModel*,
- *DegradationWithCovRandomEffectsModel*,
- *GammaDegradationWithCovariateModel*,
- *GammaDegradationWithCovRandomEffectsModel*,
- *WienerDegradationWithCovariateModel*,

– *WienerDegradationWithCovRandomEffectsModel*.

Базовый класс *DegradationModel* предназначен для построения деградационной модели для данных без ковариат. На рисунке 4.1 представлена структура класса и схема взаимодействия с классами *DegradationLikelihoodFunction* и *ObservationWithDegradation*, отвечающими за определение функции правдоподобия деградационной модели и создание выборки измерений деградационного показателя, соответственно.

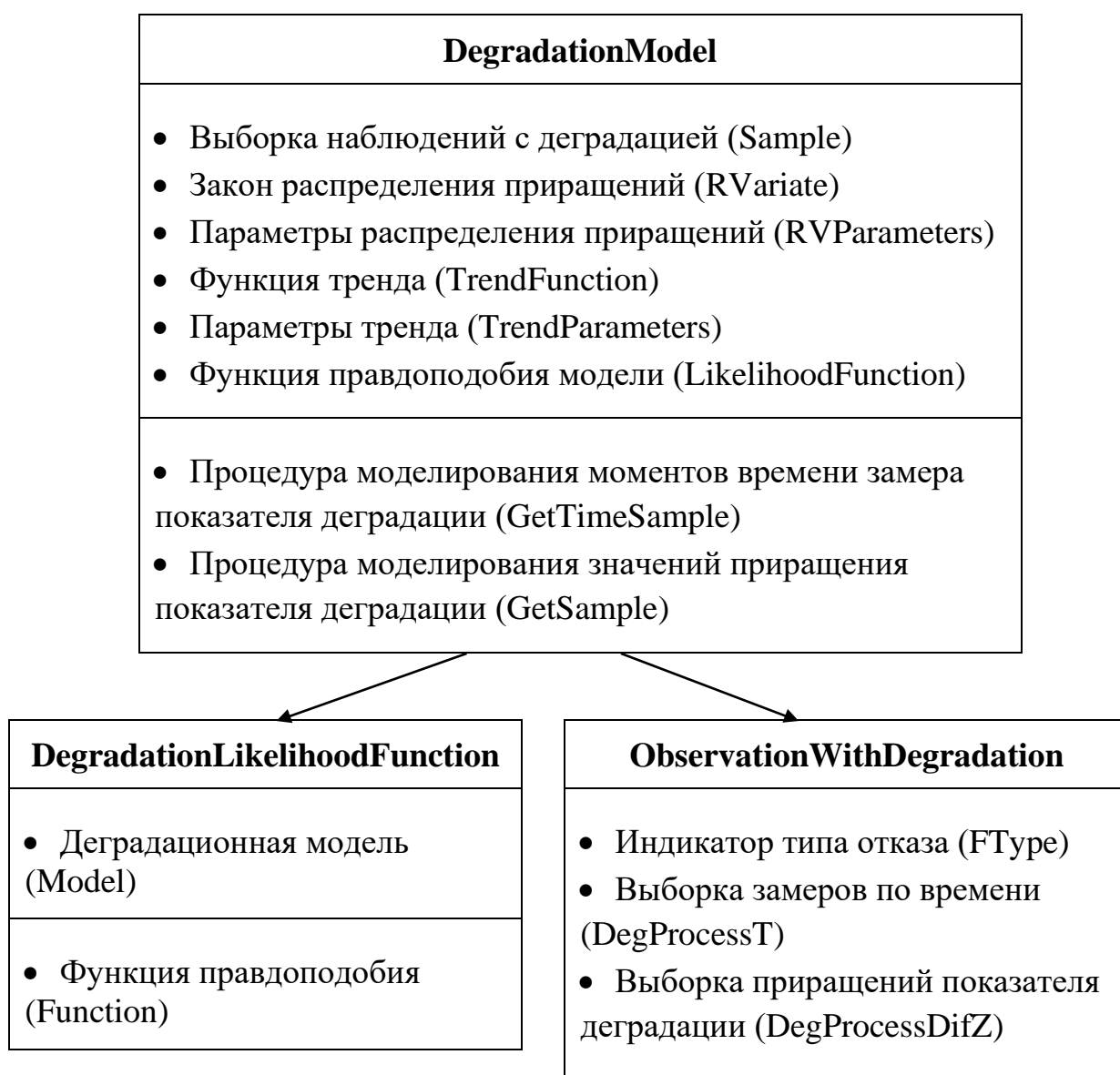


Рисунок 4.1 – Структура *DegradationModel* и схема взаимодействия с другими классами

Класс *DegradationWithCovariateModel* является наследником класса *DegradationModel* и предназначен для построения деградационной модели с учетом объясняющих переменных (ковариат). Структура класса *DegradationWithCovariateModel* представлена на рисунке 4.2.

<b>DegradationWithCovariateModel</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выборка наблюдений с деградацией (Sample)</li> <li>• План эксперимента (Plan)</li> <li>• Закон распределения приращений (RVariate)</li> <li>• Параметры распределения приращений (RVParameters)</li> <li>• Функция тренда (TrendFunction)</li> <li>• Параметры тренда (TrendParameters)</li> <li>• Функция от ковариат (CovariateFunction)</li> <li>• Регрессионные параметры (RegressParameters)</li> <li>• Функция правдоподобия модели (LikelihoodFunction)</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Процедура моделирования моментов времени замера показателя деградации (GetTimeSample)</li> <li>• Процедура моделирования значений приращения показателя деградации (GetSample)</li> </ul>

Рисунок 4.2 – Структура *DegradationWithCovariateModel*

Аналогично, класс *DegradationWithCovRandomEffectModels* является наследником класса *DegradationWithCovariateModel* и отвечает за построение деградационной модели со случайным параметром и учетом объясняющих переменных (ковариат). Структура данного класса представлена на рисунке 4.3.

<b>DegradationWithCovRandomEffectsModel</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выборка наблюдений с деградацией (Sample)</li> <li>• План эксперимента (Plan)</li> <li>• Закон распределения приращений (RVariate)</li> <li>• Параметры распределения приращений (RVParameters)</li> <li>• Функция тренда (TrendFunction)</li> <li>• Параметры тренда (TrendParameters)</li> <li>• Функция от ковариат (CovariateFunction)</li> <li>• Регрессионные параметры (RegressParameters)</li> <li>• Распределение случайного параметра (RPDistribution)</li> <li>• Параметры распределения случайного параметра (RPPParameters)</li> <li>• Функция правдоподобия модели (LikelihoodFunction)</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Процедура моделирования моментов времени замера показателя деградации (GetTimeSample)</li> <li>• Процедура моделирования значений приращения показателя деградации (GetSample)</li> </ul>

Рисунок 4.3 – Структура DegradationWithCovRandomEffectsModel

Реализация деградационной гамма-модели представлена в классе *GammaDegradationWithCovariateModel*, который является наследником класса *DegradationWithCovariateModel*, где в качестве распределения приращений показателя деградации зафиксировано гамма-распределение.

Класс *GammaDegradationWithCovRandomEffectsModel* является наследником класса *DegradationWithCovRandomEffectsModel* и отвечает за построение деградационной гамма-модели со случайным параметром.

Аналогично предыдущему классу распределение приращений здесь зафиксировано как гамма-распределение.

Реализация винеровской деградиционной модели представлена в классе *WienerDegradationWithCovariateModel*, который является наследником класса *DegradationWithCovariateModel*, где распределение приращений показателя деградации выбрано нормальным.

Класс *WienerDegradationWithCovRandomEffectsModel* является наследником класса *DegradationWithCovRandomEffectsModel* и отвечает за построение винеровской деградиционной модели со случайным параметром. Распределение приращений здесь зафиксировано как нормальное распределение.

Для всех классов, реализующих деградиционные гамма- и винеровские модели, вид модели учтен в реализации функции правдоподобия и моделировании выборки приращений.

Исследования, представленные в главах 1 – 3 настоящей диссертационной работы, проводились с использованием реализованного модуля и, непосредственно, классов *GammaDegradationWithCovariateModel*, *GammaDegradationWithCovRandomEffectsModel*, *WienerDegradationWithCovariateModel*, *WienerDegradationWithCovRandomEffectsModel*, а также других модулей, реализованных в системе LiTiS.

Основные операции, необходимые для построения деградиционной модели, были вынесены в пользовательский интерфейс программной системы LiTiS. На панели главного окна, представленной на рисунке 4.4, была создана вкладка "Деградиционные модели", а в файле *MainWindow.xaml* добавился тег `<ribbon:RibbonTab>` с описанием новой вкладки:

```
<ribbon:RibbonTab Header="{x:Static p:Resources.DegradationModel}"
  KeyTip="D">
  ...
</ribbon:RibbonTab>
```

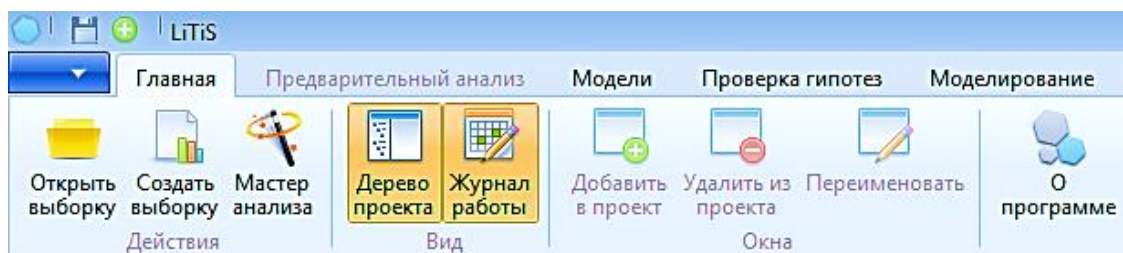


Рисунок 4.4 – Панель главного окна приложения

При выборе данной вкладки появляется панель для работы с деградационной моделью. Для группировки операций при формировании панели использовался тег `<ribbon:RibbonGroup>`. В группе "Деградационные модели", представленной на рисунке 4.5, добавлены кнопки "Без ковариат" для создания деградационной модели без ковариат, "С ковариатами" – для модели с ковариатами, "Со случайным эффектом" – для модели со случайным параметром, а также операции "Оценивание параметров", "Идентификация распределения" и "Идентификация тренда".

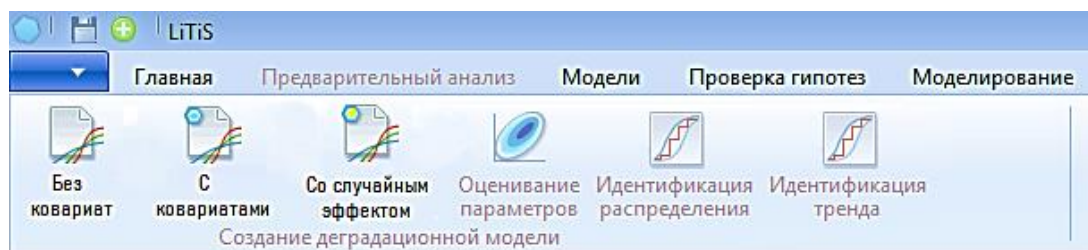


Рисунок 4.5 – Вкладка группы «Деградационные модели»

При нажатии на кнопку "Без ковариат" появляется окно для создания деградационной модели без ковариат, представленное на рисунке 4.6, где можно выбрать вид модели (деградационные гамма- или винеровская модели) и вид функции тренда.

В данном окне расположены кнопки загрузки или создания исходной выборки, список доступных моделей для выбора, список доступных функций тренда, включающие функции от ковариат, и их параметры. Размещение объектов в выбранном окне описывается в файле *DegradationModelControl.xaml*.

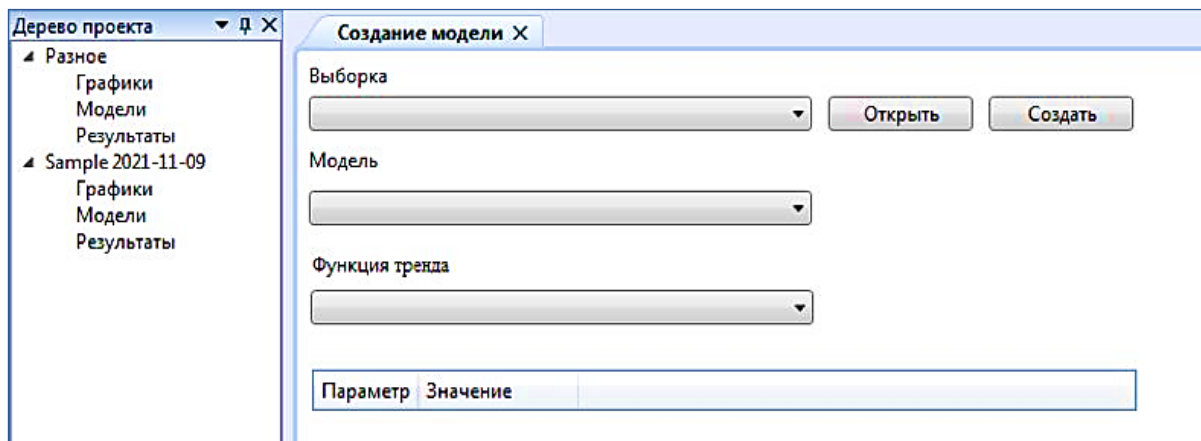


Рисунок 4.6 – Окно для создания деградационной модели

При изменении элементов-составляющих модели, появляется элемент, показывающий, что модель была изменена, а также кнопки для сохранения и отмены изменений, представленные на рисунке 4.7:

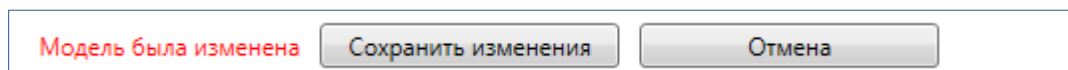


Рисунок 4.7 – Кнопки для сохранения и отмены изменений редактируемой модели

Действия, которые будут выполнены при создании модели в данном окне, описаны в файле *DegradationModelControl.cs*. Аналогичный функционал реализован для модели с ковариатами и модели со случайным параметром.

Для осуществления дальнейшей работы с моделью реализовано добавление объекта модели в проект, где становится доступным функционал для проведения оценивания параметров модели и проверки гипотезы о виде модели.

## 4.2 Построение деградационной гамма-модели для арсенид-галлиевых лазеров

Рассмотрим пример построения деградационной модели для данных о деградации арсенид-галлиевых (GaAs) лазеров [26, 94]. Данные устройства



представляют собой полупроводниковые лазеры, созданные на основе соединения галлия и мышьяка, широко применяются в медицине и телекоммуникационных системах. По мере старения GaAs лазеры потребляют все больший ток для поддержания заданного уровня светового потока. Устройство считается отказавшим, когда потребляемый им ток на 10% превысит номинальное значение. Набор данных представлен в Приложении А.1.

Ускоренным испытаниям на надежность в течение 4000 часов при повышенной до 80° С температуре окружающей среды было подвергнуто 15 лазеров. За время испытаний 3 лазера вышли из строя. Отказы, отвечающие сформулированному выше критерию, произошли при измерениях показателя деградации на момент 3374, 3521 и 3781 часов. В соответствии с предъявляемыми требованиями, данные лазеры должны работать безотказно не менее 200 тысяч часов в течение 20 лет при температуре воздуха 20° С. Исходя из предшествующего опыта, инженеры полагали, что повышение температуры окружающей среды до 80° С ускоряет наступление отказов в 40 раз (консервативная оценка). Иными словами, для достижения требуемых показателей необходимо оценить надежность при наработке  $200000/40 = 5000$  часов (эквивалент двадцатилетнего срока эксплуатации) [15, 94].

Исследованию данных о деградации арсенид-галлиевых лазеров посвящен широкий ряд научных публикаций, однако в большинстве источников выдвигаются только предположения о виде распределения приращений, и все последующие выводы сделаны на основе данных предположений. В работах авторов L.C. Tang, G.Y. Yang, M. Xie [45], C.M. Liao, S.T. Tseng [23] речь идет о винеровских деградационных процессах. В то же время предположения о гамма- и нормальном распределении приращений были сделаны авторами C.C. Tsai, S.T. Tseng, N. Balakrishnan [49]. Однако, первоначально необходимо принять решение о выборе типа

модели: есть ли в данном случае необходимость учитывать разброс значений показателя деградации от объекта к объекту? На рисунке 4.8 продемонстрированы графики изменения показателя деградации для тестируемых лазеров.

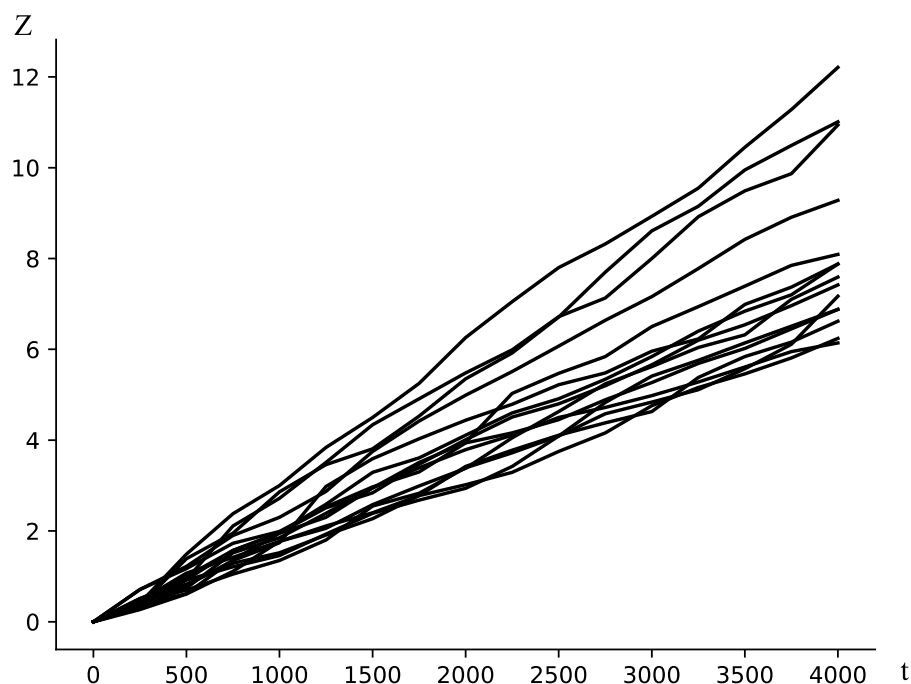


Рисунок 4.8 – Изменение деградационного показателя для тестируемых арсенид-галлиевых лазеров

Глядя на графики изменения показателя деградации для различных объектов, представленные на рисунке 4.8, действительно можно предположить разброс значений показателя деградации между объектами значим, а, следовательно, появляется необходимость проверки значимости дисперсии случайного параметра деградационной модели.

Следуя результатам, полученным в [49], в настоящей работе предполагается, что наблюдаемые деградационные процессы подчиняются гамма-модели с линейным трендом (1.5). Основываясь на результатах исследований, описанных в разделе 2.2, проверим гипотезу о незначимости дисперсии случайного параметра деградационной гамма-модели, используя предложенные критерии: критерий отношений правдоподобия и критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра. Результаты

оценивания параметров деградационных гамма-моделей, значения статистик и достигаемых уровней значимости рассмотренных критериев представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Значения оценок максимального правдоподобия параметров деградационных гамма-моделей, статистик и достигаемых уровней значимости критерия отношения правдоподобия и критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра

Деградационная гамма-модель	Оценки параметров модели	Критерий отношения правдоподобия		Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра	
		$\lambda_n$	$\alpha_n$	$d_n$	$\alpha_n$
Без случайного параметра	$\hat{\sigma}_n = 14.15,$ $\hat{\gamma}_n = 0.002$	24.24	$< 10^{-4}$	0.0001	$< 10^{-4}$
Со случайным параметром	$\hat{\delta}_n = 1.45,$ $\hat{\theta}_n = 28.86,$ $\hat{\gamma}_n = 0.002$				

Учитывая тот факт, что достигаемый уровень значимости меньше заданного уровня значимости  $\alpha = 0.05$  и для критерия отношения правдоподобия, и в случае критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра, гипотеза о незначимости дисперсии случайного параметра отвергается. Таким образом, можно сделать вывод о том, что модель со случайным параметром является более подходящей для данной задачи.

На рисунке 4.9 представлены графики функций надежности для деградационных гамма-моделей со случайным параметром и без (сплошная и пунктирная линии, соответственно), а также график эмпирической функции надежности. Значения эмпирической функции надежности получены по наработкам до отказа, вычисленным в результате линейной экстраполяции деградационных процессов лазеров, которые оставались в

рабочем состоянии на момент окончания испытаний, до пересечения с критическим уровнем.

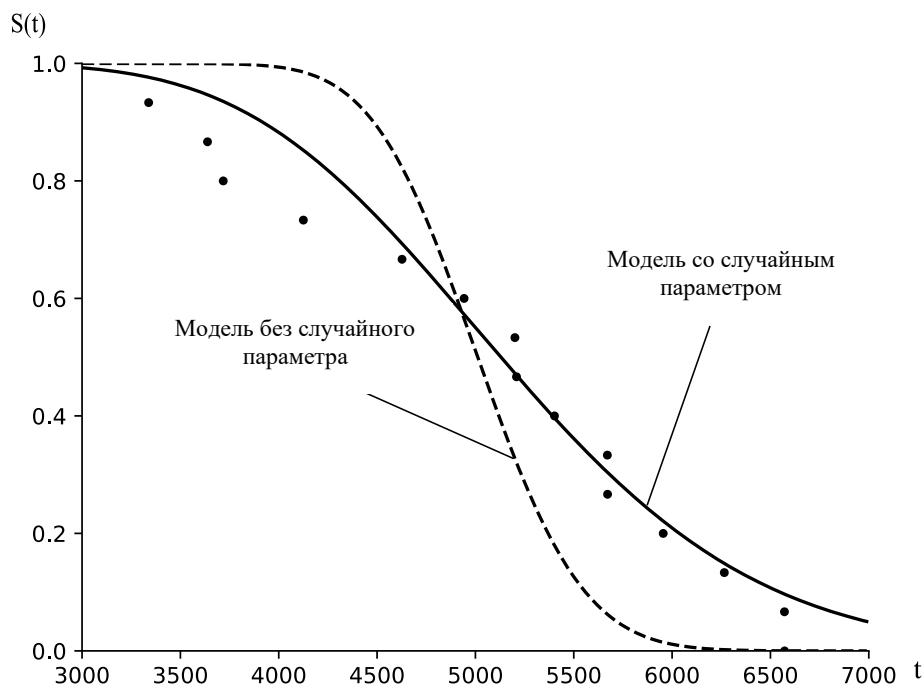


Рисунок 4.9 – Функции надежности для деградационных гамма-моделей и эмпирическая функция надежности

Как видно из рисунка 4.5, функция надежности деградационной гамма-модели со случайным параметром располагается значительно ближе к наблюдаемому распределению отказов, что демонстрирует, что модель со случайным параметром лучше описывает поведение исследуемых лазеров.

С учетом полученных значений параметров, согласно выражению (1.9) для оценки надежности деградационной гамма-модели, оцененная вероятность безотказной работы (надежность) данных лазеров на момент времени 5000 часов равна 0.67.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что предположения о надежности лазеров, сделанные инженерами-разработчиками, оказались неверными, так как по истечении 5000 часов ускоренных испытаний, как показал анализ полученных оценок надежности для деградационной гамма-модели, около 30% тестируемых лазеров выйдут из строя.

### 4.3 Построение деградационной гамма-модели для углеродистых резисторов

Рассмотрим пример построения деградационной модели по данным об исследовании углеродистых резисторов (Carbon Film resistors) [26]. Данные резисторы отличаются тем, что в качестве проводящего слоя они используют пленку пиролитического углерода. Отказ наступает в тот момент, когда процент превышения сопротивления достигает гарантийного значения (2% или 5% в зависимости от типа резисторов).

Ускоренным испытаниям на надежность в течение 8084 часов было подвергнуто 29 резисторов. План эксперимента представляет собой три группы по 9, 10 и 10 резисторов, соответственно. Исследования проводились при повышенной температуре: для первой группы резисторов температура составила 83°C, для второй – 133°C, для третьей – 173°C. Набор данных о деградации представлен в приложении А.2. Графики изменения показателя деградации продемонстрированы на рисунках 4.10 – 4.12, соответственно.

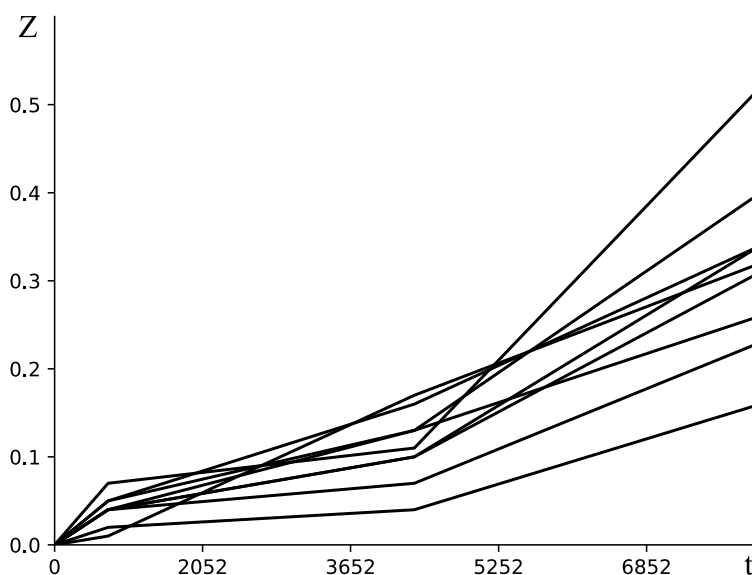


Рисунок 4.10 – Графики изменения показателя деградации для группы с повышенной температурой до 83°C

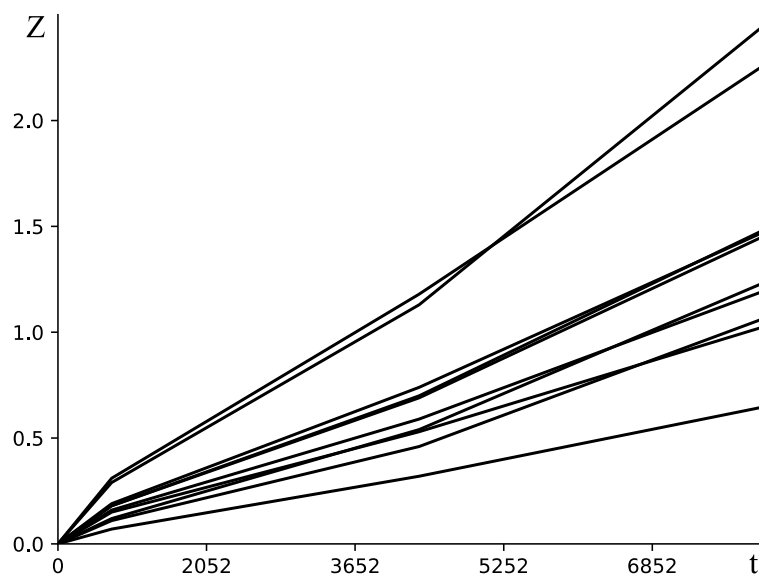


Рисунок 4.11 – Графики изменения показателя деградации для группы с повышенной температурой до 133°C

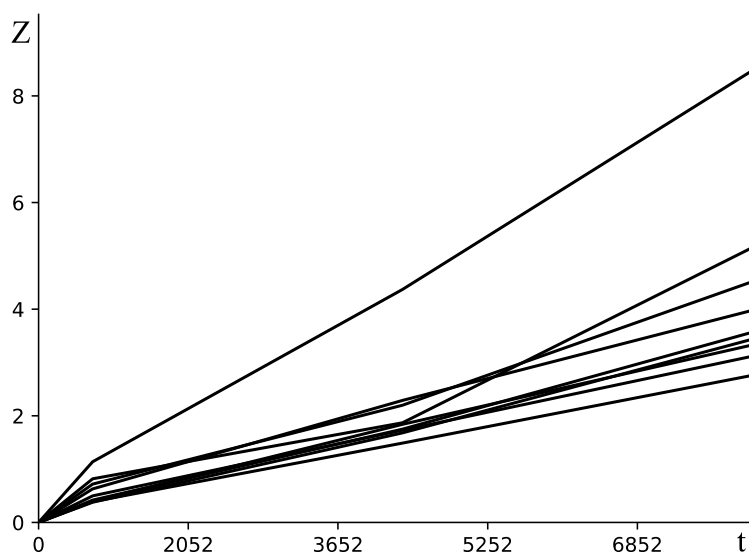


Рисунок 4.12 – Графики изменения показателя деградации для группы с повышенной температурой до 173°C

Поскольку все значения приращений показателя деградации являются положительными, разумно предположить, что деградационные процессы подчиняются гамма-модели с линейной функцией тренда (1.5) и функцией Аррениуса (1.3) в качестве функции от ковариат.

С использованием предложенных в разделе 2.2 критериев, проверим гипотезу о незначимости дисперсии случайного параметра. Результаты

оценивания параметров деградационных гамма-моделей и проверки гипотезы представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Значения оценок максимального правдоподобия параметров деградационных гамма-моделей, статистик и достигаемых уровней значимости критерия отношения правдоподобия и критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра

Деградационная гамма-модель	Оценки параметров модели	Критерий отношения правдоподобия		Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра	
		$\lambda_n$	$\alpha_n$	$d_n$	$\alpha_n$
Без случайного параметра	$\hat{\sigma}=2.71, \hat{\gamma}_0=2.05$ $, \hat{\beta} = -0.13$	1.78	0.31	0.79	0.23
Со случайным параметром	$\hat{\delta} = 0.35,$ $\hat{\eta} = 0.95,$ $\hat{\gamma}_0=1.98,$ $\hat{\beta} = -0.17$				

Учитывая тот факт, что достигаемый уровень значимости больше заданного уровня значимости  $\alpha = 0.05$  и для критерия отношения правдоподобия, и в случае критерия, основанного на оценке дисперсии случайного параметра, гипотеза о незначимости дисперсии случайного параметра не отвергается. Таким образом, можно сделать вывод о том, что модель без случайного параметра является более подходящей для данной задачи.

Проверим гипотезу о виде деградационной гамма-модели с помощью критериев типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга. Поскольку проверяемая гипотеза является сложной, то воспользуемся алгоритмом, сформулированным в разделе 3.2 настоящей диссертационной работы. Для критерия типа Колмогорова получены значение статистики  $S = 0.882$  и достигаемый уровень значимости

$\alpha_n = 0.42$ ; для критерия типа Крамера-Мизеса-Смирнова  $S = 0.073$ ,  $\alpha_n = 0.73$ ; для критерия Андерсона-Дарлинга  $S = 0.66$ ,  $\alpha_n = 0.59$ . Так как достигаемый уровень значимости  $\alpha_n > \alpha = 0.05$  для всех рассмотренных критериев, гипотеза о виде деградационной гамма-модели не отвергается.

В таблице 4.3 представлен прогноз времени безотказной работы для исследуемых резисторов при различной фиксированной температуре и различных критических уровнях процента превышения сопротивления.

Таблица 4.3 – Сравнение полученного времени прогноза для различных условий проведения эксперимента

Температура нагрева	Критический уровень $\tilde{z}$	Время безотказной работы $t_k$	Оценка надежности $S_x(t_k)$
125 °C	2%	1000ч	0.98
125 °C	5%	3000ч	0.99
60 °C	2%	8760ч (1год)	0.99

Как видно из таблицы 4.3, с вероятностью более 90% при температуре 125°C для 2% гарантийного превышения сопротивления время прогноза составит 1000 часов, а для 5% гарантийного превышения сопротивления – 3000 часов. При повышенной до 60°C температуре и проценте превышения сопротивления 2% резисторы проработают 8760 часов, что эквивалентно 1 году безотказной работы.

#### 4.4 Построение винеровской деградационной модели для турбовентиляторных двигателей

Проиллюстрируем работу критериев проверки значимости дисперсии случайного параметра для винеровской деградационной модели на примере данных о турбовентиляторных двигателях [18]. Турбовентиляторный двигатель представляет собой турбореактивный двигатель с высокой степенью двухконтурности. Данные двигатели широко применяются в



качестве силовых установок самолетов и требуют адекватного контроля и своевременного обслуживания для обеспечения безопасности полета [83].

В ходе эксперимента в [18] были получены результаты измерений с 18 датчиков по различным показателям для 100 двигателей. В качестве моментов измерения показателя деградации были выбраны условные единицы времени – циклы (от 100 до 300 циклов до наступления отказа). Набор данных представлен в [112].

Построение винеровской деградационной модели предполагает наличие некоторого скалярного деградационного показателя, который в полной мере характеризует состояние объекта. Для него должен быть известен критический уровень, при достижении которого фиксируется отказ объекта. Поэтому для получения единого деградационного показателя к полученным многомерным измерениям применен метод главных компонент. Критический уровень взят равным медиане, вычисленной по выборке значений деградационного показателя в момент отказа,  $\tilde{z} = 7.05$ . Значения деградационного показателя представлены на рисунке 4.13.

При построении деградационной модели в качестве функции тренда рассмотрим экспоненциальную функцию вида (1.7). Поскольку разброс значений деградационного показателя от объекта к объекту достаточно велик, проверим гипотезу о незначимости дисперсии случайного параметра с использованием предложенных в разделе 2.2 критериев. Результаты оценки параметров винеровских деградационных моделей, а также значения статистик и достигаемые уровни значимости рассмотренных критериев представлены в таблице 4.4.

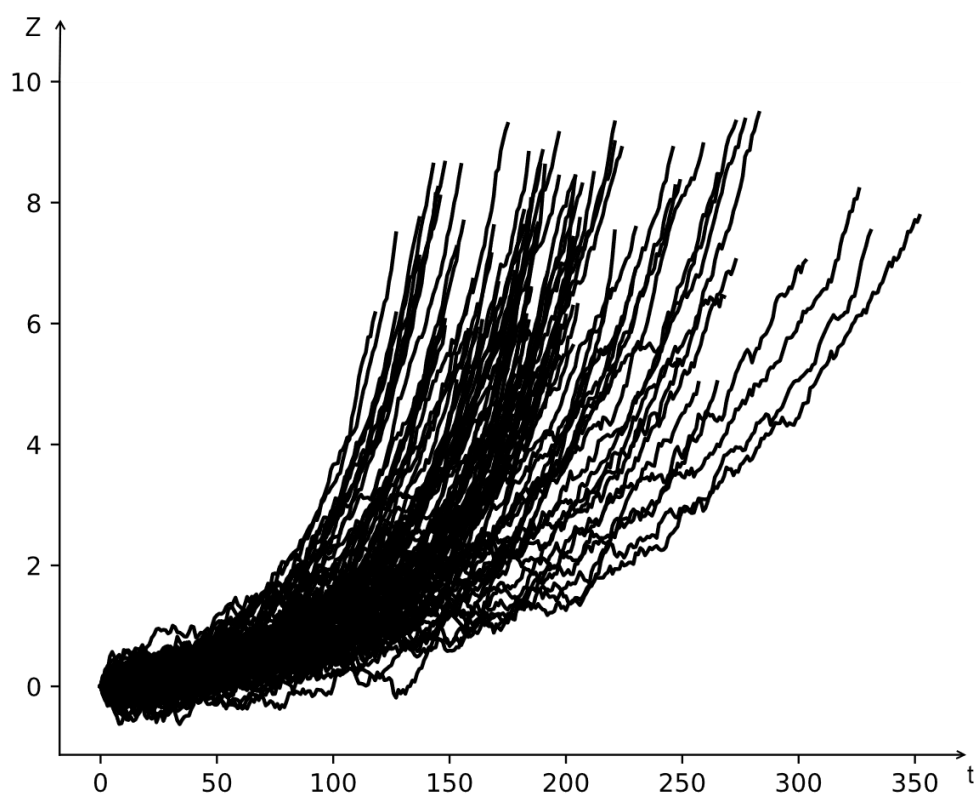


Рисунок 4.13 – График изменения деградационного показателя с течением времени для данных о турбовентиляторных двигателях

Таблица 4.4 – Значения оценок параметров винеровских деградационных моделей, статистик и достигаемых уровней значимости предложенных критериев проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра

Винеровская деградационная модель	Оценки параметров модели	Критерий отношения правдоподобия		Критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра	
		$\lambda_n$	$\alpha_n$	$d_n$	$\alpha_n$
Без случайного параметра	$\hat{\sigma} = 2.1,$ $\hat{\gamma} = (2.48, 0.07)$	1.3	$< 10^{-3}$	0.003	$< 10^{-4}$
Со случайным параметром	$\hat{\sigma} = 0.5,$ $\hat{\mu} = 2.31,$ $\hat{\delta} = 0.867,$ $\hat{\gamma}_1 = 0.008$				

Достижимый уровень значимости  $\alpha_n$  меньше заданного уровня значимости  $\alpha = 0.05$  для обоих критериев, значит гипотеза о незначимости дисперсии случайного параметра отвергается.

На рисунке 4.14 представлены графики функций надежности для винеровских деградационных моделей со случайным параметром и без (сплошная и пунктирная линии, соответственно), а также график эмпирической функции надежности. Значения времени наработки до отказа для эмпирической функции надежности получены следующим образом: по каждому деградационному процессу строилась выбранная функция тренда, далее в качестве времени наработки до отказа взято время, при котором тренд пересекает критический уровень деградации  $\tilde{z} = 7.05$ .

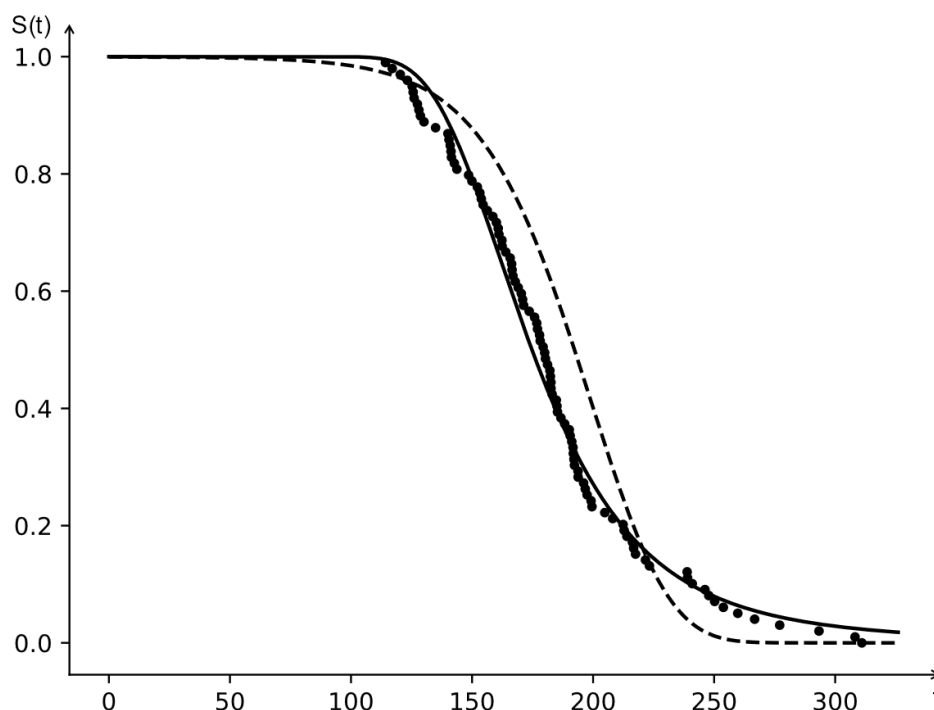


Рисунок 4.14 – Функции надежности моделей с случайным параметром и без, а также эмпирическая функция надежности отказов

Как видно из рисунка 4.14, функция надежности модели со случайным параметром располагается ближе к наблюдаемому распределению отказов, тем самым демонстрируя, что винеровская деградационная модель со

случайным параметром является более подходящей для описания поведения исследуемых турбовентиляторных двигателей.

#### **Выводы по главе 4**

В ходе выполнения диссертационного исследования разработаны модули программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» [110]. Разработанные модули позволяют оценивать неизвестные параметры и проверять гипотезы относительно деградиционных гамма- и винеровских моделей. Спроектирован пользовательский интерфейс, позволяющий проводить исследования статистических свойств ОМП параметров моделей и распределений статистик критериев проверки гипотез о незначимости дисперсии случайного параметра и о виде деградиционной модели.

Разработанные программные модули использовались при решении задач анализа надежности арсенид-галлиевых лазеров, углеродистых резисторов и турбовентиляторных двигателей. На основе построенных деградиционных моделей вычислены показатели надежности, такие как вероятность безотказной работы за заданную наработку, время безотказной работы при заданных условиях эксплуатации.

Результаты диссертационного исследования и разработанное программное обеспечение использовались в практике деятельности ООО «Эко-Томск» при решении задачи анализа надежности турбовентиляторных двигателей, что подтверждено актом внедрения, представленном в приложении Б.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с поставленными задачами получены следующие основные результаты:

1. В результате исследования статистических свойств ОМП параметров деградационных гамма- и винеровских моделей показано, что при небольшой величине дисперсии случайного параметра ОМП параметров тренда и регрессионного параметра оказываются точнее в случае модели без случайного параметра.

2. Впервые предложены статистические критерии проверки гипотезы о незначимости дисперсии случайного параметра деградационных моделей: критерий отношения правдоподобия, а также критерий, основанный на оценке дисперсии случайного параметра. Применение критериев предполагает использование для формирования вывода о результатах проверки распределений статистик, получаемых методами имитационного моделирования в интерактивном режиме проверки гипотезы. Показано, что в случае рассмотренных пар конкурирующих гипотез и объемов выборок предложенные критерии являются близкими по мощности.

3. Разработан алгоритм проверки сложных гипотез о виде деградационных гамма- и винеровской моделей с использованием непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга. Показано, что на рассмотренных объемах выборок данные критерии способны различать близкие конкурирующие гипотезы, соответствующие различным видам деградационных моделей.

4. На базе программной системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» разработан программный модуль, позволяющий строить деградационные гамма- и винеровские модели надежности, осуществлять проверку значимости дисперсии случайного параметра и гипотез о виде модели, а также проводить исследования

статистических свойств оценок параметров и распределений статистик критериев. Версия программной системы, в которую включен разработанный модуль, зарегистрирована в виде объекта интеллектуальной собственности как программа для ЭВМ [110].

Результаты диссертационного исследования и разработанная версия системы статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS» внедрены в практику деятельности ООО «Эко-Томск» и использовались для решения задачи анализа надежности турбовентиляторных двигателей, что подтверждено актом внедрения, представленном в приложении Б.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Anderson T.W. A test of goodness of fit / T.W. Anderson, D.A. Darling // Journal of the American Statistical Association, 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
2. Bagdonavicius V., Nikulin, M.S. Estimation in degradation models with explanatory variables / V. Bagdonavicius, M.S. Nikulin // Lifetime Data Analytics, 2001. – 7. – 17 pp.
3. Bordes L. Parametric inference in a perturbed gamma degradation process / L. Bordes, C. Paroissin, A. Salami // Preprint/Statistics – Probability Letters. – Pau, 2010 – P. 13.
4. Chetvertakova E. Alternatives for Wiener and gamma degradation models: method of selection / E. Chimitova, E. Chetvertakova // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA'2013, Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk : NSTU publ., 2013. – P. 77-82.
5. Chetvertakova E. The Construction of the Gamma Degradation Model with Covariates / E.S. Chetvertakova; research adviser E. V. Chimitova, language adviser K. V. Piottukh // Progress through Innovations : тез. гор. науч.-практ. конф. аспирантов и магистрантов, Новосибирск, 2 апреля 2015 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015.
6. Chetvertakova E.S. A comparison of the “fixed-effect” and “random-effect” gamma degradation models / E.S. Chetvertakova, E.V. Chimitova // Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach, AMSA'2015, 14–19 September 2015: Proceedings of the international workshop. – Novosibirsk, 2015. – pp.161-169.
7. Chetvertakova E. Testing Goodness-Of-Fit of the Gamma Degradation Model / E. Chimitova, E. Chetvertakova // Eighth International Workshop

- on Simulation (IWS 2015) : abs. of the intern. workshop, 21–25 Sept. 2015, Vienna (Austria), 2015.
8. Chetvertakova E. The Wiener degradation model in reliability analysis / E. Chetvertakova, E. Chimitova // 11 International forum on strategic technology (IFOST 2016) : proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. – Novosibirsk : NSTU, 2016. – Pt. 1. – P. 488-490
  9. Chetvertakova E.S. Statistical degradation models for reliability analysis in non-destructive testing / E.S. Chetvertakova, E.V. Chimitova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2017. – Vol. 189. – 6 pp.
  10. Chetvertakova E. The Wiener degradation model with random effects in reliability metrology / E. S. Chetvertakova, E. V. Chimitova // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI. – Glasgow : World Scientific, 2018. – P. 162–169.
  11. Chetvertakova E. S., Chimitova E. V. Goodness-of-fit testing for the degradation models in reliability analysis // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2018) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2018) : тр. 14 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 2–6 окт. 2018 г. : в 8 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2018. – Т. 1, ч. 4. – С. 45-48
  12. Chetvertakova E., Chimitova E., Osinceva E., Snetkov R. The Wiener degradation model in the analysis of the laser module ILPN-134 // Applied methods of statistical analysis. Statistical Computation and Simulation : proc. of the intern. workshop, Novosibirsk, 18–20 Sept. 2019. – Novosibirsk : NSTU, 2019. – P. 114-121.
  13. Chetvertakova E., Chimitova E. Testing significance of random effects for the gamma degradation model. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo



- universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], 2019 - Vol.49
14. Chimitova E.V. The construction of degradation trend using the "random-effect" models / E. V. Chimitova, E. S. Chetvertakova, A. V. Faddeenkov // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2016) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2016) : тр. 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. : в 12 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. – Т. 1, ч. 2. – С. 378-380
  15. Chimitova E.V. A comparative analysis of the Wiener, gamma and inverse gaussian degradation models / E. V. Chimitova, E. S. Chetvertakova, S. A. Sergeeva, E. Osinceva // Applied methods of statistical analysis. Nonparametric methods in cybernetics and system analysis : proc. of the intern. workshop, Krasnoyarsk, 18–22 Sept. 2017. – Novosibirsk : NSTU, 2017. – P. 160–167.
  16. Crowder M. On a scheme for predictive maintenance / M. Crowder, J. Lawless // European J. Oper. Res., 2007. – 16. – P. 1713–1722.
  17. Doksum K.A. Gaussian models for degradation processes — part I: methods for the analysis of biomarker data / K.A. Doksum, S.-L.T. Normand // Lifetime Data Anal., 1995. – 1. – P. 135–144.
  18. Giantomassi A. Hidden Markov model for health estimation and prognosis of turbofan engines / A. Giantomassi, F. Ferracuti, A. Benini, G. Ippoliti, S. Longhi, A. Petrucci // International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (AMSE) – Washington, DC, USA, 2011. – pp. 1–9.
  19. Häusler K. Degradation model analysis of laser diodes / K. Häusler, U. Zeimer, B. Sumpf, G. Erbert, G. Tränkle // Journal of Materials Science: Materials in Electronics, 2008. – Vol. 19, Num. 1. – P. 160

20. Hong Li, Donghui Pan, C. L. Philip Chen, Reliability Modeling and Life Estimation Using an Expectation Maximization Based Wiener Degradation Model for Momentum Wheels, IEEE TRANSACTIONS ON CYBERNETICS, VOL. 45, NO. 5, MAY 2015
21. Lawless J. Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure / J. Lawless, M. Crowder // Lifetime Data Analysis. – 2004. – V. 10. – P. 213–227.
22. Liao H.T. Reliability prediction and testing plan on an accelerated degradation rate model / H.T. Liao, E.A. Elsayed // Int. J. Mater. Prod. Technol., 2004. – 21. – P. 402–422.
23. Liao C.M. Optimal design for step-stress accelerated degradation test / C.M. Liao, S.-T. Tseng // IEEE Trans. Reliab., 2006. – 55. – P. 59-66.
24. Liu H. Generalized Cauchy Degradation Model With Long-Range Dependence and Maximum Lyapunov Exponent for Remaining Useful Life / H. Liu, W. Song, Y. Zhang, A. Kudreyko // IEEE Transactions on instrumentation and measurement, 2021. – 70.
25. Lu C.J. Using degradation measures to estimate a time-to-failure distribution / C.J. Lu, W.Q. Meeker // Technometrics, 1993. – 35(2). – P. 161–174.
26. Meeker W.Q. Statistical Methods for Reliability Data / W.Q. Meeker, L.A. Escobar // New York : John Wiley and Sons, 1998. – 680 c.
27. Meeker W.Q. Using accelerated tests to predict service life in highly variable environments / W.Q. Meeker, L.A. Escobar, V. Chan // Service Life Prediction: Methodologies and Metrologies, 2002. – 16 p.
28. Nelson W. Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis / W. Nelson // Wiley, New York. – 1990.

29. Nikulin M. Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analysis / M. Nikulin, V. Bagdonavicius // Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2001. – 334 c.
30. Noortwijk J. M. V. A survey of the application of gamma processes in maintenance / J. M. V. Noortwijk // Reliability Engineering & System Safety, 2009. – Vol. 94. – P. 2–21.
31. Padgett W.J. Inference from accelerated degradation and failure data based on Gaussian process models / W.J. Padgett, M.A. Tomlinson // Lifetime Data Anal., 2004. – 10. – P. 191–206.
32. Pan D. Remaining useful life estimation using an inverse Gaussian degradation model / D. Pan, J.B. Liu, J. Cao // Neurocomputing, 2016. – Vol. 185. – P.64–72.
33. Pan Z. Multiple-steps step-stress accelerated degradation modeling based on Wiener and gamma processes / Z. Pan, N. Balakrishnan // Communications in Statistics—Simulation and Computation, 2010. – Vol. 39. – P. 1384–1402.
34. Pan Z. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes / Z. Pan, N. Balakrishnan // Reliability Engineering & System Safety, 2011. – Vol. 96. – P. 949–957.
35. Pan Z. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes / Z. Pan, N. Balakrishnan // Reliability Engineering System Safety, 2011. – V. 96. – P. 949 – 957.
36. Panneton, F.O. Improved long-period generators based on linear recurrences modulo 2 / F.O. Panneton, P. L'Ecuyer, M. Matsumoto // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2006. – Vol. 32. No. 1. – P. 1-16.

37. Park C. Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma process / C. Park, W.J. Padgett // *Lifetime Data Analysis*, 2005. – 11. – P. 511–527.
38. Peng C.Y. Mis-specification analysis of linear degradation models / C. Y. Peng, S. T. Tseng // *IEEE Trans. Rel.*, 2009. – Vol. 58, no. 3. – P. 444–455.
39. Peng C. Inverse Gaussian processes with random effects and explanatory variables for degradation data / C. Peng // *Technometrics*, 2014. – Vol. 57 (1). – P. 100–111.
40. Peng W.W. Inverse Gaussian process models for degradation analysis: a Bayesian perspective / W.W. Peng, Y.F. Li, Y.J. Yang, H.Z. Huang, M.J. Zuo // *Reliability Engineering & System Safety*, 2014. – Vol. 130. – P. 175–189.
41. Ray A. A nonlinear stochastic model of fatigue crack dynamics / A. Ray, S. Tangirala // *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1997. – 12. – P. 33–40.
42. Rusev V. On solution of renewal equation in the weibull-gnedenko model / V. Rusev, A. Skorikov // *Reliability: Theory & Applications*, 2017. – 4 (47). – P. 60–67.
43. Rykov V. Degradation Models with Random Life Resources / V. Rykov, D. Efrosinin // *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2010. – 39. – P. 398-407.
44. Singpurwalla N.D. Survival in dynamic environments / N.D. Singpurwalla // *Statist. Sci.*, 1995. – 10. – P. 86–103.
45. Tang L.C. Planning of step-stress accelerated degradation test / L.C. Tang, L.C. Yang, M. Xie // *Los Angeles : Reliability and Maintainability Annual Symposium*, 2004. – P. 1.

46. Tang J. Estimating failure time distribution and its parameters based on intermediate data from a Wiener degradation model / J. Tang, T. S. Su // *Nav. Res. Log.*, 2008. – Vol. 55, no.3. – P. 265–276.
47. Tang J. Estimating failure time distribution and its parameters based on intermediate data from a Wiener degradation model / J. Tang, T.S. Su // *Naval Res. Logist.*, 2008. – 55. – P. 265–276.
48. Tang S. Accelerated degradation tests modeling based on the nonlinear Wiener process with random effects / S. Tang, X. Guo, C. Yu, H. Xue, Z. Zhou // *Mathematical Problems in Engineering*, 2014. – 11 pp.
49. Tsai C.-C. Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes / C.-C. Tsai, S.-T. Tseng, N. Balakrishnan // *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2011. – 12. – P. 25-35.
50. Tsai C.-C. Optimal Design for Degradation Tests Based on Gamma Processes with Random Effects / Tsai C.-C., Tseng S.-T., Balakrishnan N. // *IEEE Trans. Reliab.*, 2012 – Vol. 61. – P. 604–613.
51. Tsai C.-C. Optimal design for accelerated-stress acceptance test based on Wiener process / C.-C. Tsai, C.-T. Lin, N. Balakrishnan // *IEEE Transactions on Reliability*, 2015. – Vol. 64, no. 2. – P. 603–612.
52. Tseng S.T. Optimal design for a degradation test / S. T. Tseng, C. M. Liao // *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 1998. – Vol. 4. – P. 293–301.
53. Wang X. An inverse Gaussian process model for degradation data / X. Wang, D. Xu // *Technometrics*, 2010. – V. 52. – P.188–197.
54. Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data / X. Wang // *J. Multivariate Anal.*, 2010. – Vol. 101, no. 2. – P. 340–351.
55. Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data / X. Wang // *Journal of Multivariate Analysis*, 2010. – 101 (2). – P. 340–351.

56. Wang X. Mis-specification Analyses of Nonlinear Wiener Process-based Degradation Models / X. Wang, N. Balakrishnan, B. Guo // Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2016. – 45. – P. 814-832.
57. Wang, 2019
58. Whitmore G. Estimating degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error / G. Whitmore // Lifetime Data Analysis, 1995. – 1. – P. 307–319.
59. Whitmore G.A. Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation / G.A. Whitmore, F. Schenkelberg // Lifetime Data Anal., 1997. – 3. – P. 27–45.
60. Whitmore G.A. Failure inference from a marker process based on a bivariate Wiener process / G.A. Whitmore, M.J. Crowder, J.F. Lawless // Lifetime Data Analysis, 1998. – 4. – P. 229–251.
61. Ye Z. The Inverse Gaussian Process as a Degradation Model / Z. Ye, N. Chen // Technometrics, 2014. – Vol. 56. – P. 302-311.
62. Ye Z. Semiparametric Estimation of Gamma Processes for Deteriorating Products / Z. Ye, M. Xie, L. Tang, N. Chen // Technometrics, 2014. – P. 504–513.
63. Ye Zh.-Sh. A new class of Wiener process models for degradation analysis / Zh.-Sh. Ye, N. Chen, Y. Shen // Reliability Engineering & System Safety, 2015. – Vol. 139. – P. 58-67.
64. Yu H.F. Designing a degradation experiment / H.F. Yu, S.T. Tseng // Naval Research Logistics, 1999. – Vol. 46. – P. 689–706.
65. Zhang C. Reliability demonstration methodology for products with Gamma Process by optimal accelerated degradation testing / C. Zhang, X. Lu, Y.

- Tan, Y. Wang // Reliability Engineering and System Safety, 2015. – Vol. 142. – P. 369–377.
66. Антонов А.В. Статистические модели в теории надежности / А.В. Антонов, М.С. Никулин // М.: Абрис, 2012. – 390 с.
67. Ариничева О.В. Возможные пути повышения надёжности профессионального психологического отбора диспетчеров управления воздушным движением / О.В. Ариничева, А.Е. Герасименкова, А.В. Малишевский, М.Г. Чепик // М: Надежность, 2018. – 1(18). – С. 38–45.
68. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г. М. Кобельков // Москва, Наука, 1987; 6-е издание: Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
69. Бекарева Н.Д. Случайные процессы: конспект лекций / Н. Д. Бекарева // М-во образования Рос. Федерации, Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004 (Тип. НГТУ). – 202 с.
70. Бекарева Н.Д. Теория вероятностей: конспект лекций / Н.Д. Бекарева // Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 195 с.
71. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов // Москва: Наука, 1983. 416 с.
72. Боровиков С.М. Прогнозирование надежности изделий электронной техники на основе математической модели деградации функционального параметра / С. М. Боровиков, А. В. Шалак, А. И. Бересневич, А. В. Емельянов, Е. Н. Шнейдеров // Доклады БГУИР, 2008. – №6 (36).
73. Боровиков С.М. Эффективность моделей деградации функциональных параметров при прогнозировании параметрической надежности полупроводниковых приборов / С. М. Боровиков, Н. И. Цырельчук, С.С. Дик, Е. Н. Шнейдеров // Доклады БГУИР, 2018. – №5 (115).

74. Галанова Н.С. Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний / Н.С. Галанова, Б.Ю. Лемешко, Е.В. Чимитова // Автометрия, 2012. – № 6. – С.53–68.
75. Герцбах И.Б. Модели отказов / И.Б. Герцбах, Х.Б Кордонский // М.: Советское радио, 1966. — 165 с.
76. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ / Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Соловьев А.Д. // М. : Наука, 1965. – 524 с.
77. ГОСТ Р 27.002-2009. Надежность в технике. Термины и определения. – Москва : Стандартинформ, 2011. - 28 с.
78. Домрачев В.Г. Об оценке надежности цифровых преобразований угла с учетом метрологических отказов / В.Г. Домрачев, В.М. Исаев // Измерительная техника. - 1990. - № 9. - С. 7-15.
79. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем / Г.В. Дружинин // М.: Энергия, 1997. - 536 с.
80. Журавлева О.В. Оценка надежности полупроводникового излучателя ИЛПН-134 / О.В. Журавлева, А.В. Иванов, В.Д. Курносов, К.В. Курносов, В.И. Романцевич, Р.В. Чернов // Физика и техника полупроводников, 2010. – 3. – С. 377–382.
81. Коваленко И.Н. Исследования по анализу надёжности сложных систем. / И.Н. Коваленко // Киев: Наукова думка, 1975. — 210 с.
82. Коваленко И.Н. К расчёту характеристик высоконадёжных систем аналитико-статистическим методом / И.Н. Коваленко // Электронное моделирование. — 1980. — Т. 2, № 4. — С. 5—8.
83. Кулагин В. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок: учебник для вузов: в 2 кн. Кн.2 : Основы



- теории ГТД. Совместная работа узлов выполненного двигателя и его характеристики / Кулагин В. В., Кузьмичев В. С. – 4-е изд., испр. - М.: Инновационное машиностроение, 2018. – 280 с.
84. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ смесей распределений по частично группированным данным / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сб. научных трудов НГТУ. - 1995. - №1. С. 25-31.
85. Лемешко Б.Ю. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б.Ю. Лемешко, С.Н. Постовалов // Автометрия, 2001. – № 2. – С. 88-102.
86. Лемешко Б.Ю. Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Измерительная техника, 2007. – № 2. – С.22–27.
87. Лемешко Б.Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.1 / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника, 2009. – № 6. – С.3–11.
88. Лемешко Б.Ю. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч.II / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко // Измерительная техника, 2009. – № 8. – С.17–26.
89. Лемешко Б.Ю. Статистика ускоренных испытаний и ее применение в теории надежности, технике и медицине / Б.Ю. Лемешко, М.С. Никулин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2011. Аннотации докладов. В 3 томах. Т 1. Инновационные ядерные технологии. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – С.225.
90. Лемешко Б.Ю. Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез

- относительно обратного гауссовского закона / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, М.С. Никулин, Н. Сааидиа // Автоматика и телемеханика, 2010. – № 7. – С.83–102.
91. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография / Б.Ю. Лемешко [и др.]. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
92. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению / Б.Ю. Лемешко // М. : НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.
93. Майоров А.В. Планирование и проведение ускоренных испытаний на надежность устройств электронной автоматики / А.В. Майоров, Н.П. Потюков // М.: Радио и связь, 1982.
94. Микер У.К. Использование данных о деградации для анализа надежности изделий / У.К. Микер, Н. Доганаксой, Дж. Дж. Хан // Методы менеджмента качества, 2009. – №4.
95. Перроте А.И. Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность / А.И. Перроте, Г.Д. Карташов, К.Н. Цветаев // М.: Советское радио, 1968.
96. Постовалов С.Н. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.17 / Постовалов Сергей Николаевич. – Новосибирск, 2014. – 40 с.
97. Рыков В.В. О чувствительности характеристик надежности систем к виду функций распределения времени безотказной работы и восстановления их элементов / В.В. Рыков, Чан Ань Нгиа // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. - 2014. - №3. - С. 65-77.

98. Тарарычкин И.А. Обеспечение стойкости трубопроводных систем к повреждениям элементов сетевой структуры / И.А. Тарарычкин / М: Надежность, 2018. – 1(18). – С. 26–31.
99. Четвертакова Е.С. Разработка алгоритма оценки надежности на основе данных о деградационном процессе / Е.С. Четвертакова; науч. рук. Е.В. Чимитова // Наука. Технологии. Инновации: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, Новосибирск, 2012, часть 1. – С. 161 – 164.
100. Четвертакова Е.С. Вопросы проверки адекватности статистических моделей деградации / Е. С. Четвертакова, Е. В. Чимитова // Обработка информационных сигналов и математическое моделирование: Российская науч.-технич. конф., [23–24 мая 2013 г.] : материалы конф. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – С. 104–107.
101. Четвертакова Е. С. Построение гамма деградационной модели надежности с учетом влияния объясняющих переменных / Е.С. Четвертакова, Е.В. Чимитова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2014. – №4(29). – С. 51-60.
102. Четвертакова Е. С. Построение вероятностной модели надежности на основе данных о деградации с учетом объясняющих переменных / Е. С. Четвертакова, Е. В. Чимитова // Обработка информации и математическое моделирование: Рос. науч.-техн. конф., [Новосибирск, 24–25 апр. 2014 г.] : материалы конф. – Новосибирск : СибГУТИ, 2014. – С. 48–51.
103. Четвертакова Е.С. Построение гамма деградационной модели надежности с учетом влияния объясняющих переменных / Е. С. Четвертакова, Е. В. Чимитова // Труды XII международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электронного

- приборостроения», 2-4 октября 2014 г., г. Новосибирск. – Т. 6. – С. 73-78.
104. Четвертакова Е.С. Построение гамма деградационной модели с учетом влияния объясняющих переменных / Е.С. Четвертакова; науч. рук. Е.В. Чимитова // Наука. Технологии. Инновации: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, 2 – 6 декабря 2014 г., г. Новосибирск.
105. Четвертакова Е. С. Вопросы проверки адекватности деградационной гамма-модели надежности / Е. С. Четвертакова, Е. В. Чимитова // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 24–25 апр. 2015 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2015. – С. 234–241.
106. Четвертакова Е.С. Сравнение деградационных гамма-моделей со случайным и фиксированным эффектом фактора / Е.С. Четвертакова; науч. рук. Е.В. Чимитова // Наука. Технологии. Инновации : сб. науч. тр. : в 9 ч., Новосибирск, 1–5 дек. 2015 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015. – Ч. 2. – С. 39–41.
107. Четвертакова Е.С. Винеровская деградационная модель с учетом влияния объясняющих переменных / Е.С. Четвертакова, Е.В. Чимитова // Обработка информации и математическое моделирование : Рос. науч.-техн. конф. : материалы конф. – Новосибирск : СибГУТИ, 2016. – С. 48–51.
108. Четвертакова Е.С. Исследование деградационных гамма-моделей со случайным и фиксированным эффектами // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2018. Т. 22. № 6. С. 120–128.

109. Четвертакова Е.С., Чимитова Е.В. Проверка значимости случайного эффекта для винеровской деградиционной модели // Системы анализа и обработки данных. – 2021. – № 3 (83). – С. 129–142.
110. Чимитова Е.В. и др., Система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS 1.3»., Программа для ЭВМ 20166191972, Сентябрь 1, 2016.
111. Чимитова Е.В. Математическое и алгоритмическое обеспечение статистического анализа данных типа времени жизни: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.17 / Чимитова Екатерина Владимировна. – Новосибирск, 2016. – 344 с.
112. NASA's Open Data Portal. Turbofan engine degradation simulation data set : [Электронный ресурс]. URL: <https://data.nasa.gov/dataset/Turbofan-engine-degradation-simulation-data-set/vrks-gjie>. (Дата обращения: 27.04.2021)

## ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы данных для анализа

Таблица А.1 – Процент превышения потребляемого тока GaAs лазерами, тестируемыми при повышенной до 80°C температуре окружающей среды

Время (в часах)	Номер тестируемого объекта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>250</b>	0.47	0.71	0.71	0.36	0.27	0.36	0.36	0.46	0.51	0.41	0.44	0.39	0.30	0.44	0.51
<b>500</b>	0.93	1.22	1.17	0.62	0.61	1.39	0.92	1.07	0.93	1.49	1.00	0.80	0.74	0.70	0.83
<b>750</b>	2.11	1.90	1.73	1.36	1.11	1.95	1.21	1.42	1.57	2.38	1.57	1.35	1.52	1.05	1.29
<b>1000</b>	2.72	2.30	1.99	1.95	1.77	2.86	1.46	1.77	1.96	3.00	1.96	1.74	1.85	1.35	1.52
<b>1250</b>	3.51	2.87	2.53	2.30	2.06	3.46	1.93	2.11	2.59	3.84	2.51	2.98	2.39	1.80	1.91
<b>1500</b>	4.34	3.75	2.97	2.95	2.58	3.81	2.39	2.40	3.29	4.50	2.84	3.59	2.95	2.55	2.27
<b>1750</b>	4.91	4.42	3.30	3.39	2.99	4.53	2.68	2.78	3.61	5.25	3.47	4.03	3.51	2.83	2.78
<b>2000</b>	5.48	4.99	3.94	3.79	3.38	5.35	2.94	3.02	4.11	6.26	4.01	4.44	3.95	3.39	3.42
<b>2250</b>	5.99	5.51	4.16	4.11	4.05	5.92	3.42	3.29	4.60	7.05	4.51	4.79	5.03	3.72	3.78
<b>2500</b>	6.72	6.07	4.45	4.50	4.63	6.71	4.09	3.75	4.91	7.80	4.80	5.22	5.47	4.09	4.11
<b>2750</b>	7.13	6.64	4.89	4.72	5.24	7.70	4.58	4.16	5.34	8.32	5.20	5.48	5.84	4.83	4.38
<b>3000</b>	8.00	7.16	5.27	4.98	5.62	8.61	4.84	4.76	5.84	8.93	5.66	5.96	6.50	5.41	4.63
<b>3250</b>	8.92	7.78	5.69	5.28	6.04	9.15	5.11	5.16	6.40	9.55	6.20	6.23	6.94	5.76	5.38
<b>3500</b>	9.49	8.42	6.02	5.61	6.32	9.95	5.57	5.46	6.84	10.45	6.54	6.99	7.39	6.14	5.84
<b>3750</b>	9.87	8.91	6.45	5.95	7.10	10.49	6.11	5.81	7.20	11.28	6.96	7.37	7.85	6.51	6.16
<b>4000</b>	10.94	9.28	6.88	6.14	7.59	11.01	7.17	6.24	7.88	12.21	7.42	7.88	8.09	6.88	6.62

Таблица А.2 – Процент превышения сопротивления углеродистых резисторов, тестируемых при повышенной до 83°C, 133°C и 173°C температуре окружающей среды

Номер объекта	Температура среды	Время (в часах)			
		452	1030	4341	8084
1	83°C	0.0	0.04	0.1	0.34
2		0.0	0.02	0.04	0.16
3		0.0	0.05	0.13	0.4
4		0.0	0.04	0.07	0.23
5		0.0	0.01	0.17	0.32
6		0.0	0.04	0.13	0.26
7		0.0	0.05	0.16	0.34
8		0.0	0.04	0.1	0.31
9		0.0	0.07	0.11	0.52
10	133°C	0.0	0.07	0.32	0.65
11		0.0	0.31	1.18	2.27
12		0.0	0.11	0.46	1.07
13		0.0	0.15	0.53	1.03
14		0.0	0.18	0.69	1.46
15		0.0	0.12	0.54	1.24
16		0.0	0.18	0.7	1.49
17		0.0	0.29	1.13	2.46
18		0.0	0.16	0.59	1.2
19	0.0	0.19	0.74	1.48	
20	173°C	0.0	0.42	1.75	3.57
21		0.0	0.63	2.29	3.98
22		0.0	1.14	4.37	8.48
23		0.0	0.38	1.68	3.44
24		0.0	0.72	2.2	4.52
25		0.0	0.82	1.87	5.16
26		0.0	0.39	1.49	2.76
27		0.0	0.5	1.73	3.12
28		0.0	0.4	1.84	3.33

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б Акт о внедрении результатов диссертационной работы

“У Т В Е Р Ж Д А Ю”

Исполнительный директор ООО «Эко-Томск»,



*Т.С. Гурова* Гурова Т.С.

*2021* 2021 г.

### АКТ

#### о внедрении результатов диссертационной работы

#### Четвертаковой Евгении Сергеевны

Настоящим актом подтверждается, что результаты диссертационного исследования Четвертаковой Е.С. внедрены в практику деятельности ООО «Эко-Томск». В частности, критерии проверки значимости случайного эффекта в случае винеровской деградационной модели и программная система статистического анализа данных типа времени жизни «LiTiS 1.3» использовались при решении задачи анализа надежности турбовентиляторных двигателей. Использование предложенных Четвертаковой Е.С. критериев и алгоритмов позволило повысить точность расчета показателей надежности.

Руководитель отдела исследований и разработок *Т.Ю. Пашинская* Пашинская Т.Ю.



**ПРИЛОЖЕНИЕ В Свидетельство о государственной регистрации  
программы для ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2016619972**

**Система статистического анализа данных типа времени  
жизни "LiTiS 1.3"**

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (RU)**

Авторы: **Чимитова Екатерина Владимировна (RU), Семёнова  
Мария Александровна (RU), Четвертакова Евгения Сергеевна  
(RU), Вожов Станислав Сергеевич (RU)**

Заявка № **2016617613**  
Дата поступления **14 июля 2016 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **01 сентября 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности



 **Г.П. Наиев**