

Федеральное автономное учреждение «Сибирский научно-исследовательский
институт авиации им. С. А. Чаплыгина»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи



Лакиза Павел Анатольевич

КОРРЕКЦИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Специальность 2.5.14 — «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Бернс Владимир Андреевич

Новосибирск — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1 Проблемы создания расчетных динамических моделей конструкций по результатам модальных испытаний	11
1.1 Методы коррекции	11
1.2 Методы ассемблирования	15
1.3 Классический модальный анализ	18
1.4 Операционный модальный анализ	18
1.4.1 Методы идентификации в частотной области	19
1.4.2 Методы идентификации во временной области	20
Выводы по главе 1	25
Глава 2 Коррекция и синтез расчетных динамических моделей конструкций	26
2.1 Коррекция упругих характеристик	27
2.2 Моделирование диссипативных характеристик	38
2.3 Освобождение от наложенных связей	40
2.3.1 Описание способа	41
2.3.2 Тестирование на модельных задачах	47
2.4 Оценка чувствительности методики коррекции к погрешностям в результатах модальных испытаний	50
2.5 Определение модальных характеристик крупногабаритных конструкций	55
2.6 Программная реализация методик коррекции, освобождения и синтеза	62
Выводы по главе 2	63
Глава 3 Результаты модальных испытаний как исходные данные для коррекции расчетных моделей конструкций	64
3.1 Методика определения модальных параметров по результатам экспериментального модального анализа	64
3.2 Диагностика дефектов конструкций по результатам испытаний	69
3.2.1 Методика исследований	70

	Стр.
3.2.2 Применение методики для диагностирования зазоров и люфтов	72
3.3 Обработка и представление результатов в процессе испытаний . .	79
3.4 Операционный модальный анализ	81
3.4.1 Декомпозиция сигналов виброускорений	81
3.4.2 Тестирование на примере имитационной модели ЛА	84
3.4.3 Определение модальных характеристик по результатам акустических испытаний	90
3.4.4 Оценка модальных параметров по результатам летных испытаний	95
Выводы по главе 3	96
Глава 4 Решение практических задач коррекции расчетных моделей .	98
4.1 Коррекция расчетной модели динамически-подобной модели самолёта Ту-204	98
4.2 Синтез имитационной модели каркаса зонтичной антенны космического аппарата	104
4.2.1 Модальные испытания	105
4.2.2 Разработка расчетной модели	107
4.2.3 Формирование глобальной модели	112
4.3 Коррекция расчетной модели отъемной части крыла изделия С-70	115
4.3.1 Экспериментальный модальный анализ	115
4.3.2 Построение конечно-элементной модели	116
4.3.3 Коррекция конечно-элементной модели	118
4.4 Коррекция расчетной модели гирдера для модульных секций накопителя ЦКП «СКИФ»	120
Выводы по главе 4	127
Заключение	129
Список литературы	131
Приложение А Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ . . .	150
А.1 Контроль дефектов в процессе вибрационных испытаний	151

	Стр.
A.2 Расчет обобщенных характеристик тонов собственных колебаний по результатам модальных испытаний	152
A.3 Представление результатов модальных испытаний	153
A.4 Операционный модальный анализ летательных аппаратов	154
Приложение Б Патент на изобретение	155
Б.1 Способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями	156
Приложение В Акты об использовании результатов диссертационной работы	158
В.1 ПАО «Объединенная авиастроительная корпорация»	159
В.2 ЦКП «Сибирский кольцевой источник фотонов»	160
Приложение Г Акт о внедрении результатов диссертационной работы	161
Г.1 ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С. А. Чаплыгина»	162

Введение

Актуальность темы исследования

Решение проблемы безопасной и эффективной эксплуатации авиационной и космической техники начинается на этапе проектирования. Для этой цели разрабатываются различные расчетные модели летательных аппаратов (ЛА). Так, например, расчетные динамические модели используются для обеспечения аэроупругой устойчивости самолетов и управляемости космических аппаратов, определении реакции ЛА на динамическое воздействие. Расчетные модели, построенные по технической документации изделий, позволяют сделать первоначальную оценку динамических характеристик ЛА. Однако такие модели содержат неизбежные погрешности моделирования, обусловленные дискретизацией модели, неточностью задания свойств материалов, геометрических характеристик и граничных условий. Невозможность в полной мере учесть в расчетах особенности реальной конструкции приводит к необходимости экспериментального определения модальных параметров ЛА с последующей коррекцией расчетных моделей, поэтому разработка методов коррекции моделей по результатам модальных испытаний является актуальной задачей.

Целью модальных испытаний ЛА является определение характеристик собственных тонов (мод) колебаний конструкций (собственных частот и форм, обобщенных масс и демпфирования). Они проводятся на всех этапах создания ЛА. Испытаниям подвергаются динамически подобные модели ЛА, опытные и серийные образцы авиационной и космической техники. Этап экспериментальных исследований динамических характеристик предполагает испытания не только ЛА в целом, но и их составных частей. Скорректированные по результатам испытаний расчетные модели позволяют повысить эффективность работ по доводке изделий исходя из требований их безопасной и эффективной эксплуатации.

Степень разработанности темы исследования

Известные методы коррекции могут быть разделены на две категории: стохастические и детерминированные. В основе стохастических методов лежит представление о том, что экспериментальные данные являются случайными и содержат неизбежные ошибки измерения, обусловленные как объективными, так и субъективными факторами. В зависимости от типов ошибок измерения в работах

Beck J. L., Katafygiotis L. S., Boulkaibet I., Vanik M. W., Goller B., Schueller G. I., Au S. K., Marwala T., Yuen K. V., Worden K., Hensman J. J., Cheung S. H., Mthembu L., Yan W. J. и др. были разработаны различные методы коррекции. Детерминированные методы коррекции обычно сводятся к итерационной процедуре минимизации целевой функции, равной сумме квадратов разностей между измеренными в эксперименте данными и соответствующими данными, полученными с помощью расчетной модели (Bakir P. G., Friswell M. I., Baruch M., Mottershead J. E., Ewins D. J., Berman E. G., Allen M. S., Link M., Park D. C., Caesar B., Min C. H., Sipple J. D., Gupta A. и др.).

Решению важных практических задач применения модальных испытаний для целей коррекции расчетных динамических моделей авиационных конструкций и изделий ракетно-космической техники посвящены работы Смыслова В. И., Кузнецова О. А., Межина В. С., Обухова В. В., Бобылева С. С. и Авершьевой А. В.

Практическая реализация методов коррекции нередко приводит к тому, что результирующая система уравнений оказывается плохо обусловленной. Для борьбы с этой проблемой существуют техники регуляризации, наиболее часто используемые исследователями: Ahmadian H., Fregolent A., Natke H. G., Visser W. J., Titurus B., Imregun M., D'Ambrogio W., Gladwell G. M. L., Ismail F., Hansen P. C., Bartilson D. T., Smyth A. W.

Теоретическое обоснование методов модальных испытаний и вопросы их практического применения изложены, например, в работах Резника А. Л., Смыслова В. И., Микишева Г. Н., Рабиновича Б. И., Бернса В. А., Dat R., Clerc D., Kennedy C. C., Pancu C. D. P., Heylen W., Lammens S., Sas P. и др.

По результатам анализа публикаций отмечено, что известные методы коррекции расчетных моделей не являются универсальными и не учитывают в полной мере особенностей конструкций ЛА и модальных испытаний авиационной и космической техники. В основу разработанной в диссертации методики положен детерминированный подход. Целевой функцией является сумма квадратов разностей между целевыми (найденными экспериментально) и расчетными собственными частотами ЛА. Методика не изменяет портреты и симметрию матриц этих моделей.

Целью диссертационной работы является разработка методики коррекции расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний.

Задачи исследования

1. Разработать методику коррекции расчетных динамических моделей ЛА по экспериментально определенным модальным характеристикам.
2. Оценить сходимость и чувствительность методики коррекции к погрешностям в результатах модальных испытаний.
3. Создать алгоритмы и реализующие их программы для обработки и представления результатов экспериментального модального анализа в процессе испытаний.
4. Изучить методы операционного модального анализа. Реализовать численные алгоритмы для определения модальных характеристик ЛА по результатам акустических и летных испытаний.
5. Изучить методы вибродиагностики конструкций. Создать алгоритмы и реализующие их программное обеспечение для контроля конструктивно-производственных дефектов в конструкциях ЛА в процессе модальных испытаний.
6. Внедрить разработанные в диссертационной работе методики в практику модальных испытаний ЛА. Использовать методику коррекции для уточнения расчетных динамических моделей.

Научная новизна

1. Разработана новая методика коррекции конечно-элементных моделей ЛА, заключающаяся в добавлении корректирующих конечных элементов, параметры которых определяются по результатам модальных испытаний.
2. Создан способ определения частот и форм собственных колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями.
3. Обоснована методика формирования глобальной матрицы демпфирования конструкций по результатам испытаний их составных частей.
4. Развита методика испытаний составных частей ЛА для достоверного построения их матриц жесткости.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическую значимость представляют:

1. Методика коррекции конечно-элементных моделей ЛА посредством добавления корректирующих элементов, характеристики которых определяются по результатам экспериментального модального анализа.

2. Способ определения модальных параметров свободной конструкции по результатам испытания этой конструкции с наложенными связями.

Практическая значимость результатов работы состоит в разработке и развитии методик, позволяющих повысить достоверность расчетных моделей ЛА и, как следствие, обеспечить безопасную и эффективную эксплуатацию авиационной и космической техники. Применение этих методик в совокупности с созданным программным обеспечением позволяет повысить информативность, расширить область использования результатов модального анализа ЛА и снизить объем работ по доводке их конструкций.

Результаты проведенных в диссертации исследований использованы в модальных испытаниях самолётов Су-30, Су-34, Як-130, Як-152, МС-21; в конструкторско-технологической доводке изделий Су-57 и С-70, а также при проектировании гирдеров для модульных секций накопителя ЦКП «СКИФ», о чём имеются акты об их использовании и внедрении (приложения В и Г).

Методология и методы исследования

При построении расчетных моделей использовался метод конечных элементов. В разработке методики коррекции расчетных моделей применялись методы оптимизации. Целевые данные для коррекции расчетных моделей получены методами экспериментального модального анализа. В оценке чувствительности методики коррекции расчетных моделей к погрешностям эксперимента использовался метод статистического моделирования.

Положения, выносимые на защиту

1. Методика коррекции конечно-элементных моделей ЛА, заключающаяся в добавлении корректирующих конечных элементов, параметры которых определяются по результатам модальных испытаний.
2. Способ определения частот и форм собственных колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями.
3. Методика испытаний составных частей ЛА для достоверного построения их матриц жесткости.
4. Алгоритмы и реализующие их программы для обработки и представления результатов экспериментального модального анализа в процессе испытаний.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность и обоснованность результатов работы определяется применением основных положений механики, анализом погрешностей определяемых параметров, оценкой чувствительности разрабатываемой методики и исследованиями сходимости ее алгоритма. Результаты экспериментальных исследований получены с использованием апробированных методик и современного прецизионного оборудования.

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на XXIV Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова (г. Москва, 2018), Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения» (г. Красноярск, XXII (2018), XXIII (2019), XXV (2021), XXVI (2022)), 17-ой Российско-Китайской научно-технической конференции «Фундаментальные задачи аэродинамики, динамики, прочности и безопасности полетов ЛА» (г. Жуковский, 2021); Юбилейной научно-технической конференция, посвящённой 80-летию юбилею СибНИА (г. Новосибирск, 2021), школе-семинаре «Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов» (г. Новосибирск, 2021 и 2022), 58-ой Международной научной студенческой конференции МНСК (г. Новосибирск, 2020), 6-ой Международной научно-технической конференции «Динамика и виброакустика машин» (г. Самара, 2022), научно-технической конференции «Прочность конструкций летательных аппаратов» (г. Жуковский, 2018 и 2022).

Личный вклад автора заключается в создании методик коррекции, освобождения и синтеза расчетных моделей конструкций; разработке алгоритмов и реализующих их программ; проведении расчетов и участии в экспериментальных исследованиях, анализе их результатов; формулировке выводов.

Соответствие паспорту заявленной специальности

Тема и содержание диссертационной работы соответствуют паспорту научной специальности 2.5.14 — «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов» по пункту 1 — «Методы определения внешних силовых и тепловых нагрузок, действующих на объекты авиационной, ракетной и космической техники на этапах транспортировки, применения и эксплуатации», пункту 2 — «Обеспечение прочности объектов авиационной, ракетной и космической техники на основе современных аналитических и численных методов, методов натурного и полунатурного моделирования в условиях стационарных и нестационарных внешних

воздействий» и пункту 6 — «Организация, экономика и оптимизация процессов обеспечения прочности, термопрочности и тепловых режимов летательных аппаратов».

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 27 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых *Web of Science* и *Scopus*, 23 — в прочих изданиях и сборниках трудов международных и всероссийских научно-технических конференций. Зарегистрирован патент на изобретение. Получены 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и 4 приложений. Текст работы изложен на 162 страницах, включая 90 рисунков и 15 таблиц. Библиографический список содержит 178 наименований.

Глава 1 *Проблемы создания расчетных динамических моделей конструкций по результатам модальных испытаний*

1.1 Методы коррекции

Конечно-элементные (КЭ) модели широко используются для проведения статических и динамических расчетов во многих областях техники. Однако такие модели содержат неизбежные погрешности моделирования, обусловленные дискретизацией модели, неточностью задания свойств материалов, геометрических характеристик и граничных условий [1]. Для устранения погрешностей моделирования были разработаны различные методы коррекции КЭ-моделей применительно к разным конструкциям: топливным бакам ракет-носителей [2], соплу ракетного двигателя [3], композитному самолёту [4], архитектурным сооружениям [5], пластинчатым теплообменникам [6]. В основе этих методов лежит минимизация разницы между ключевыми характеристиками реальной конструкции и параметрами КЭ-модели. В качестве таких параметров могут выступать, например, частоты собственных колебаний и отклик конструкции на динамическое воздействие [7]. Кроме того, методы коррекции нередко используются для оценки поврежденностей различных конструкций: дамб [8], мостов [9; 10], контейнеров для хранения радиоактивных отходов [11]. Обзор подходов к решению проблемы мониторинга поврежденности приведен в [12].

Следует отметить, что погрешность описания механических свойств реальной конструкции методом конечных элементов зачастую обусловлена особенностями моделирования узлов сопряжения, например, болтовых и заклепочных соединений. Однако описание нелинейного поведения таких узлов посредством построения нелинейной КЭ-модели в ряде случаев может оказаться вычислительно затратным. Во избежание этого такие узлы сопряжения могут быть заменены специальными элементами с эквивалентными жесткостными и диссипативными характеристиками. Так, в работах [13; 14] болтовые узлы сопряжения двухбалочной модели были заменены гистерезисными элементами Iwan'a, параметры которых были определены методом коррекции.

Известные методы коррекции могут быть разделены на две категории: стохастические и детерминированные. В основе стохастических методов лежит представление о том, что экспериментальные данные являются случайными и

содержат неизбежные ошибки измерения, обусловленные как объективными факторами (температура, влажность, вибрации, оборудование), так и субъективными (опыт проведения экспериментов) [15]. В зависимости от типов ошибок измерения были разработаны различные методы коррекции: метод Монте-Карло симуляции [16; 17], методы пертурбаций [18; 19], методы случайных поверхностей отклика [20; 21] и Байесовские методы [22; 23]. Однако, стохастические методы коррекции на несколько порядков вычислительно затратнее детерминированных методов. Заметим, что вопрос выбора параметров коррекции для стохастических методов не является однозначным [24].

Детерминированные методы коррекции обычно сводятся к итерационной процедуре коррекции параметров КЭ-модели. Среди итерационных методов наиболее популярным и интуитивно понятным является подход, основанный на создании матрицы чувствительности [25–28]. В основе этого метода лежит проблема минимизации целевой функции, равной сумме квадратов разностей между измеренными в эксперименте данными и соответствующими данными, полученными с помощью модели. Удобство такого подхода заключается в том, что в целевой функции одновременно могут фигурировать разнородные параметры, такие, как собственные частоты и отклики конструкций на динамическое воздействие. Чтобы уравновесить вклад этих данных в результирующую функцию авторы работы [29] вводят весовые коэффициенты, значения которых определяют методом анализа иерархий.

Нередко применение методов коррекции приводит к тому, что результирующая система уравнений является плохо обусловленной [30]. Для борьбы с этой проблемой две техники регуляризации наиболее часто используются исследователями: регуляризация Тихонова [31; 32] и сингулярное разложение [33]. Особенности применения обоих подходов на примере модели бетонного сооружения показаны в работе [34].

Известен метод коррекции расчетной динамической модели композитной конструкции [35], основанный на кластерном анализе. Создается исходная конечно-элементная модель конструкции. Экспериментальная частота и форма собственных колебаний определяются в модальных испытаниях. Строится матрица чувствительности для корректируемых параметров. Алгоритм кластеризации по слоям используется для группировки параметров коррекции. Среди всех кластеров для коррекции выбирается тот, которому соответствует наибольшее значение матрицы чувствительности. Решается проблема собственных значе-

ний для расчетной модели. Разности между расчетными и экспериментальными собственными частотами и формами закладываются в целевую функцию, для которой решается задача оптимизации.

Недостатками метода являются:

- ограниченная область применимости (конструкции, изготовленные из слоистых материалов);
- в целевой функции одновременно присутствуют два параметра (собственная частота и собственная форма колебаний), погрешности экспериментального определения которых различаются на порядок;
- характеристики демпфирования колебаний не корректируются и не определяются.

Кузнецовым О. А. и Смысловым В. И. [36] изложен опыт коррекции расчетной динамической модели. В частотных испытаниях одновременно с измерением характеристик вынужденных колебаний производится тензометрирование системы, с помощью чего оцениваются нагрузки на элементы конструкции. Для уточнения параметров расчетной схемы используется минимизация различий экспериментальных и расчетных собственных частот и обобщенных масс.

Известен метод коррекции нелинейной конечно-элементной модели конструкции [37], основанный на создании комплексной матрицы чувствительности. На первом шаге предлагаемого метода создается нелинейная конечно-элементная модель. Затем методом пертурбаций с комплексным шагом изменяются параметры коррекции с целью вычисления матрицы чувствительности нелинейного динамического отклика конструкции. Измеряется отклик реальной конструкции в процессе испытаний, создается целевая функция для нелинейной коррекции КЭ-модели. Наконец, решается задача среднеквадратичной минимизации целевой функции, описывающей отличие расчетного динамического отклика от экспериментального.

Недостатками метода являются:

- не указана область применимости метода (виды нелинейных конструкций);
- метод не позволяет непосредственное определение резонансных частот колебаний конструкции.

В работе Feiner D. и Griffin J. [38] описывается метод коррекции полно-размерной конечно-элементной модели исходя из условий близости параметров модели соответствующим параметрам реальной конструкции. В зависимости от

цели исследования предлагаются две вариации метода применительно к лопаткам двигателя. В одной из них параметрами коррекции являются массовые плотности лопаток, а в другой — упругие свойства материала. По результатам коррекции сопоставляются динамические отклики скорректированной КЭ-модели и реальной конструкции и вычисляются относительные коэффициенты разбалансировки лопаток. Область применимости метода ограничена малоразмерными конструкциями, изготовленными из однородного материала.

Известен метод коррекции расчетных моделей конструкций [39], основанный на вычислении критериев модального соответствия между экспериментальными и расчетными формами собственных колебаний. Создается конечно-элементная модель, с использованием которой проводится модальный анализ для определения форм собственных колебаний конструкции. Эти формы определяются и в модальных испытаниях. Вычисляются критерии модального соответствия между расчетными и экспериментальными формами. В дальнейшем осуществляется выбор форм колебаний по критерию модального соответствия и назначение параметров коррекции по пороговому значению чувствительности. В качестве параметров коррекции выступают как геометрические характеристики конструкции, так и характеристики материалов, из которых она изготовлена. Область применимости метода ограничена достаточно простыми малоразмерными конструкциями.

Guanglie Z. [40] разработал метод мониторинга поврежденности большепролетного моста, основанный на коррекции характеристик его конечно-элементной модели. Мониторинг осуществляется в несколько этапов. Сначала экспериментально определяются частоты собственных колебаний, которые закладываются в уравнения колебаний моста. Затем производится коррекция расчетной модели конструкции Байесовским методом. Величины параметров коррекции определяются по пикам распределения вероятностей. Оценивается разность между текущими параметрами коррекции и параметрами коррекции, соответствующими обучающей выборке. Результирующие значения оцениваются и положения дефектов локализируются.

Недостатком метода является то, что его реализация связана с большим объемом вычислений. Кроме того, параметры дефекта являются локальными (дифференциальными) характеристиками конструкции, а собственные частоты — интегральными. Поэтому однозначность решения задачи мониторинга поврежденности моста требует дополнительного контроля.

1.2 Методы ассемблирования

При работе со сложными динамическими системами возникает необходимость в их декомпозиции на составные части (подконструкции), которые проще анализировать. Модели подконструкций, как правило, уточняются независимо друг от друга, а затем используются для формирования глобальной математической модели, которая позволяет определить динамические характеристики сложной системы более достоверно.

Динамический анализ конструкций обычно выполняется в двух областях: временной [41; 42] и частотной [43]. В общем случае мы можем утверждать, что любая подконструкция во временной области может быть связана с любой другой подконструкцией во временной области, а любая подконструкция в частотной области может быть связана с любой другой подконструкцией в частотной области [44].

Независимо от того, моделируются ли подконструкции во временной или частотной области, при стыковке подконструкций должны выполняться следующие условия:

1. совместность перемещений стыковочных степеней свободы;
2. уравнения равновесия.

Наиболее распространенными методами ассемблирования, которые удовлетворяют описанным условиям, на текущий момент являются:

- Primal assembly. Выбор уникального набора степеней свободы при котором обе подконструкции имеют одинаковый набор интерфейсных узлов, что приводит к автоматическому выполнению уравнений совместности перемещений и равновесия [45].
- Dual assembly. Выбор такой комбинации степеней свободы при которой уравнения равновесия могут быть удовлетворены априори [46].

Отметим, что стыковка во временной области предполагает собой ассемблирование матриц, описывающих свойства конструкций, по соответствующим степеням свободы. Выбранные степени свободы должны однозначно определять поведение результирующей конструкции (Maximum Rank Coordinate Choice) [47]. Учет физических свойств закрепления конструкций может быть достигнут с использованием весовых функций соединения узлов (Modal constraints for fixture and subsystem) [48].

Рассмотрим модель динамической системы, состоящей из n связанных подконструкций. Представим уравнения движения составных частей системы в виде [49; 50]:

$$\mathbf{M}^{(r)}\ddot{\mathbf{u}}(t)^{(r)} + \mathbf{C}^{(r)}\dot{\mathbf{u}}(t)^{(r)} + \mathbf{K}^{(r)}\mathbf{u}(t)^{(r)} = \mathbf{f}(t)^{(r)} + \mathbf{g}(t)^{(r)}, \quad r = 1 \dots n, \quad (1.1)$$

где каждая подконструкция описывается:

- $\mathbf{M}^{(r)}$, $\mathbf{C}^{(r)}$, $\mathbf{K}^{(r)}$ — матрицами масс, демпфирования и жесткости;
- $\mathbf{u}(t)^{(r)}$ — вектором узловых перемещений;
- $\mathbf{f}(t)^{(r)}$ — вектором внешних сил;
- $\mathbf{g}(t)^{(r)}$ — вектором сил, приходящих от других подконструкций.

После объединения матриц подконструкций в выражении (1.1), уравнение движения системы может быть записано в блочно-диагональной форме [49]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t), \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left(\mathbf{M}^{(1)} \dots \mathbf{M}^{(n)} \right), \quad \mathbf{C} = \text{diag} \left(\mathbf{C}^{(1)} \dots \mathbf{C}^{(n)} \right), \quad \mathbf{K} = \text{diag} \left(\mathbf{K}^{(1)} \dots \mathbf{K}^{(n)} \right),$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t)^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{u}(t)^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t)^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{f}(t)^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(t)^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{g}(t)^{(n)} \end{Bmatrix}.$$

Уравнения совместности обеспечивают равенство перемещений собираемых подконструкций по всем степеням свободы в каждый момент времени t [49]:

$$\mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t) = 0, \quad (1.3)$$

где каждая строка матрицы $\mathbf{V}(t)$ соответствует паре степеней свободы, которые объединяются в момент времени t . Заметим, что $\mathbf{V}(t)$ в большинстве случаев является булевой матрицей, представимой в виде [50]:

$$\mathbf{V}(t) = \left[\mathbf{V}(t)^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{V}(t)^{(n)} \right]. \quad (1.4)$$

Уравнения равновесия для пары подконструкций r и l предполагают равенство нулю суммы сил, действующих в сопрягаемых степенях свободы l и m в каждый момент времени t : $g_l(t)^{(r)} + g_m(t)^{(s)} = 0$. В случае, если связи между подконструкциями отсутствуют, то $g_l(t)^{(r)} = g_m(t)^{(s)} = 0$. Обобщая сказанное, уравнения равновесия запишутся в матричном виде [49]:

$$\mathbf{L}(t)\mathbf{g}(t) = 0, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{L}(t)$ — булева матрица связей.

Таким образом, система уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) описывает совместные движения всех подконструкций во временной области.

Ассемблирование с использованием частотных откликов конструкций (FRF) зачастую осуществляется следующим образом [51]:

$$\mathbf{H}_{Cij} = [\mathbf{H}_A]_{is}([\mathbf{H}_A]_{ss} + [\mathbf{H}_B]_{ss})^{-1}\{\mathbf{H}_B\}_{sj}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} — ассемблируемые подконструкции; \mathbf{C} — результат стыковки подконструкций; \mathbf{H} — FRF матрица; $[\mathbf{H}]$ — строка FRF матрицы; $\{\mathbf{H}\}$ — столбец FRF матрицы; i, j — внеинтерфейсные степени свободы; s — интерфейсные степени свободы.

Однако, если матрицы являются плохо обусловленными и/или содержат шум, могут возникнуть проблемы с вычислением обратной матрицы [52]. В этом случае возможно вычислением псевдообратной матрицы с использованием сингулярного разложения матриц (Singular Value Decomposition — SVD). В соответствии с этой теорией ($n \times m$) комплексная матрица $[\mathbf{G}]$ представляется в виде [52]:

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{U}][\mathbf{\Sigma}][\mathbf{V}]^H, \quad (1.7)$$

где

- $[\mathbf{U}]$ — Унитарная ($n \times n$) матрица (т.е. $[\mathbf{U}][\mathbf{U}]^H = [\mathbf{U}]^H[\mathbf{U}] = [\mathbf{I}]$). Столбцы этой матрицы носят название левых сингулярных векторов.
- $[\mathbf{\Sigma}]$ — Действительная ($n \times m$) псевдодиагональная матрица. Её элементы носят название сингулярных значений, которые расположены в убывающем порядке.
- $[\mathbf{V}]$ — Унитарная ($n \times n$) матрица. Столбцы этой матрицы называют правыми сингулярными векторами.

Результирующая псевдообратная матрица находится из следующего соотношения [52]:

$$[\mathbf{G}]^+ = [\mathbf{V}]_r[\mathbf{\Sigma}]_r^{-1}[\mathbf{U}]_r^H, \quad (1.8)$$

где индекс r означает срез по ненулевым сингулярным числам.

Амплитудно-частотные отклики конструкций также могут быть использованы для определения их упругих и массовых характеристик [53–55].

1.3 Классический модальный анализ

Основным методом наземных модальных испытаний ЛА является классический модальный анализ при многоточечном возбуждении и измерении колебаний [56]. Теоретическое обоснование методов многоточечного возбуждения и способы подбора сил изложены в работах [57–62]. Монография [61] содержит также обзор современных подходов к модальным испытаниям, примеры реализации которых изложены в [63–67]. Оценки погрешностей определения параметров собственных тонов колебаний приведены в работах [60; 68–70]. Отмечается, что наиболее чувствительными к случайным ошибкам в экспериментальных данных являются способы определения обобщенных масс. В [71] методом статистического моделирования сделаны оценки точности определения собственных частот, обобщенных масс и обобщенных коэффициентов демпфирования при наличии случайных ошибок в измерениях колебаний. Так же, как и в работах других авторов, отмечается, что повышенной чувствительностью к погрешностям эксперимента обладают способы определения обобщенных масс. Показано, в частности, что при использовании метода введения квадратурной составляющей возбуждения математическое ожидание случайных величин обобщенной массы является смещенной оценкой. В работе [72] изучено взаимное влияние тонов с близкими собственными частотами, а в [73] представлены результаты исследований влияния системы упругого вывешивания ЛА на точность определения модальных параметров.

Одной из первых работ, посвященных использованию результатов модальных испытаний для коррекции расчетных моделей конструкций, является статья [74], а более обширная библиография представлена в [61]. Пример применения модальных испытаний для верификации конечно-элементных моделей описан в [75].

1.4 Операционный модальный анализ

Методы операционного модального анализа используются для оценки модальных характеристик конструкций. В ряде случаев схема многоточечного возбуждения не может быть реализована в силу значительных размеров конструкций

и/или воздействие не может быть напрямую измерено. В этих случаях в качестве исходных данных используются только сигналы откликов.

Принципиальные допущения, лежащие в основе методов операционного модального анализа [76]:

1. Воздействие представляет собой стационарный белый шум.
2. Система является стационарной.
3. Система является наблюдаемой: расположение датчиков на конструкции позволяет определить все тона колебаний, лежащие в интересующем частотном диапазоне.

Методы операционного модального анализа делятся на две категории: частотные и временные методы [77; 78]. При проведении анализа во временной области импульсные характеристики аппроксимируются как корреляционные функции. Основной недостаток таких методов — импульсная характеристика с отдельно взятого датчика является суперпозицией колебаний по всем тонам совместно. Методы анализа в частотной области основываются на предположении о том, что спектральное разложение процесса происходит по частотам собственных колебаний конструкций [76].

1.4.1 Методы идентификации в частотной области

Методы идентификации в частотной области делятся на непараметрические и параметрические (рисунок 1.1).

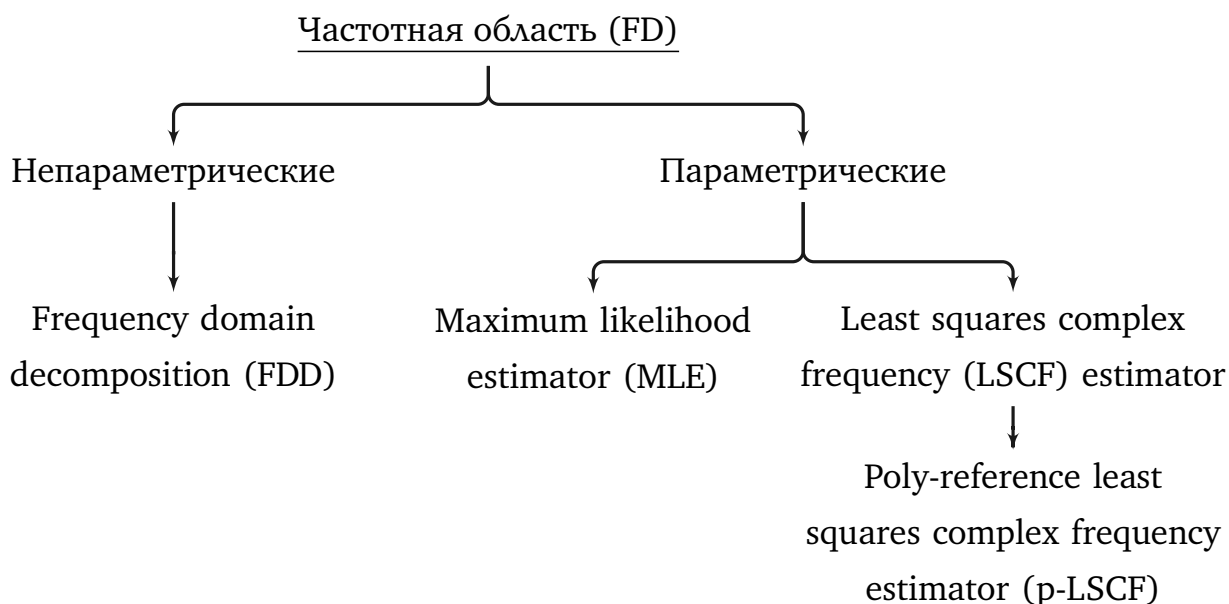


Рисунок 1.1 — Методы идентификации в частотной области [79]

В рамках параметрических методов используются оптимизационные алгоритмы для минимизации невязки между идентифицируемой моделью и измеренными откликами. Применение методов возможно только при наличии достаточной информации о типе вероятностного распределения исследуемых сигналов. В случае, когда такая информация не может быть получена априори, описание откликов имеет непараметрический вид [80].

При использовании непараметрического метода FDD устанавливаются взаимосвязи между спектральными плотностями мощности измеренных сигналов откликов и возбуждений. Матрица, построенная на основе выстроенных связей, подвергается спектральному разложению и представляется в виде набора функций автоспектральной плотности мощности, соответствующих каждой степени свободы системы [81]. Однако, метод FDD позволяет оценивать только формы колебаний, исключая возможность определения частот и декрементов колебаний.

Идея метода оценки максимального правдоподобия MLE состоит в решении переопределенной системы уравнений, построенной на основе матрицы спектральной плотности мощности. Недостатками метода являются неустойчивая сходимость и существенная зависимость от начального приближения [82]. Для устранения описанных недостатков разработан метод LSCF. По результатам проведенных исследований была отмечена высокая вычислительная эффективность разрабатываемого метода по сравнению с MLE, что привело к его широкому распространению и дальнейшему развитию [83].

Наиболее обширное применение для динамического анализа конструкций нашел параметрический метод p -LSCF [84]. Недостатком этого метода является невозможность идентификации близких тонов колебаний. Описанного недостатка лишен метод PolyMAX, который представляет собой развитие p -LSCF и используется в коммерческих продуктах, распространяемых компанией LMS. Подробное описание метода приведено в [85].

1.4.2 Методы идентификации во временной области

Вследствие ограничения частотного разрешения, а также эффекта растекания спектра, нередко используют методы идентификации во временной области (рисунок 1.2). Их дополнительным преимуществом является отсутствие

необходимости определения передаточных функций системы — используются только данных откликов.

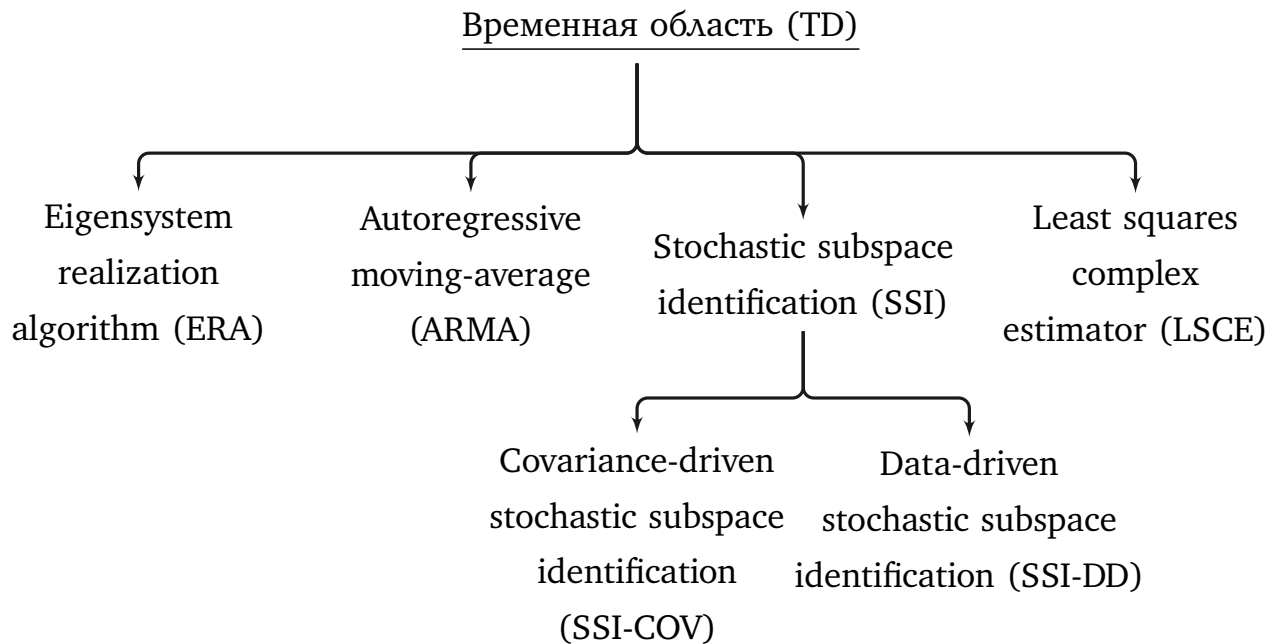


Рисунок 1.2 — Методы идентификации во временной области [79]

Метод комплексной среднеквадратической оценки LSCE является аналогом метода LSCF во временной области. Подробное описание метода представлено в книге [86].

Модель авторегрессии — скользящего среднего (ARMA)

Авторегрессионные модели являются стохастическими разностными моделями, которые описывают временные данные в параметрической форме. Запишем векторную авторегрессионную модель порядка q для ускорений $\ddot{\mathbf{u}}(k)$ в дискретный момент времени k [87]:

$$\ddot{\mathbf{u}}(k) = \sum_{j=1}^q \mathbf{L}_j^{(q)} \ddot{\mathbf{u}}(k-j) + \mathbf{v}(k), \quad (1.9)$$

где $\mathbf{L}_j^{(q)}$ — матрица коэффициентов для лага j и вектора ошибок гауссовского шума $\mathbf{v}(k)$.

Параметры авторегрессионной модели находятся посредством минимизации невязок между временными данными и их параметрическим представлением. Для

нахождения модальных параметров векторная авторегрессионная модель преобразуется к модели в пространстве состояний [88]:

$$\ddot{\mathbf{U}}_q(k) = \mathbf{R}_q \ddot{\mathbf{U}}_q(k-1) + \mathbf{Y}(k), \quad (1.10)$$

где

$$\ddot{\mathbf{U}}_q(k) = \left\{ \ddot{\mathbf{u}}(k) \quad \ddot{\mathbf{u}}(k-1) \quad \dots \quad \ddot{\mathbf{u}}(k-q+1) \right\}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{R}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^{(q)} & \mathbf{L}_1^{(q)} & \dots & \mathbf{L}_{q-1}^{(q)} & \mathbf{L}_q^{(q)} \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \left\{ \mathbf{v}(k)^T \quad \mathbf{0}_{1 \times p} \quad \dots \quad \mathbf{0}_{1 \times p} \right\}. \quad (1.13)$$

Матрица \mathbf{R}_q описывает динамические свойства колеблющейся конструкции. Модальные параметры находятся из решения проблемы собственных значений [89]:

$$\mathbf{R}_q = \psi_q \mathbf{\Lambda}_q \psi_q^{-1}, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{\Lambda}_q = \text{diag}\{\lambda_j\}$; ψ_q — матрица, составленная из собственных векторов \mathbf{R}_q .

Частота ω_j и относительный коэффициент демпфирования ξ_j определяются на основании собственного значения каждого тона колебаний [90]:

$$\omega_j = \frac{|\log(\lambda_j)|}{\Delta t}, \quad \xi_j = \frac{\text{Re}(\log(\lambda_j))}{|\log(\lambda_j)|}, \quad (1.15)$$

где Δt — шаг дискретизации по времени.

Существенными недостатками рассматриваемого метода являются неустойчивая сходимость и высокие вычислительные затраты, необходимые для определения модальных параметров.

Методы идентификации стохастической модели в пространстве состояний (SSI)

Методы идентификации стохастической модели в пространстве состояний широко используются для анализа динамических параметров механических систем. Существует две разновидности этого подхода: на основе ковариационной

(корреляционной) матрицы SSI-COV и на основе построения проекций исходных сигналов SSI-DD [86].

Как показано в работе [91], эти подходы являются тесно связанными. Однако, метод SSI-COV основывается на более простых предположениях и позволяет быстрее обрабатывать данные откликов, тогда как SSI-DD позволяет проводить расширенную постобработку получаемых результатов, например, оценивать вклад каждого тона колебаний.

Стохастическая модель в пространстве состояний строится на основе уравнений движения системы в модальных координатах [92]:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{C}_2\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{u}(t), \quad (1.16)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C}_2 , \mathbf{K} — матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно; $\mathbf{u}(t)$ — вектор неизвестных воздействий.

Вектор отклика $\mathbf{y}(t)$ запишется [79]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L}_a\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{L}_v\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{L}_d\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (1.17)$$

где \mathbf{L}_a , \mathbf{L}_v и \mathbf{L}_d — это матрицы, описывающие связь модальных функций с ускорениями, скоростями и перемещениями; $\mathbf{v}(t)$ — вектор, описывающие шумовую составляющую системы.

Таким образом, стохастическая модель в пространстве состояний запишется [93]:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{P}_c\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t), \quad (1.18)$$

где

$$\mathbf{s}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_c = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2 & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Система может быть записана в дискретном виде $t = k\Delta t$ на основании того, что шум в отклике $\mathbf{v}(t)$ и возбуждении $\mathbf{u}(t)$ является белым [79]:

$$\begin{cases} \mathbf{s}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{s}(k) + \mathbf{w}_1(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + \mathbf{w}_2(k), \end{cases} \quad (1.20)$$

где $\mathbf{w}_1(k)$ и $\mathbf{w}_2(k)$ — это независимые шумовые слагаемые.

Матрицы \mathbf{P} и \mathbf{C} задаются как [79]:

$$\mathbf{P} = e^{\mathbf{P}_c\Delta t}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_v & -\mathbf{L}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2 & \mathbf{L}_d - \mathbf{L}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Целью модальной идентификации является нахождение собственных значений χ_n и векторов φ_n через которые определяются собственные частоты f_n , формы колебаний a_n и относительные коэффициенты демпфирования [79]:

$$\mu_n = \frac{\ln(\chi_n)}{\Delta t}, \quad f_n = \frac{|\mu_n|}{2\pi}, \quad \zeta = -\frac{\operatorname{Re}(\mu_n)}{|\mu_n|}, \quad a_n = \mathbf{C}\varphi_n. \quad (1.23)$$

Алгоритм построения реализации по собственным колебаниям в пространстве состояний (ERA)

По аналогии с (1.18) стохастическая модель в пространстве состояний записывается [94]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{M}\mathbf{y}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где расчетному шагу k соответствуют: \mathbf{x} — вектор состояния системы; \mathbf{u} — вектор воздействий, оказываемых на систему; \mathbf{y} — вектор откликов системы; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — дискретные матрицы в методе пространства состояний.

Для получения импульсных характеристик по откликам на случайное воздействие, к временным сигналам применяется метод Natural Excitation Technique (NExT) [95]. В этом случае матрицы \mathbf{B} и \mathbf{D} не могут быть определены вследствие того, что воздействие является неизвестным. Тем не менее, модальные параметры системы могут быть рассчитаны по матрицам \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Первым шагом расчетного алгоритма является построение блочной обобщенной ганкелевой матрицы ($r \times s$) [96]:

$$\mathbf{H}_{rs}(k-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+t_1) & \dots & \mathbf{y}(k+t_{s-1}) \\ \mathbf{y}(j_1+k) & \mathbf{y}(j_1+k+t_1) & \dots & \mathbf{y}(j_1+k+t_{s-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(j_{r-1}+k) & \mathbf{y}(j_{r-1}+k+t_1) & \dots & \mathbf{y}(j_{r-1}+k+t_{s-1}) \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

где r и s — число строк и столбцов матрицы; $j_i \in [1, r-1]$, $t_i \in [1, s-1]$ — случайные целые числа.

Для системы n -го порядка, используя сингулярное разложение матрицы (1.25), найдем матрицы \mathbf{P} и \mathbf{Q} такие, что [96]:

$$\mathbf{H}_{rs}(0) = \mathbf{P}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^T. \quad (1.26)$$

Тогда собственные значения \mathbf{z} и векторы ψ находятся в результате решения обобщенной проблемы собственных значений [94]:

$$\psi^{-1} \left[\Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_{rs}(k) \mathbf{Q} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \right] \psi = \mathbf{z}, \quad (1.27)$$

где Σ — диагональная матрица, состоящая из ненулевых сингулярных чисел ганкелевой матрицы.

Выводы по главе 1

На основании выполненного литературного обзора можно сделать вывод о том, что известные методы не всегда могут быть использованы для коррекции расчетных моделей конструкций летательных аппаратов, а во многих случаях не позволяют получить достоверные результаты. Это заключение объясняется тем, что:

- при использовании стохастических методов коррекции информация о типе распределения экспериментальных погрешностей не может быть априори получена, а выбор параметров коррекции не является однозначным;
- при использовании детерминированных методов коррекции в целевой функции фигурируют, как правило, два параметра: собственные частоты и формы колебаний, погрешности экспериментального определения которых существенно различаются;
- для установления меры соответствия расчетной модели реальной конструкции не проводится диагностирование дефектов.

Глава 2 *Коррекция и синтез расчетных динамических моделей конструкций*

Расчетные динамические модели разрабатываются на этапе проектирования летательных аппаратов. Они используются в оценках эксплуатационной нагруженности, обеспечении прочности, управляемости и аэроупругой устойчивости. По завершению расчетного этапа изготавливаются динамически-подобные модели и проблема аэроупругой устойчивости решается экспериментально [97]. Затем строится опытное изделие, а за ним и серийные. Расчетные динамические модели сопровождают экспериментальные исследования, опытную и серийную эксплуатацию летательных аппаратов. При этом расчетные модели корректируются по результатам экспериментального модального анализа, которым подвергаются динамически-подобные модели, опытные и выборочно серийные летательные аппараты [97; 98].

Важно отметить, что расчетной моделью летательного аппарата является модель свободной динамической системы. В то же время для модальных испытаний авиационная техника либо устанавливается на шасси, либо помещается на специальную систему упругого вывешивания, а космические конструкции — на систему обезвешивания. Системы упругого вывешивания и обезвешивания, влияние которых на свободную конструкцию строго регламентировано, являются сложными и дорогостоящими техническими сооружениями. Кроме того, известные методы коррекции математических моделей конструкций не предполагают использование моделей для граничных условий, отличных от тех, что были реализованы в эксперименте [99–104].

В данной главе формулируется математическая постановка задач коррекции, освобождения и синтеза. На основе идеи метода статистического моделирования оценивается устойчивость алгоритма коррекции к погрешностям в целевых значениях динамических параметров. Проводится тестирование разрабатываемых методик на модельных задачах. Кратко описываются особенности созданного программного комплекса.

2.1 Коррекция упругих характеристик

Пусть задана конечно-элементная модель исследуемого объекта в виде матриц жесткости \mathbf{K} и масс \mathbf{M} , тогда собственные числа $\lambda = 2\pi\nu$ (где ν — частота собственных колебаний) и формы колебаний \mathbf{Y} определяются из решения обобщенной проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \mathbf{Y} = 0. \quad (2.1)$$

Для изменения динамических свойств КЭ-модели дополним её корректирующей моделью. Структура вводимой модели представлена внутренними и внешними корректирующими элементами. Первые определяют изменение характеристик самой модели, а вторые ответственны за коррекцию параметров внешних связей, накладываемых на модель. Корректирующие элементы строятся на узлах исходной модели.

Обладая конструкторской документацией и результатами взвешивания конструкции, инерционные характеристики модели могут быть определены достаточно точно. Однако уточнение упругих характеристик модели не столь однозначно в силу совокупного объема факторов, обуславливающих погрешности моделирования: дискретизация модели, неточность задания упругих свойств материалов и граничных условий. Поэтому будем вносить изменения только в матрицу жесткости путем добавления к исходной матрице \mathbf{K} матрицы жесткости корректирующей КЭ-модели $\Delta\mathbf{K}$, полагая матрицу масс определенной точно. При этом корректирующая матрица жесткости записывается в виде:

$$\Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{K}^{\text{int}} + \Delta\mathbf{K}^{\text{ext}}, \quad (2.2)$$

где $\Delta\mathbf{K}^{\text{int}}$ и $\Delta\mathbf{K}^{\text{ext}}$ — матрицы жесткости внутренних и внешних корректирующих элементов.

Матрица жесткости внутреннего корректирующего элемента в общем случае имеет вид:

$$\Delta\mathbf{K}_j^{\text{int}} = \sum_{p=1}^q c_{j+p-1}^{\text{int}} \mathbf{G}_j^{(p)}, \quad j = 1 \dots e, \quad (2.3)$$

где c_{j+p-1}^{int} — неизвестная внутренняя корректирующая жесткость; q — число внутренних корректирующих жесткостей, описывающих элемент; $\mathbf{G}_j^{(p)}$ — парциальная матрица жесткости внутреннего корректирующего элемента; e — число

внутренних корректирующих элементов. Матрица (2.3) симметричная, поэтому не нарушает симметрию матрицы жесткости корректируемой модели при суммировании с ней.

Число корректирующих жесткостей q зависит от числа физических параметров, которыми описывается добавляемый элемент. В случае, если динамические свойства модели существенно зависят от изгибных и крутильных жесткостей её балочных или оболочечных элементов, предлагается использовать корректирующую КЭ-модель из балочных элементов ($q = 4$). Тогда парциальные матрицы корректирующего элемента примут вид:

$$\mathbf{G}_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{G}_j^{(2)} = \begin{pmatrix} 6\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 & -6\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 \\ 3\ell\mathbf{D}_4^\top & 2\ell^2\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & \ell^2\mathbf{D}_3 \\ -6\mathbf{D}_2^\top & -3\ell\mathbf{D}_4 & 6\mathbf{D}_2 & -3\ell\mathbf{D}_4 \\ 3\ell\mathbf{D}_4^\top & \ell^2\mathbf{D}_3^\top & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & 2\ell^2\mathbf{D}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_j^{(3)} = \begin{pmatrix} 6\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & -6\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top \\ -3\ell\mathbf{D}_4 & 2\ell^2\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 & \ell^2\mathbf{D}_2 \\ -6\mathbf{D}_3^\top & 3\ell\mathbf{D}_4^\top & 6\mathbf{D}_3 & 3\ell\mathbf{D}_4^\top \\ -3\ell\mathbf{D}_4 & \ell^2\mathbf{D}_2^\top & 3\ell\mathbf{D}_4 & 2\ell^2\mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_j^{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix},$$

где ℓ — длина корректирующего балочного элемента; $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$ — матрицы, состоящие из направляющих косинусов:

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} d_{k,1}^2 & d_{k,1}d_{k,2} & d_{k,1}d_{k,3} \\ d_{k,2}d_{k,1} & d_{k,2}^2 & d_{k,2}d_{k,3} \\ d_{k,3}d_{k,1} & d_{k,3}d_{k,2} & d_{k,3}^2 \end{pmatrix}, k = 1 \dots 3,$$

$$\mathbf{D}_4 = \begin{pmatrix} d_{2,1}d_{3,1} & d_{2,1}d_{3,2} & d_{2,1}d_{3,3} \\ d_{2,2}d_{3,1} & d_{2,2}d_{3,2} & d_{2,2}d_{3,3} \\ d_{2,3}d_{3,1} & d_{2,3}d_{3,2} & d_{2,3}d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Для коррекции модели, составленной из объемных элементов, в качестве корректирующей КЭ-модели используется ферменная конструкция ($q = 1$).

В качестве внешних корректирующих элементов предлагается использовать пружинные опоры, прикрепленные к неподвижному основанию. Тогда матрица $\Delta\mathbf{K}^{\text{ext}}$ имеет следующий вид:

$$\Delta\mathbf{K}^{\text{ext}} = \text{diag}\{c_1^{\text{ext}}, c_2^{\text{ext}}, \dots, c_N^{\text{ext}}\}, \quad (2.4)$$

где N — размерность КЭ-модели, c^{ext} — неизвестные внешние корректирующие жесткости.

Заметим, что жесткости корректирующих элементов могут быть отрицательными для изменения упругости конструкции в сторону уменьшения. При этом жесткости каждого вводимого элемента являются параметрами коррекции, которые подлежат определению из решения задачи безусловной минимизации целевой функции. Полный вектор разыскиваемых параметров записывается по всем жесткостям внутренних и внешних корректирующих элементов: $c = (c^{\text{int}}, c^{\text{ext}})$.

На рисунке 2.1 приведена принципиальная схема, иллюстрирующая физическую сторону предлагаемой методики на примере простой модели летательного аппарата. В данном случае модель составлена из объемных и оболочечных элементов, поэтому для изменения её динамических свойств вводятся как балочные, так и ферменные корректирующие элементы. Кроме того, для описания модели упругого основания, вводятся пружинные элементы. Таким образом, корректирующая модель образует «каркасную» структуру над исходной моделью.

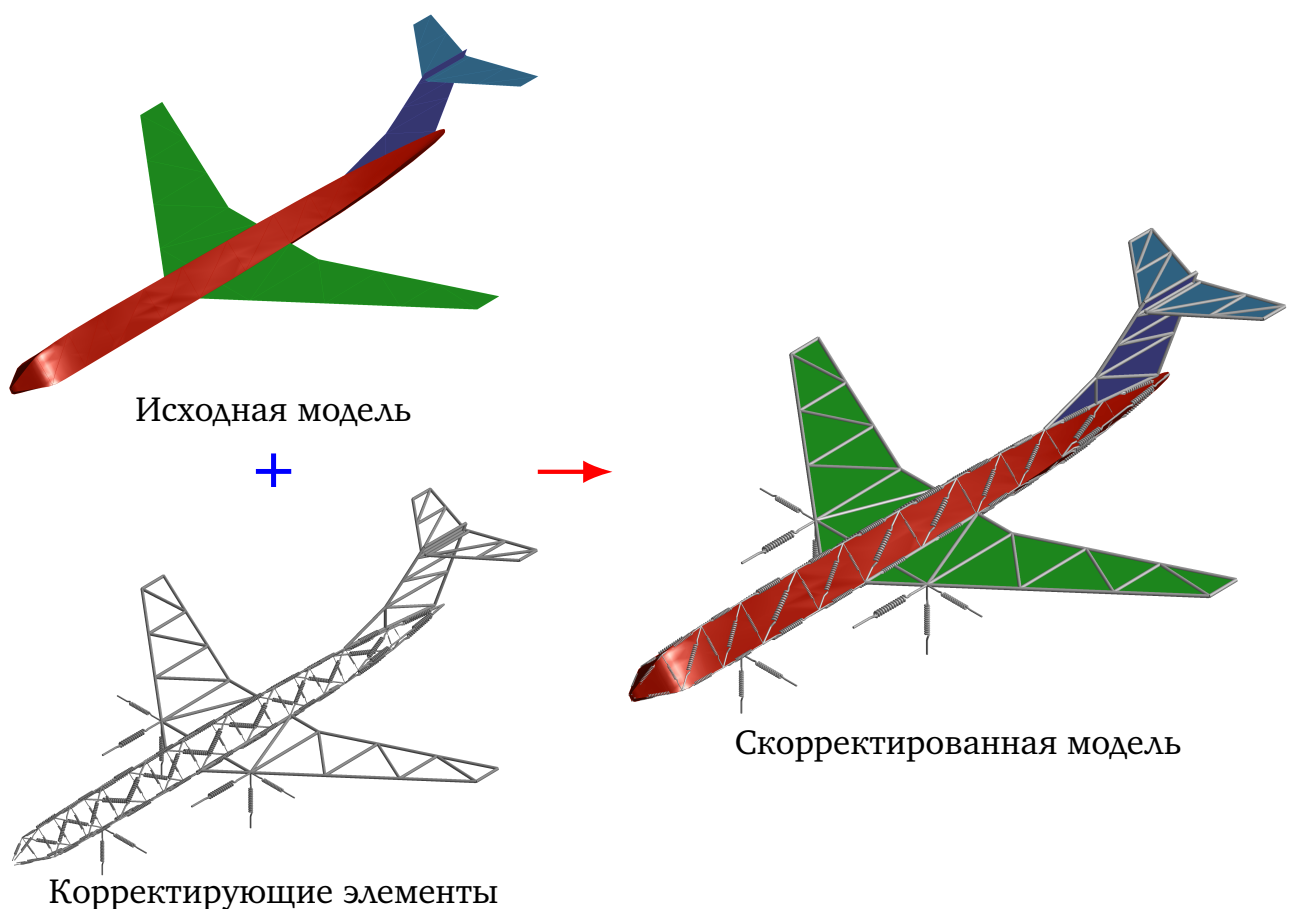


Рисунок 2.1 — Принципиальная схема коррекции

Для автоматического формирования набора внутренних корректирующих элементов используется портрет матрицы жесткости корректируемой конструк-

ции. Так, если в матрице линейные степени свободы двух узлов «связаны» между собой внедиагональными элементами, то добавляется корректирующий элемент между этими узлами. В общем случае число таких корректирующих элементов определяется количеством связей между узлами в матрице, но оно может быть уменьшено посредством выбора областей коррекции, например, элементов конструкции с наибольшей неопределенностью физических и геометрических характеристик. Кроме того, число независимых корректирующих жесткостей может быть уменьшено посредством введения зависимостей между элементами. Например, могут быть учтены геометрические особенности конструкции: наличие плоскостей симметрии и конструктивно идентичных элементов. Дополнительно могут быть назначены узлы для введения внешних корректирующих элементов, описывающих линейные и вращательные упругие связи. Кроме того, можно проводить поэтапную коррекцию, в ходе которой в качестве целевых принимаются различные группы частот.

В зависимости от геометрии модели и типов конечных элементов может получиться так, что при добавлении (2.3) к матрице жесткости исходной конструкции появятся новые ненулевые элементы (изменится портрет разреженной матрицы). Такая ситуация возникает, например, когда есть геометрическая симметрия относительно некоторого узла и в исходном портрете соответствующие элементы при ассемблировании матрицы жесткости в сумме дают ноль и не попадают в портрет. Поэтому перед началом процедуры коррекции портрет матрицы жесткости дополняется портретом корректирующей матрицы.

Рассмотрим алгоритм методики коррекции на примере одного целевого значения для упрощения индексных обозначений, а затем обобщим формулы для случая коррекции по нескольким значениям собственных частот. Пусть в результате коррекции необходимо достигнуть целевого значения λ^* . Необходимо найти такую ΔK^* , чтобы достигнуть значения λ^* при решении следующей обобщенной проблемы:

$$[(K + \Delta K^*) - \lambda^* M] Y^* = 0. \quad (2.5)$$

Так как в (2.5) собственный вектор Y^* зависит от матрицы ΔK^* , то использовать (2.5) напрямую как нелинейное матричное уравнение для поиска корректирующих жесткостей слишком затратно с вычислительной точки зрения: придется многократно решать обобщенную проблему. Поэтому для поиска корректирующей матрицы ΔK^* предлагается следующий итерационный алгоритм.

Пусть решена обобщенная проблема для исходной модели

$$\left(\mathbf{K} - \lambda^{(0)} \mathbf{M} \right) \mathbf{Y}^{(0)} = 0, \quad (2.6)$$

то есть найдены $\lambda^{(0)}$ и $\mathbf{Y}^{(0)}$. Здесь и далее верхний индекс в круглых скобках обозначает номер итерации. На первой итерации ищем такое $\Delta \mathbf{K}^{(1)}$, чтобы удовлетворить следующему уравнению:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(1)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь необходимо отметить, что $\Delta \mathbf{K}^{(1)}$ является функцией от корректирующих жесткостей c_1, c_2, \dots, c_m .

Число корректирующих жесткостей m в общем случае равняется $q \cdot e + N$, а следовательно, больше числа уравнений в (2.7). Поэтому для решения (2.7) устремим к нулю следующую скалярную величину (невязку):

$$f^{(1)} = \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta \mathbf{K}^{(1)} - \Delta \lambda^{(1)*} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)}, \quad (2.8)$$

где $\Delta \lambda^{(1)*} = \lambda^* - \lambda^{(0)}$.

В результате минимизации невязки (2.8) получим $\Delta \mathbf{K}^{(1)}$ и, решив новую обобщенную проблему

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(1)} \right) - \lambda^{(1)} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0, \quad (2.9)$$

найдем $\lambda^{(1)}$ и $\mathbf{Y}^{(1)}$. Это первая итерация методики. Аналогично (2.7) составим следующее уравнение для поиска $\Delta \mathbf{K}^{(2)}$:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(1)} + \Delta \mathbf{K}^{(2)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0, \quad (2.10)$$

представим $\lambda^* = (\lambda^{(1)} + \Delta \lambda^{(2)*})$, тогда (2.10) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(1)} + \Delta \mathbf{K}^{(2)} \right) - (\lambda^{(1)} + \Delta \lambda^{(2)*}) \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} &= 0; \\ \left[\Delta \mathbf{K}^{(2)} - \Delta \lambda^{(2)*} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\Delta \lambda^{(2)*} = \lambda^* - \lambda^{(1)}$. Аналогично (2.8) устремим к нулю невязку

$$f^{(2)} = \left(\mathbf{Y}^{(1)} \right)^T \left[\Delta \mathbf{K}^{(2)} - \Delta \lambda^{(2)*} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)}. \quad (2.12)$$

Это была вторая итерация методики коррекции. Обобщим формулы на случай нескольких целевых собственных значений. Пусть их число равно s . Таким

образом, на каждой итерации методики коррекции минимизируется следующая целевая функция:

$$F^{(j+1)}(c_1, c_2, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^s w_i \left[f_i^{(j+1)} \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^s w_i \left[\left(\mathbf{Y}_i^{(j)} \right)^\top \Delta \mathbf{K}^{(j+1)} \mathbf{Y}_i^{(j)} - \Delta \lambda_i^{(j+1)*} \left(\mathbf{Y}_i^{(j)} \right)^\top \mathbf{M} \mathbf{Y}_i^{(j)} \right]^2 \rightarrow \min, \quad (2.13)$$

где j — номер итерации, w_i — весовой коэффициент i -го тона.

Для минимизации (2.13) предлагается использовать метод сопряженных градиентов. С вычислительной точки зрения важно найти аналитические выражения для вектора-градиента целевой функции. Для этого найдем производные от целевой функции по неизвестным корректирующим жесткостям (здесь и далее опустим номер итерации в круглых скобках):

$$\frac{\partial F}{\partial c_p} = 2 \sum_{i=1}^s w_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial c_p}, \quad p = 1 \dots m. \quad (2.14)$$

Пусть $y_i^{(r)}, i = 1 \dots N, r = 1 \dots s$ — компоненты вектора собственной формы \mathbf{Y}_r , тогда частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial c_p}$ из (2.14) примут вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_p} = \frac{\partial}{\partial c_p} \left(\mathbf{Y}_r^\top \Delta \mathbf{K} \mathbf{Y}_r \right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N y_j^{(r)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Delta k_{i,j}^{\text{int}}}{\partial c_p} y_i^{(r)}, & p \leq e, \\ \left[y_p^{(r)} \right]^2, & p > e. \end{cases} \quad (2.15)$$

На примере ферменного корректирующего элемента покажем, что для вычисления (2.15) нет необходимости «прокручивать» два цикла (суммы), так как ненулевыми компонентами $\frac{\partial \Delta k_{i,j}^{\text{int}}}{\partial c_p}$ в общем случае без учета симметрии являются максимум 36 элементов в (2.3), поэтому (2.15) можно заменить на циклы по элементам (2.3). Рассмотрим такую замену в случае одного внутреннего корректирующего элемента. Для удобства изложения обозначим произведения направляющих косинусов $\beta_{i,j}$ и введем локальную нумерацию элементов, входящих в произведение (2.15):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}^\top \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & -\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & -\beta_{1,3} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & -\beta_{1,2} & -\beta_{2,2} & -\beta_{2,3} \\ \beta_{1,3} & \beta_{2,3} & \beta_{3,3} & -\beta_{1,3} & -\beta_{2,3} & -\beta_{3,3} \\ \hline -\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & -\beta_{1,3} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ -\beta_{1,2} & -\beta_{2,2} & -\beta_{2,3} & \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ -\beta_{1,3} & -\beta_{2,3} & -\beta_{3,3} & \beta_{1,3} & \beta_{2,3} & \beta_{3,3} \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \beta_{1,1} (y_1 - y_4)^2 +$$

$$\beta_{2,2}(y_2 - y_5)^2 + \beta_{3,3}(y_3 - y_6)^2 + 2\beta_{1,2}(y_1y_2 - y_1y_5 - y_2y_4 + y_4y_5) + 2\beta_{1,3}(y_1y_3 - y_1y_6 - y_3y_4 + y_4y_6) + 2\beta_{2,3}(y_2y_3 - y_2y_6 - y_3y_5 + y_5y_6). \quad (2.16)$$

На основе выражений (2.16) можно вычислить производные $\frac{\partial f}{\partial c_p}$. Рассмотрим другой вариант вычисления производных. Для этого воспользуемся тем фактом, что симметричные матрицы хранятся в виде верхнего или нижнего треугольника, причем в разреженном формате хранения матрицы её элементы отсортированы в порядке возрастания номеров строк и столбцов. Для определенности рассмотрим построчное хранение разреженной матрицы:

$$\Delta \mathbf{K}_j^{\text{int}} = c_j \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} \\ & & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \hline & & & \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} \\ & & & & \beta_{19} & \beta_{20} \\ & & & & & \beta_{21} \end{array} \right). \quad (2.17)$$

В (2.17) введена другая нумерация произведений направляющих косинусов, и для удобства отрицательный знак внесен в значения соответствующих элементов. В общем виде один корректирующий конечный элемент с учетом симметрии имеет максимально 21 ненулевой элемент. В зависимости от конкретных значений направляющих косинусов ненулевых элементов в (2.17) может быть меньше. Для каждого внутреннего корректирующего элемента предлагается хранить все произведения направляющих косинусов в виде последовательности $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{L(j)}$, где $L(j)$ — количество ненулевых элементов j -го корректирующего конечного элемента. Кроме того, для каждого такого элемента хранится порядковый номер элемента в портрете разреженной матрицы жесткости, по которому можно определить строку и столбец $i, j \in [1, N]$, соответствующие номера степеней свободы $id, jd \in [1, 3]$ (перемещения вдоль осей глобальной системы координат) и номера узлов $in, jn \in [1, n]$. Введем обозначения для вспомогательных булевых функций:

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= \delta_{id,jd} \delta_{in,jn}, \\ \tilde{v}_{i,j} &= \delta_{id,jd} - 2\delta_{id,jd} \delta_{in,jn} + \delta_{in,jn}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где δ — символ Кронекера.

Тогда формула для вычисления производной (2.15) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial c_p} = \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k y_i (v_{i,j} y_i + 2\tilde{v}_{i,j} y_j), \quad p = 1 \dots e. \quad (2.19)$$

Если сравнить вычислительные затраты на (2.16) и (2.19), первый имеет примерно в два раза меньше умножений, но для его реализации требуется дополнительная память для массива, содержащего $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}$ для каждого корректирующего элемента.

В процессе итераций при «движении» к целевым значениям частот возможно изменение порядка частот, особенно при наличии в спектре близких и кратных частот, поэтому после каждой итерации необходимо находить соответствие новых тонов колебаний старым. Обычно это можно сделать, используя критерий модального соответствия (MAC-критерий):

$$\text{MAC}(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}) = \frac{(\tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Y})^2}{(\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})}, \quad (2.20)$$

однако при наличии кратных частот колебаний MAC-критерий может дать близкие численные значения сразу для нескольких форм колебаний, что не позволяет установить однозначное соответствие между формами колебаний до и после коррекции. Для решения этой проблемы предлагается находить собственные частоты и формы колебаний на каждом шаге коррекции методом итераций в подпространстве [105], используя в качестве начальных приближений векторы, найденные на предыдущем шаге.

Рассмотрим более общий алгоритм, который в частном случае вырождается в представленный выше. Представим $\lambda^* = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^*$, тогда (2.7) переписется в следующем виде:

$$\left[(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)}) - (\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^*) \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} = 0. \quad (2.21)$$

Вычтем (2.6) из (2.21), составим целевую функцию для поиска $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$:

$$\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(1)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (2.22)$$

где $\Delta\lambda^* = \lambda^* - \lambda^{(0)}$.

Решив задачу минимизации (2.22), получим $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$ и решим новую обобщенную проблему:

$$\left[(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)}) - \lambda^{(1)} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0. \quad (2.23)$$

При этом $\lambda^{(1)} \neq \lambda^*$, если $\Delta\mathbf{K}^{(1)} \neq \Delta\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{Y}^{(1)} \neq \mathbf{Y}^*$. Сформируем целевую функцию для поиска второго приближения $\Delta\mathbf{K}^{(2)}$. Невязка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f &= \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)}, \\ f &= \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \left(\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta\mathbf{Y}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Умножим f слева на транспонированный собственный вектор, получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(2)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(1)} \right\}^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Решив задачу минимизации (2.24), будем иметь $\Delta\mathbf{K}^{(2)}$. Решим новую обобщенную проблему:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} - \lambda^{(2)} \mathbf{M} \right) \mathbf{Y}^{(2)} \right] = 0.$$

При этом $\lambda^{(2)} \neq \lambda^*$, если $\Delta\mathbf{K}^{(2)} \neq \Delta\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{Y}^{(2)} \neq \mathbf{Y}^*$. Сформируем целевую функцию для поиска третьего приближения $\Delta\mathbf{K}^{(3)}$:

$$\left\{ \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(3)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \left(\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta\mathbf{Y}^{(2)} \right) \right\}^2 \rightarrow \min.$$

В итоге аналогично (2.24) получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(3)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(3)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(2)} \right\}^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, проанализировав (2.24) и (2.25), для поиска корректирующей матрицы жесткости $\Delta\mathbf{K}^{(i+1)} \rightarrow \Delta\mathbf{K}^*$ имеем следующую целевую функцию:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(i+1)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \Delta\mathbf{K}^{(i+1)} \Delta\mathbf{Y}^{(i)} + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\mathbf{K} - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(i)} \right\}^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Выберем следующую нормировку для собственных векторов $\mathbf{Y}^{(0)}$:

$$\left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(0)} = 1.$$

После решения обобщенной проблемы нормируем $\mathbf{Y}^{(i)}$ — сначала $(\mathbf{Y}^{(i)})^\top \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(i)} = 1$, для установления соответствия тонов колебаний до и после коррекции по МАС-критерию, а затем $(\mathbf{Y}^{(0)})^\top \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(i)} = 1$, тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^{(0)})^\top \mathbf{M} (\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta \mathbf{Y}^{(i)}) &= 1, \\ (\mathbf{Y}^{(0)})^\top \mathbf{M} \Delta \mathbf{Y}^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, целевая функция (2.26) примет следующий вид:

$$\left\{ (\mathbf{Y}^{(0)})^\top \Delta \mathbf{K}^{(i+1)} \mathbf{Y}^{(i)} + \left[(\mathbf{Y}^{(0)})^\top \mathbf{K} \Delta \mathbf{Y}^{(i)} - \Delta \lambda^* \right]^2 \right\} \rightarrow \min. \quad (2.27)$$

Выражения для производных от целевой функции, входящие в градиент по типу (2.15) и (2.19), имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial c_p} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k (y_i + \Delta y_i) [v_{i,j} (y_i + \Delta y_i) + 2\tilde{v}_{i,j} (y_j + \Delta y_j)], & p \leq e, \\ (y_i + \Delta y_i)^2, & p > e, \end{cases} \quad (2.28)$$

где y — компоненты вектора $\mathbf{Y}^{(0)}$, а Δy — компоненты вектора $\Delta \mathbf{Y}^{(i)}$.

Таким образом, в целевой функции (2.27) содержатся собственные векторы для двух обобщенных проблем: исходной $[\mathbf{K} - \lambda^{(0)} \mathbf{M}] \mathbf{Y}^{(0)} = 0$ и достигнутой в процессе итераций проблемы для скорректированной матрицы $[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(i)}) - \lambda^{(i)} \mathbf{M}] \mathbf{Y}^{(i)} = 0$ для поиска следующего приближения корректирующей матрицы $\Delta \mathbf{K}^{(i+1)}$. Если обновлять «базовую точку» итерационного процесса на каждой итерации, то получим первый алгоритм с целевой функцией (2.13) при условии выбора нормировки собственных форм к единичным обобщенным массам: $\left[(\mathbf{Y}^{(i)})^\top \Delta \mathbf{K}^{(i+1)} \mathbf{Y}^{(i)} - \Delta \lambda^{(i+1)*} \right]^2 \rightarrow \min$.

Отметим, что по сравнению с численным определением производных компонент вектора невязки, аналитическое представление (2.28) позволяет кратно сократить время, потребное для осуществления коррекции. Кроме того, отпадает необходимость определения оптимального шага численного дифференцирования.

Сходимость представленного итерационного алгоритма существенно зависит от геометрии и физического соответствия расчетной модели реальной конструкции, поэтому она определяется практическим путем в каждом конкретном случае на основе требований, предъявляемых к расчетной модели летательного аппарата. Так, например, если назначением модели является оценка эксплуатационной нагруженности летательного аппарата, то, как правило, коррекция

расчетной модели призвана обеспечивать соответствие с заданной точностью расчетных значений собственных частот низших тонов колебаний их экспериментальным значениям. В то же время решение проблемы аэроупругой устойчивости самолётов требует сохранения в расчетной модели собственных частот таких тонов, которые оказывают первостепенное влияние на исследуемое явление. И степень соответствия модели реальной конструкции здесь определяется ограничениями максимальной скорости летательного аппарата.

Ранее коллективом авторов, включая автора настоящей диссертации, был описан способ коррекции частот для редуцированных КЭ-моделей [106]. Обобщенные массы и жесткости корректируемого тона изменялись пропорционально коэффициентам $(1 + \chi_i)$ и $(1 - \chi_i)$ соответственно, где χ_i определялось из равенства отношения обобщенных характеристик квадрату экспериментальной частоты ω_i . Таким образом, для коррекции i -го тона использовались следующие формулы:

$$\kappa_i^* = \kappa_i(1 + \chi_i), \mu_i^* = \mu_i(1 - \chi_i), \chi_i = \frac{\omega_i^2 \mu_i - \kappa_i}{\omega_i^2 \mu_i + \kappa_i}, \quad i = 1 \dots s, \quad (2.29)$$

где κ_i — обобщенная жесткость, μ_i — обобщенная масса.

После изменения обобщенных характеристик восстанавливаются матрицы жесткости и масс в физической системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= (\mathbf{Y}^{*\top})^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_1^* & 0 & \dots \\ 0 & \kappa_2^* & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} (\mathbf{Y}^*)^{-1}, \\ \mathbf{M}^* &= (\mathbf{Y}^{*\top})^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1^* & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2^* & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} (\mathbf{Y}^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Заметим, что обобщенные характеристики, полученные в результате коррекции полноразмерных и редуцированных моделей отмеченными методами, близки между собой. Однако использование скорректированной полноразмерной модели для дальнейшего анализа: нахождения амплитудно-частотных характеристик, освобождения от закреплений и ассемблирования с другими моделями, является предпочтительным в силу того, что она более полно описывает связи между подконструкциями.

2.2 Моделирование диссипативных характеристик

Полагаем, что по экспериментальным соотношениям между монофазными и собственными колебаниями подтверждено, что матрица демпфирования в главных координатах имеет диагональный вид. Тогда считаем известными s обобщенных коэффициентов демпфирования \mathbf{h}^* , которые определены по результатам экспериментального модального анализа. Матрицу демпфирования в физической системе координат предлагается строить в два этапа: в качестве нулевого приближения использовать гипотезу Е. С. Сорокина, а затем, для достижения целевых обобщенных коэффициентов демпфирования, использовать подход, изложенный в 2.1.

Нулевое приближение матрицы демпфирования формируется в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{K}^* + \beta \mathbf{M}, \quad (2.31)$$

где $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^*$ — скорректированная матрица жесткости, α — коэффициент конструкционного демпфирования, β — коэффициент инерционного демпфирования.

В результате решения обобщенной проблемы (2.5) найдены собственные частоты и формы колебаний \mathbf{Y}^* , которые остаются неизменными в процессе восстановления матрицы демпфирования. Обобщенные жесткости и массы собственных тонов колебаний, для которых известны обобщенные коэффициенты демпфирования, запишутся:

$$\kappa_i = (\mathbf{Y}_i^*)^\top \mathbf{K}^* \mathbf{Y}_i^*, \quad \mu_i = (\mathbf{Y}_i^*)^\top \mathbf{M} \mathbf{Y}_i^*, \quad i = 1 \dots s. \quad (2.32)$$

Для нахождения коэффициентов α и β решаем задачу минимизации целевой функции:

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^s w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta}. \quad (2.33)$$

Запишем выражение для вектора-градиента целевой функции (2.33):

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^s \left[w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right) \frac{\kappa_i}{h_i^*} \right], \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^s \left[w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right) \frac{\mu_i}{h_i^*} \right],$$

$$\text{grad}(G) = \left\{ \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} \right\}^\top. \quad (2.34)$$

Аналогично (2.2) для дальнейшей коррекции будем вносить изменения в нулевое приближение матрицы демпфирования:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}^{\text{int}} + \Delta\mathbf{H}^{\text{ext}}, \quad (2.35)$$

где $\Delta\mathbf{H}^{\text{int}}$ и $\Delta\mathbf{H}^{\text{ext}}$ — матрицы демпфирования внутренних и внешних корректирующих элементов. Под внутренним демпфированием понимаются потери энергии за счет трения в материалах модели, а под внешним — рассеяние энергии при взаимодействии модели с окружающей средой, например, воздухом. Последнее особенно актуально для крупногабаритных конструкций.

Тогда для новой матрицы демпфирования $\tilde{\mathbf{H}}$, используя (2.35), можно записать обобщенные коэффициенты демпфирования в следующем виде (индекс тона опущен):

$$\tilde{h} = h + \Delta h^{\text{int}} + \Delta h^{\text{ext}}. \quad (2.36)$$

Алгоритм восстановления матрицы демпфирования заключается в том, чтобы найти такие параметры $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, которые будут решением следующей недоопределенной системы нелинейных уравнений:

$$f_i = (\mathbf{Y}_i^*)^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{Y}_i^* - h_i^* = \tilde{h}_i - h_i^*, \quad i = 1 \dots s. \quad (2.37)$$

Решением системы (2.37) будем считать решение задачи безусловной минимизации целевой функции, в качестве которой примем сумму квадратов каждого из уравнений с взвешенной суммой квадратов коэффициентов демпфирования:

$$F = \sum_{i=1}^s w_i f_i^2 + w_c \sum_{i=1}^s \eta_i^2 \rightarrow \min, \quad (2.38)$$

где w_i — весовые коэффициенты корректируемых тонов, w_c — параметр регуляризации. Из практики применения методики: если модель достаточно хорошо описывает реальный объект, то можно положить $w_c = 0$.

Для формирования целевой функции (2.38) построим аналитические выражения слагаемых в (2.36) на примере одного тона колебаний:

$$\Delta h^{\text{int}} = \sum_{p=1}^e \left[\eta_p \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k y_i (v_{i,j} y_i + 2\tilde{v}_{i,j} y_j) \right], \quad (2.39)$$

$$\Delta h^{\text{ext}} = \sum_{p=e+1}^m \eta_p y_p^2.$$

Аналитические выражения для частных производных по каждому из корректирующих коэффициентов демпфирования, необходимые для решения задачи минимизации (2.38), имеют вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta_j} = \frac{\partial \Delta h^{\text{int}}}{\partial \eta_j} + \frac{\partial \Delta h^{\text{ext}}}{\partial \eta_j}, \quad i = 1 \dots s, \quad j = 1 \dots m. \quad (2.40)$$

Будем решать задачу минимизации целевой функции методом сопряженных градиентов. Получим аналитические выражения для компонент вектора градиента:

$$\text{grad}(F) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_m} \right\}^T, \quad (2.41)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_p} = 2 \sum_{i=1}^s \left(w_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta_p} \right) + 2w_c \eta_j, \quad p = 1 \dots m.$$

Запишем аналитические выражения для частных производных изменений обобщенных коэффициентов демпфирования, входящих в выражение (2.40):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta h^{\text{int}}}{\partial \eta_p} &= \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k y_i (v_{i,j} y_i + 2\tilde{v}_{i,j} y_j), \\ \frac{\partial \Delta h^{\text{ext}}}{\partial \eta_p} &= y_p^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Аналогично (2.30) матрица демпфирования редуцированной модели находится следующим образом:

$$\mathbf{H}^* = \left(\mathbf{Y}^{*\top} \right)^{-1} \begin{pmatrix} h_1^* & 0 & \dots \\ 0 & h_2^* & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \left(\mathbf{Y}^* \right)^{-1}. \quad (2.43)$$

2.3 Освобождение от наложенных связей

Пусть имеется скорректированная по результатам испытаний закрепленная конечно-элементная модель L некоторой упруго-массовой конструкции. Модель описывается матрицами жесткости \mathbf{K} и масс \mathbf{M} , имеет n степеней свободы и N узлов. Система уравнений собственных колебаний этой модели имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}\mathbf{Y} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} = 0. \quad (2.44)$$

Ставится задача освободить КЭ-модель от закреплений, при условии, что известны инерционные характеристики свободной конструкции, а именно: масса и массовые моменты инерции относительно некоторой точки, например, центра тяжести. Информации об убранных при начальном закреплении модели степенях свободы либо нет, либо она неактуальна, то есть она не позволяет сделать модель свободной. Последнее имеет место быть, например, когда проводится коррекция динамических свойств закрепленной модели по результатам эксперимента.

2.3.1 Описание способа

Представим, что рассматриваемая модель L находится на воображаемой платформе, к которой она прикреплена всеми узлами, которые были зафиксированы. Эта платформа может перемещаться и поворачиваться как жесткое целое. Положение платформы в глобальной неподвижной системе координат будем определять координатами точки C — вектором $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а ориентация в пространстве задается вектором конечного поворота $\tilde{\mathbf{\Omega}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ (рисунок 2.2). Воображаемая платформа в общем случае находится на упругом основании, заданном тремя линейными и тремя крутильными жесткостями.

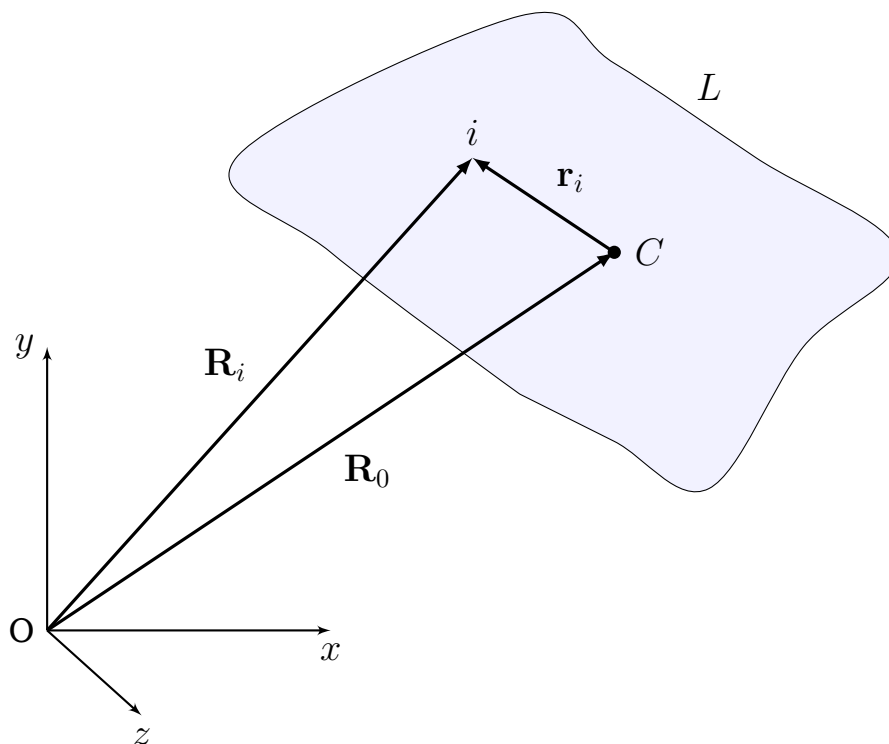


Рисунок 2.2 — Расчетная схема

При ускорении платформы на конструкцию действуют дополнительные силы инерции, обусловленные ускорением каждой точки конструкции за счёт перемещения и поворота платформы, поэтому уравнение движения конструкции (2.44) переписется в следующем виде:

$$\mathbf{K}\mathbf{Y} + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{Y}} + \ddot{\mathbf{Y}}_0) = 0, \quad (2.45)$$

$$\text{где } \mathbf{Y}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \dots \\ \mathbf{R}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^0(x_0, y_0, z_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dots \\ y_N^0(x_0, y_0, z_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{Bmatrix}, \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i,$$

(x_0, y_0, z_0) — линейные смещения платформы,

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — компоненты вектора конечного поворота Ω ,

\mathbf{M}, \mathbf{K} — матрицы масс и жесткости модели соответственно.

В случае малых поворотов матрица λ линейна относительно компонент этого вектора и имеет следующий вид:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Каждый узел КЭ-модели L до деформирования имеет координаты (x_i^0, y_i^0, z_i^0) , $i = 1 \dots N$ в своей системе координат, которая необязательно совпадает с системой координат, выбранной выше, тогда точка C в этой системе имеет координаты (x_0, y_0, z_0) . Так как рассматриваются малые перемещения, то зависимость $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — линейная относительно компонент вектора конечного поворота:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \lambda \mathbf{r}_i^0 = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^0 - x_0 \\ y_i^0 - y_0 \\ z_i^0 - z_0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta x_i^0 - \Delta z_i^0 \omega_2 + \Delta y_i^0 \omega_3 \\ \Delta z_i^0 \omega_1 + y_i^0 - \Delta x_i^0 \omega_3 \\ -\Delta y_i^0 \omega_1 + \Delta x_i^0 \omega_2 + \Delta z_i^0 \end{Bmatrix}, \quad i = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Для определенности пусть каждый узел описывается тремя линейными и тремя угловыми степенями свободы (хотя в общем случае это может быть не так),

тогда выражение (2.45) с учетом (2.47) переписется в следующем виде:

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \\ \ddot{y}_5 \\ \ddot{y}_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 - \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_2 + \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{y}_0 + \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_1 - \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \\ \dots \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_N^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_N^0 \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.48)$$

Перепишем это уравнение в матричном виде:

$$\widehat{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{Y}} + \widehat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Y}} = 0, \quad (2.49)$$

где

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ k_{2,1} & \dots & k_{2,n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

$$\overline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{M}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} & \sum_{j=1}^N m_{1,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{1,\mathbf{G}_{j,6}^+} \\ +\Delta x_j^0 m_{1,\mathbf{G}_{j,2}^-} \\ -\Delta y_j^0 m_{1,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \\ m_{2,1} & \dots & m_{2,n} & \sum_{j=1}^N m_{2,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{2,\mathbf{G}_{j,6}^+} \\ +\Delta x_j^0 m_{2,\mathbf{G}_{j,2}^-} \\ -\Delta y_j^0 m_{2,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} & \sum_{j=1}^N m_{n,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{n,\mathbf{G}_{j,6}^+} \\ +\Delta x_j^0 m_{n,\mathbf{G}_{j,2}^-} \\ -\Delta y_j^0 m_{n,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

При этом элемент $G_{j,i}$ содержит порядковый номер уравнения, соответствующего i -ой степени свободы j -го узла.

Составим уравнения движения платформы. Пусть $c_{1,2,3}$, $\kappa_{1,2,3}$ — линейные и угловые жесткости крепления платформы. Если платформа свободна, эти жесткости равны нулю. Пусть m_0 — общая масса платформы и конечно-элементной модели L , а $J_{1,2,3}$ — соответствующие массовые моменты инерции. Тогда можно записать 6 уравнений движения платформы с КЭ-моделью как жесткого целого:

$$\kappa \cdot \xi + \mu \cdot \ddot{\xi} + \sum m \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = 0, \quad (2.50)$$

где

$$\xi = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (2.49) и (2.50) образуют новую систему уравнений движения с симметричными матрицами размером $n + 6$:

$$\bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{Y}}} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & (\sum m)^T \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.51)$$

Система (2.51) описывает собственные колебания конечно-элементной модели L вместе с платформой. Если модель получена путем закрепления свободной модели \bar{L} , жесткости крепления платформы равны нулю, масса и моменты инерции платформы соответствуют незакрепленной модели, тогда частоты, найденные из решения проблемы (2.51) будут близки к частотам колебаний свободной модели \bar{L} . При этом формы собственных колебаний, найденные из (2.51), также будут близки к формам свободной модели, если их привести к одной системе координат с учетом относительного движения.

Найдем абсолютные координаты согласно (2.47):

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{Y}}_0 = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \\ \tilde{y}_5 \\ \tilde{y}_6 \\ \dots \\ \tilde{y}_{n-3} \\ \tilde{y}_{n-2} \\ \tilde{y}_{n-1} \\ \tilde{y}_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \dots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 - \Delta z_1^0 \omega_2 + \Delta y_1^0 \omega_3 \\ y_0 + \Delta z_1^0 \omega_1 - \Delta x_1^0 \omega_3 \\ z_0 - \Delta y_1^0 \omega_1 + \Delta x_1^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ z_0 - \Delta y_N^0 \omega_1 + \Delta x_N^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим локальные координаты $\bar{\mathbf{Y}}$:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \xi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (2.53)$$

Подставим (2.53) в (2.51):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} \cdot (\tilde{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}}_0) + \hat{\mathbf{M}} \cdot (\ddot{\tilde{\mathbf{Y}}} - \ddot{\bar{\mathbf{Y}}}_0) &= 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \kappa \end{pmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & (\sum m)^\top \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{Y}}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Так как

$$\left(\sum m \right)^\top \ddot{\xi} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}}_0, \quad \left(\sum k \right)^\top \xi = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Y}_0, \quad (2.55)$$

тогда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^\top \\ \mathbf{0} & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{Y}}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \sum m \ddot{\mathbf{Y}}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.56)$$

Введем обозначение:

$$\sum m \cdot \ddot{\mathbf{Y}}_0 = \sum \sum m \cdot \ddot{\xi}. \quad (2.57)$$

Тогда последняя система уравнений переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^\top \\ \mathbf{0} & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \sum \mu & \mu - \sum \sum m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.58)$$

Дополнительные матричные уравнения имеют вид: $\sum k = F_s(\mathbf{K}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, $\sum m = F_s(\mathbf{M}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, $\sum \sum m = F_m(F_s(\mathbf{M})) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Вспомогательные функции, используемые для их построения, равны:

$$F_m(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1,\mathbf{G}_{i,1}} \dots \sum_{i=1}^N a_{1,\mathbf{G}_{i,3}} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{1,\mathbf{G}_{i,4}^+} \\ +\Delta y_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,3}^-} \\ -\Delta z_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,2}} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{1,\mathbf{G}_{i,6}^+} \\ +\Delta x_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,2}^-} \\ -\Delta y_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,1}} \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N a_{6,\mathbf{G}_{i,1}} \dots \sum_{i=1}^N a_{6,\mathbf{G}_{i,3}} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{6,\mathbf{G}_{i,4}^+} \\ +\Delta y_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,3}^-} \\ -\Delta z_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,2}} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{6,\mathbf{G}_{i,6}^+} \\ +\Delta x_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,2}^-} \\ -\Delta y_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,1}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$F_s(\mathbf{A})^\top = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,1},1} \dots \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,3},1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,4},1^+} \\ +\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,3},1^-} \\ -\Delta z_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},1} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,6},1^+} \\ +\Delta x_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},1^-} \\ -\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,1},1} \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,1},n} \dots \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,3},n} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,4},n^+} \\ +\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,3},n^-} \\ -\Delta z_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},n} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,6},n^+} \\ +\Delta x_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},n^-} \\ -\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,1},n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

где $a_{i,j}$ — элементы матрицы \mathbf{A} , $(\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0)$ — компоненты радиус-вектора от центра тяжести до i -го узла недеформированной конструкции.

Для дальнейшего преобразования (2.58) в симметричный вид, воспользуемся линейными комбинациями первых строк этой системы. В соответствии с матрицей \mathbf{G} , для приведения матрицы масс в симметричный вид, получим:

$$\sum_{\mathbf{G}} \left[\mathbf{K} \tilde{\mathbf{Y}} - (\sum k)^\top \xi + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}} = 0 \right], \quad (2.61)$$

$$\sum k \cdot \tilde{\mathbf{Y}} - \sum \sum k \cdot \xi + \sum m \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = 0. \quad (2.62)$$

Тогда из (2.58) получим итоговую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^\top \\ -\sum k & \kappa + \sum \sum k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu - \sum \sum m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.63)$$

Необходимо отметить, что точка C необязательно должна располагаться в центре масс, она может находиться в любом месте конструкции. Пусть точка C находится на расстоянии $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ от центра тяжести, тогда матрица μ может

быть вычислена следующим образом:

$$\mu = m_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & \Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & -\Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & -\Delta_z & \Delta_y & \frac{J_1}{m} + (\Delta^2 - \Delta_x^2) & -\Delta_x \Delta_y & -\Delta_x \Delta_z \\ \Delta_z & 0 & -\Delta_x & -\Delta_x \Delta_y & \frac{J_2}{m} + (\Delta^2 - \Delta_y^2) & -\Delta_y \Delta_z \\ \Delta_y & -\Delta_x & 0 & -\Delta_x \Delta_z & -\Delta_y \Delta_z & \frac{J_3}{m} + (\Delta^2 - \Delta_z^2) \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

где $\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2$.

Положение точки C влияет на относительные координаты каждого узла $(\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0)$ и матрицы k и μ . Более того, модель может быть закреплена не в одной точке, но нужно иметь в виду, что после процедуры освобождения по (2.58) или (2.63) появляется специфическая погрешность, вызванная тем, что мы заменяем множество закрепленных степеней свободы всего шестью степенями свободы вектора ξ , что вносит определенные изменения в деформирование модели, а именно: все закрепленные точки относительно друг друга не деформируются. Другими словами потерянная информация о законах деформирования закрепленных точек не может быть восстановлена, поэтому освобожденная модель будет отличаться от исходной свободной модели.

2.3.2 Тестирование на модельных задачах

Упруго-массовая система

Уравнения (2.51) и (2.63) могут быть использованы в преобразовании любых расчетных моделей, представленных в виде (2.44). Проиллюстрируем их применение на простейшем примере: колебания двух масс на пружинках (рисунок 2.3).

Система уравнений собственных колебаний «Закрепленной системы» имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.65)$$

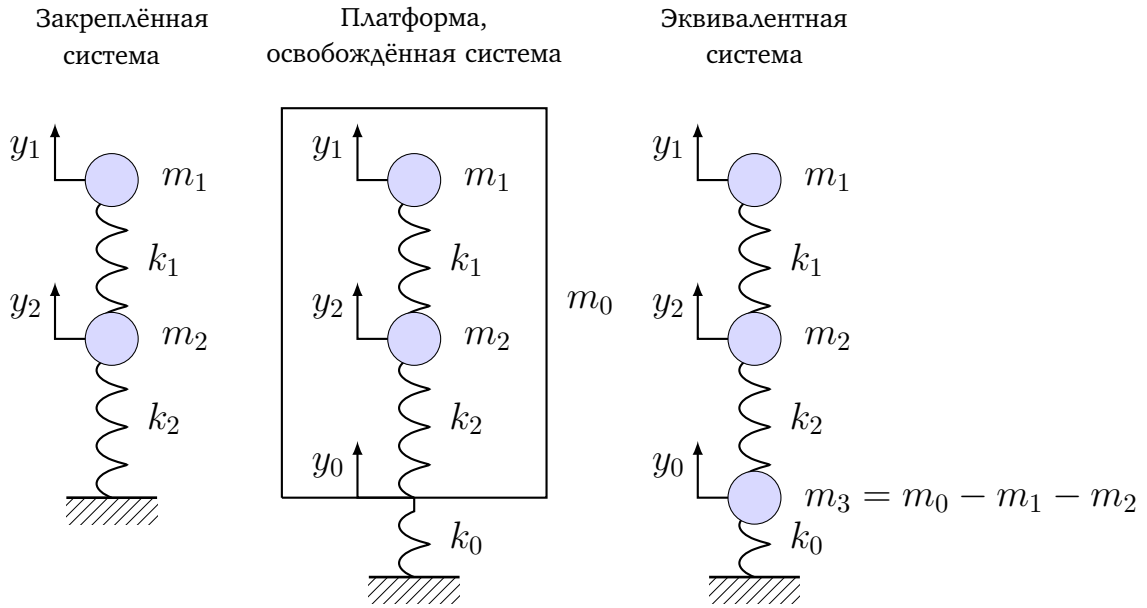


Рисунок 2.3 — Пример преобразования системы масс на пружинках

Преобразование (2.65) с учетом (2.51) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.66)$$

Аналогичное преобразование, но с учетом (2.63), даёт такую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 - m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{y}}_1 \\ \ddot{\tilde{y}}_2 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.67)$$

Система уравнений, описывающих собственные колебания «Эквивалентной системы», имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{y}}_1 \\ \ddot{\tilde{y}}_2 \\ \ddot{\tilde{y}}_3 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.68)$$

Очевидно, что так как $\tilde{y}_3 = y_0$, $m_3 = m_0 - m_1 - m_2$, то система уравнений (2.68) совпадает с системой уравнений (2.67). Кроме того, следует отметить, что частоты собственных колебаний, найденные по уравнениям (2.66), совпадают с частотами по (2.67) и (2.68). При этом собственные формы колебаний, приведенные к глобальной системе координат, совпадают с соответствующими формами, определенными по (2.67) и (2.68). Если в (2.66) – (2.68) положить $k_0 = 0$, получим уравнения колебаний свободной системы.

Балочная модель самолёта

На рисунке 2.4 представлена условная балочная модель самолёта, стоящего на трёх стойках шасси.

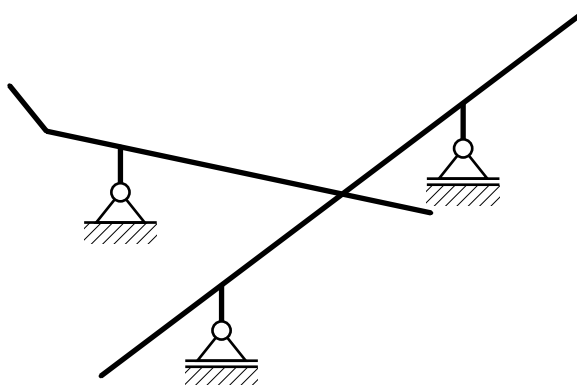


Рисунок 2.4 — Балочная модель самолёта

Балки, имитирующие шасси, закреплены следующим образом: для задней опоры запрещены перемещения в трех направлениях и по углу рыскания самолёта, а для двух передних — только перемещения по вертикали.

В таблице 2.1 приведены первые одиннадцать частот собственных колебаний закрепленной модели, свободной модели и модели, освобождённой от закреплений по предлагаемой методике. В последней колонке показана разница в процентах между частотами свободной и освобождённой модели. Из представленных результатов следует, что частоты практически совпали между собой. Анализ форм колебаний освобождённой модели показал, что они также близки к формам колебаний свободной модели.

Таблица 2.1 — Результаты применения методики освобождения к балочной модели самолёта

№ тона	Частоты собственных колебаний, Гц			Разница, %
	Закрепленная	Свободная	Освобождённая	
1	1.85662	0.00000	0.00003	—
2	4.96444	0.00009	0.00006	
3	6.17794	0.00010	0.00008	
4	6.86614	0.00035	0.00010	
5	13.10533	0.00038	0.00012	

Продолжение таблицы 2.1

6	17.68520	0.00042	0.00014	
7	20.03209	6.45900	6.45896	-0.00053
8	21.06621	6.46460	6.46460	-0.00007
9	23.86814	6.98969	6.98972	0.00042
10	30.36936	21.27473	21.27574	0.00475
11	47.42829	22.40967	22.40978	0.00047

Кроме того, разработанная методика успешно применялась на нескольких конечно-элементных моделях, в том числе составленных из элементов типа Solid. Полученные модели использовались для синтеза глобальной матрицы жесткости составной конструкции, описанной в подразделе [4.2](#)

2.4 Оценка чувствительности методики коррекции к погрешностям в результатах модальных испытаний

Обобщенные характеристики тонов собственных колебаний, определяемые на основе результатов лабораторных и натурных испытаний, подвержены влиянию факторов систематической и случайной природы. Их совокупное воздействие обуславливает наличие погрешностей в модальных параметрах.

В случае операционного модального анализа определяющую роль играет выбор метода расчета, разрешающие уравнения которого составлены на основе гипотез, удовлетворяемых для анализируемого набора данных. Также немаловажным является обеспечение достаточной продолжительности записываемого процесса с целью исключения случайных ошибок измерения на основе свойства эргодичности физических систем.

При использовании методов классического модального анализа существенные погрешности в определении параметров собственных колебаний возникают вследствие случайных ошибок измерения. При этом, как показано в работе [107], величины ошибок в собственных частотах оказываются на порядок ниже, чем погрешности в измеренных амплитудах.

Поэтому, учитывая вышеизложенное, особый практический интерес представляет оценка устойчивости результата коррекции к погрешностям в значениях

частот, определенных экспериментально. Здесь необходимо отметить, что в общем случае сходимость итерационного алгоритма коррекции нелинейно зависит от характеристик исследуемого объекта и набора целевых параметров. Поэтому предлагается использовать метод статистического моделирования для анализа чувствительности методики коррекции к погрешностям целевых значений частот собственных колебаний.

Суть метода состоит во внесении случайных отклонений в исходные значения частот собственных колебаний с последующей оценкой искажений форм колебаний по критерию модального соответствия. Для моделирования ошибок используется генератор случайных чисел, имеющих усеченное нормальное распределение. Концы этого распределения совмещены с предельным шумовым уровнем и соответствуют утроенному среднеквадратическому отклонению. Предлагаемый подход представляется в виде следующего алгоритма:

1. Решение обобщенной проблемы собственных значений для исходной модели с целью определения частот f и форм собственных колебаний Y .
2. Варьирование числа корректируемых тонов собственных колебаний и внесение случайных отклонений $\Delta f \sim N(\mu, \sigma^2)$ в значения частот f : $\tilde{f} = f + \Delta f$.
3. Решение задачи коррекции. Определение максимальной погрешности критерия модального соответствия $\varepsilon_{MAC} = 1 - MAC$ между исходными и полученными формами колебаний \tilde{Y} , используя выражение (2.20).
4. Оценка первого центрального момента $\mu_1(\varepsilon_{MAC})$ в зависимости от числа независимых испытаний с целью получения достоверных оценок математического ожидания и дисперсии.
5. Последовательность шагов 2 – 4 повторяется до тех пор, пока $\mu_1(\varepsilon_{MAC})$, рассчитанный для выборки из последних наблюдений, не стабилизируется с заданной точностью.

Воспользуемся изложенным алгоритмом для анализа чувствительности методики коррекции на примере свободной прямоугольной пластины. Ограничим предельный уровень вносимых ошибок пятью процентами. На рисунке 2.5 показаны зависимости искажений форм колебаний относительно ошибок в целевых частотах, полученные при разном числе p корректируемых тонов собственных колебаний. При этом точки, составляющие эти зависимости, определены путем многократного проведения независимых испытаний на одном уровне шума. Число этих испытаний, которое потребовалось для стабилизации центрального момента

критерия модального соответствия, приведено на рисунке 2.6. Можем видеть, что методика устойчива во всем диапазоне вносимых отклонений. Более того, при увеличении числа тонов кривые стремятся к предельной огибающей. Аналогичный результат был получен и для другой модельной конструкции — балочной.

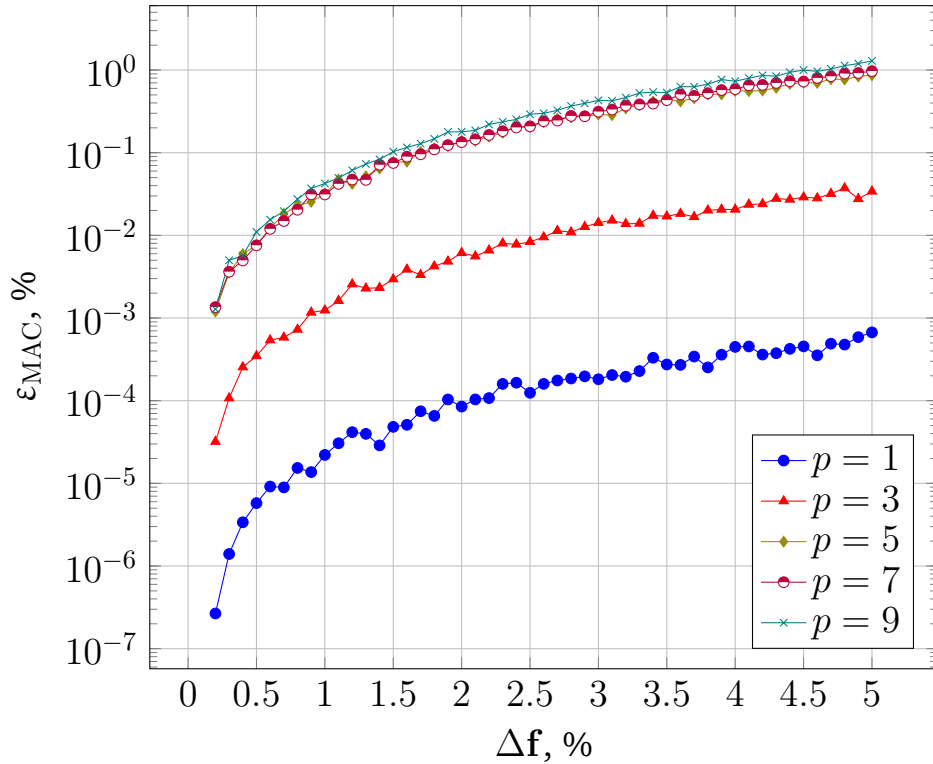


Рисунок 2.5 — Погрешность определения форм колебаний пластины

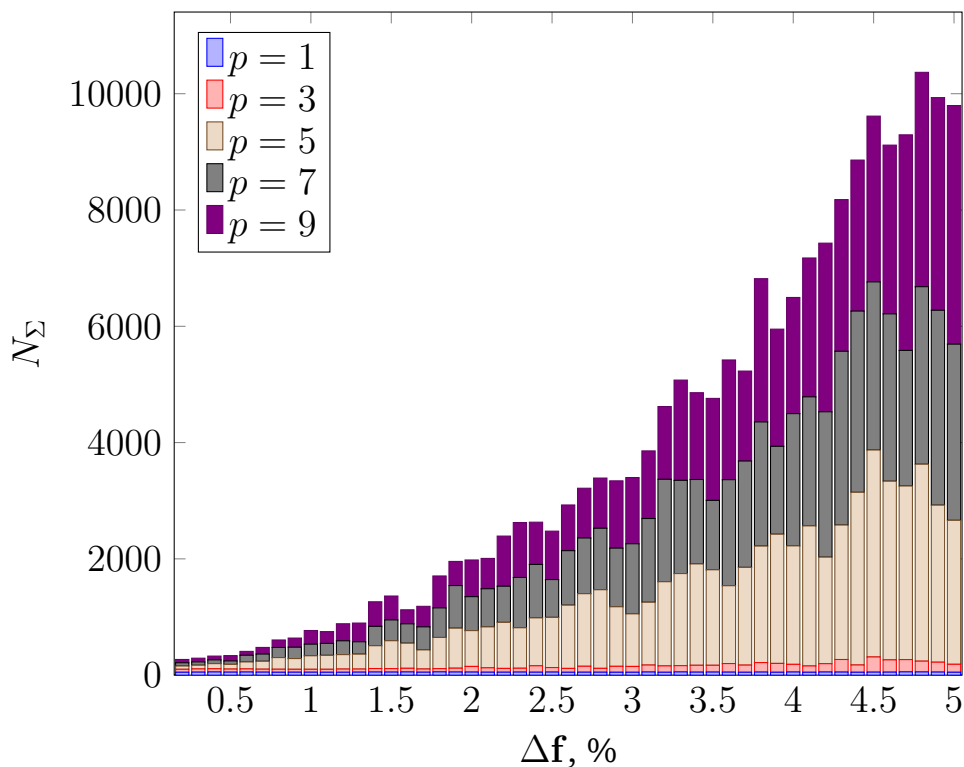


Рисунок 2.6 — Число независимых испытаний пластины

Проведем анализ чувствительности на примере тестовой модели пилотируемого космического аппарата (ТКА) Шэньчжоу [108], который состоит из трех модулей. Конечно-элементная модель ТКА, имеющая пятьдесят тысяч степеней свободы, приведена на рисунке 2.7.

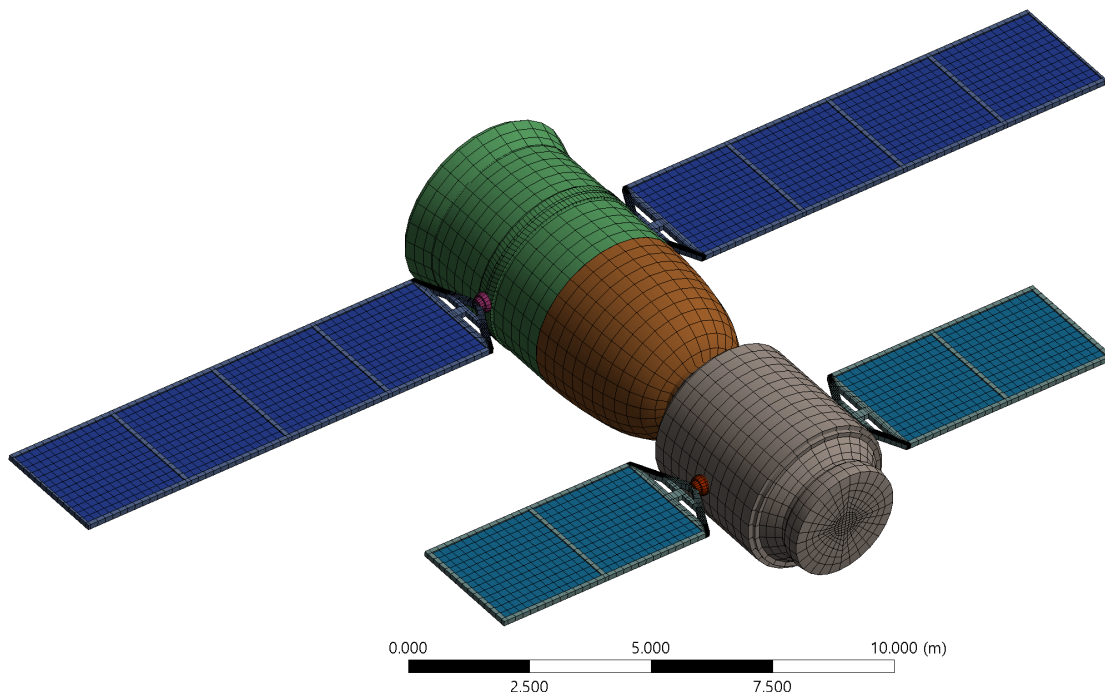


Рисунок 2.7 — Конечно-элементная модель ТКА

Результаты анализа подтверждают предыдущие наблюдения. Кривые искажений форм собственных колебаний (рисунок 2.8) стремятся к предельной огибающей и имеют устойчивый характер.

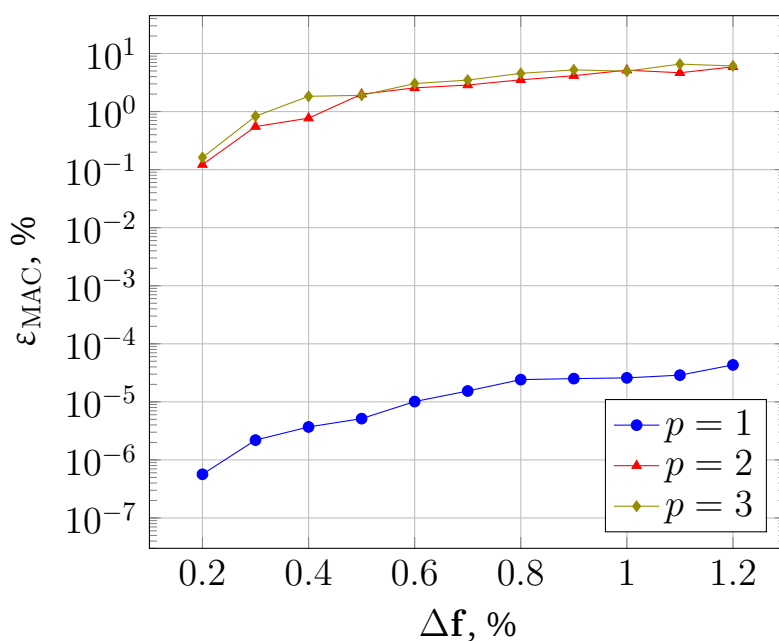


Рисунок 2.8 — Погрешность определения форм колебаний ТКА

По сравнению с результатами для пластины, наблюдается рост числа независимых испытаний (рисунок 2.9), соответствующих одному шумовому уровню и числу корректируемых тонов, вследствие более высокой размерности модели. Заметим, что полученные значения погрешностей могут использоваться для конструкций схожей компоновки с целью оценки влияния ошибок экспериментально определенных частот.

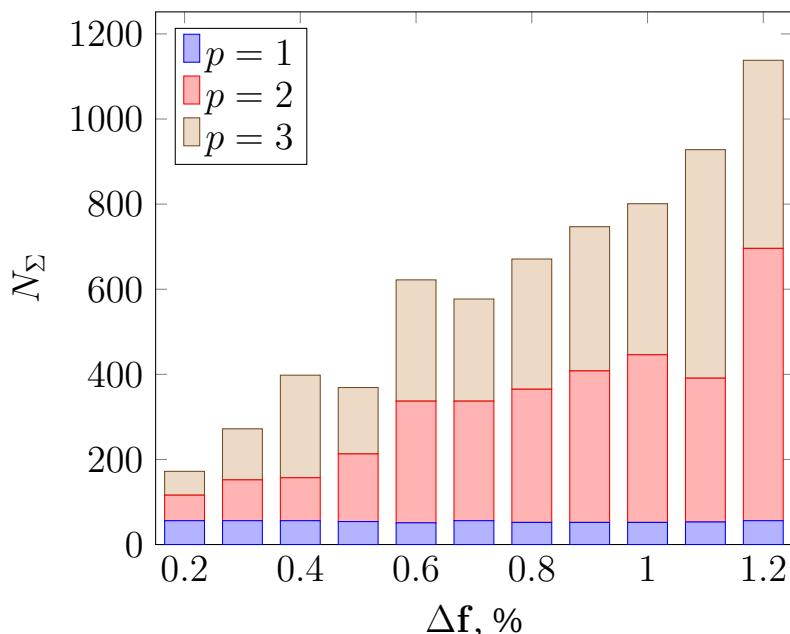


Рисунок 2.9 — Число независимых испытаний ТКА

Также построено распределение изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы при одновременной коррекции по трем тонам собственных колебаний (рисунок 2.10).

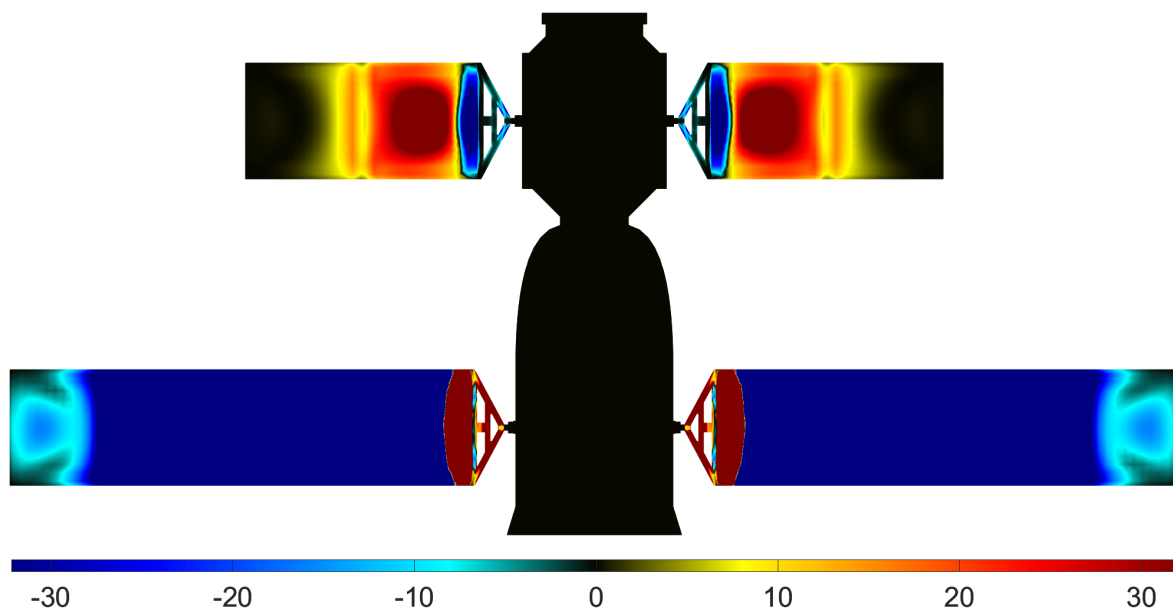


Рисунок 2.10 — Распределение изменений узловых жесткостей ТКА

Корректируемые тона собственных колебаний характеризуются существенными смещениями солнечных панелей, в то время как орбитальный, возвращаемый и командно-сервисный модули остаются неподвижными. Это соотносится с характером распределения изменений узловых жесткостей на рисунке 2.10. Красный цвет на рисунке соответствует областям повышения исходной жесткости, а синий — понижения. Черная цветовая гамма определяет области, жесткость которых осталась неизменной в ходе коррекции.

Отметим отдельно, что формы собственных колебаний, не подвергнутые коррекции, остаются согласованными с их исходным аналогами по критерию модального соответствия (рисунок 2.11).

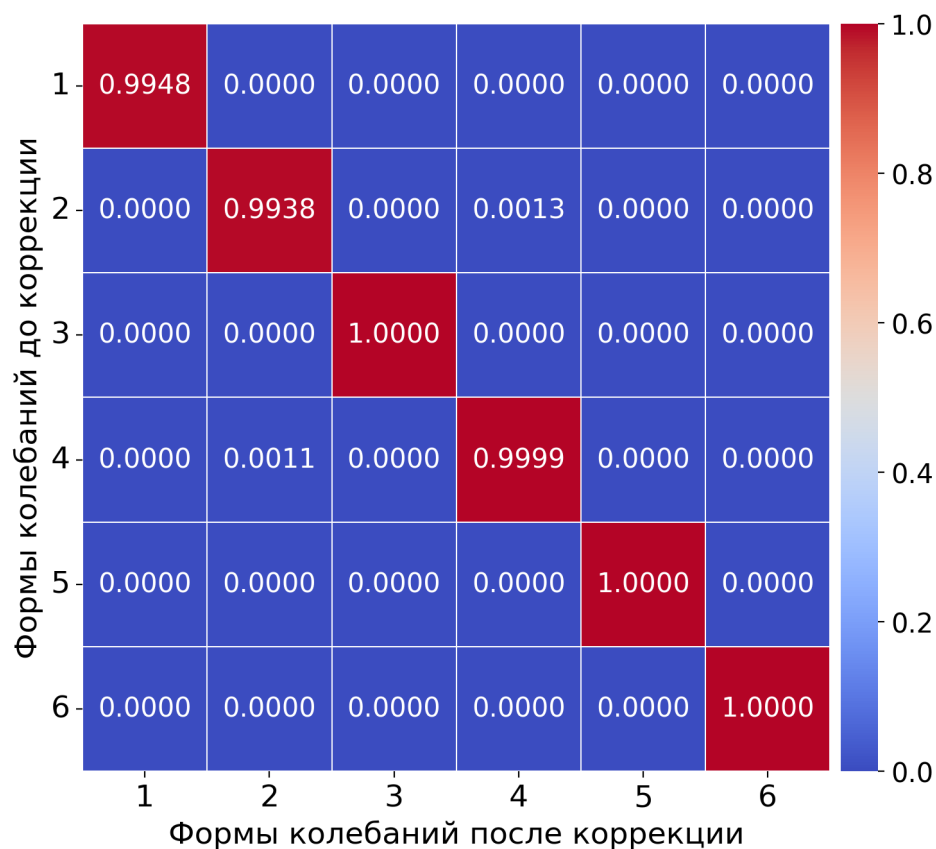


Рисунок 2.11 — Критерий модального соответствия между формами колебаний исходной и скорректированной модели ТКА

2.5 Определение модальных характеристик крупногабаритных конструкций

Модальные испытания крупногабаритных трансформируемых конструкций (КТК) сопряжены с определенными трудностями. Отметим основные из них. Поскольку эти конструкции могут иметь большую протяженность (порядка ста

метров), то для их испытаний необходимо помещение соответствующих размеров. Кроме того, для выделения собственных тонов колебаний (реализация режима фазового резонанса) протяженной конструкции необходима система возбуждения колебаний с большим числом силовозбудителей, управление которой является достаточно сложной задачей. КТК не рассчитаны на эксплуатацию под воздействием гравитации, поэтому для проведения испытаний необходима многоканальная система компенсации веса, которая не должна исказить динамические характеристики объекта испытаний. КТК имеют, как правило, низкие (до одной десятой доли герца) собственные частоты упругих колебаний, поэтому затруднительны измерения колебаний датчиками ускорений, обычно используемыми в модальных испытаниях. При измерении перемещений требуется база для отсчета, что усложняет процесс испытаний. И, наконец, на модальные характеристики тонов колебаний с низкими частотами повышенное влияние оказывает воздушная среда.

Решение отмеченных проблем видится в проведении испытаний таких конструкций по частям (рисунок 2.12), которые имеют меньшие габариты и значительно более высокие частоты собственных колебаний.

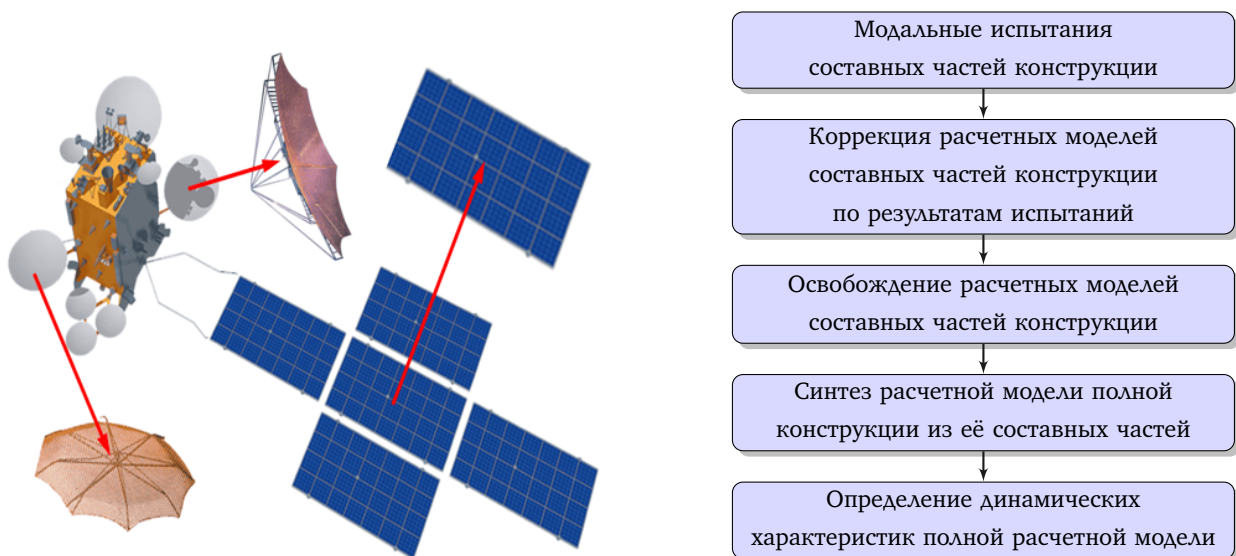


Рисунок 2.12 — Схема методики верификации расчетных моделей крупногабаритных трансформируемых конструкций

Продемонстрируем работу этого подхода на примере тестового космического аппарата из подраздела 2.4. Заметим, что низшие формы собственных колебаний, соответствующие упругим движениям конструкции, происходят с преимущественным деформированием панелей солнечных батарей, размещенных на

орбитальном и командно-сервисном модулях. Поэтому, с целью исключения конструктивно подобных движений, упростим модель (рисунок 2.7), оставив только орбитальный модуль и связанные с ним солнечные батареи. Полученная конечно-элементная модель, обладающая девятнадцатью тысячами степеней свободы, приведена на рисунке 2.13.

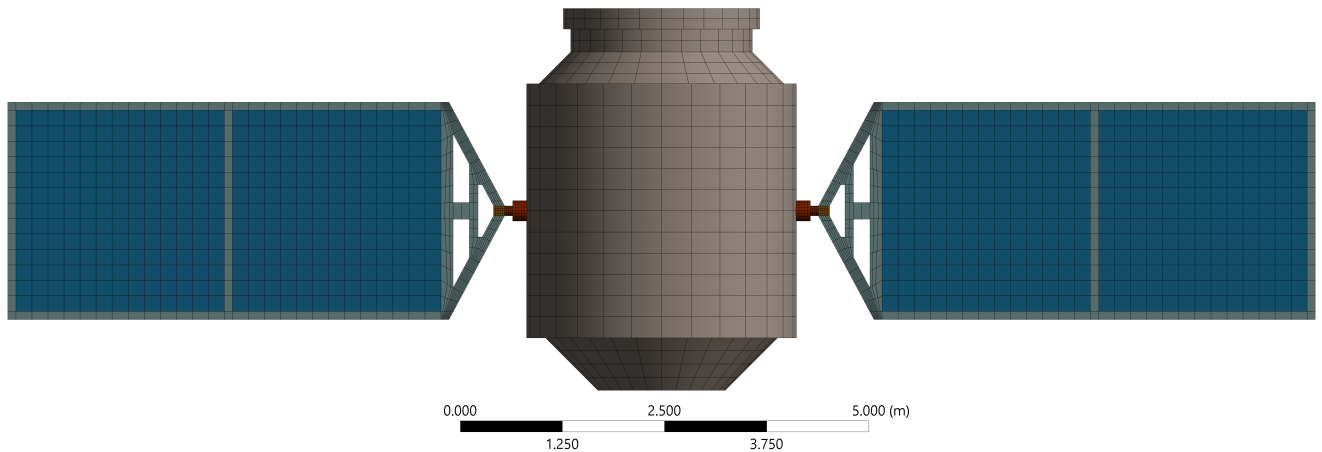


Рисунок 2.13 — Упрощенная конечно-элементная модель тестового космического аппарата

Ключевым элементом корректности решения задачи синтеза является обеспечение наиболее полного описания жесткостных и массовых характеристик узлов сопряжения составных частей: орбитального модуля и панелей солнечных батарей. При детальном рассмотрении это требование оказывается противоречивым. С одной стороны, при жестком закреплении мест стыковки происходит безвозвратная потеря информации о стыковочных степенях свободы. С другой стороны, при проведении испытаний упруго-вывешенной конструкции как составной части, реализуются формы колебаний без существенного деформирования интерфейсных областей. Для снятия этого противоречия предлагается проводить модальные испытания составных частей с использованием вспомогательных устройств, обладающих известными жесткостными и инерционными характеристиками. В этом случае устройства, будучи прикрепленными к интерфейсам, обеспечивают их качественное описание. В предельном случае, когда жесткостные характеристики вспомогательного объекта равны нулю, это соответствует размещению массы. Причем чем больше масса, тем сильнее оказываются деформации в рассматриваемой области — более полно раскрываются жесткостные характеристики. После выполнения коррекции дополнительные устройства исключаются из расчетных моделей.

Кроме того, имея в виду достижение физической согласованности скорректированных моделей, предлагается использовать результаты нескольких экспериментов при различных условиях закрепления одной составной части. Так, в рассматриваемом примере, коррекция орбитального модуля производится по частотам свободных колебаний и частотам колебаний (рисунок 2.14), которые реализуется при прикреплении больших масс ($\approx 30\%$ от массы конструкции) к узлам стыковки. Расчетные модели панелей солнечных батарей вблизи мест стыковки дополняются невесомыми пластинами, свободные ребра которых закреплены жестко. Это позволяет проводить одновременную коррекцию моделей составных частей с различными граничными условиями.

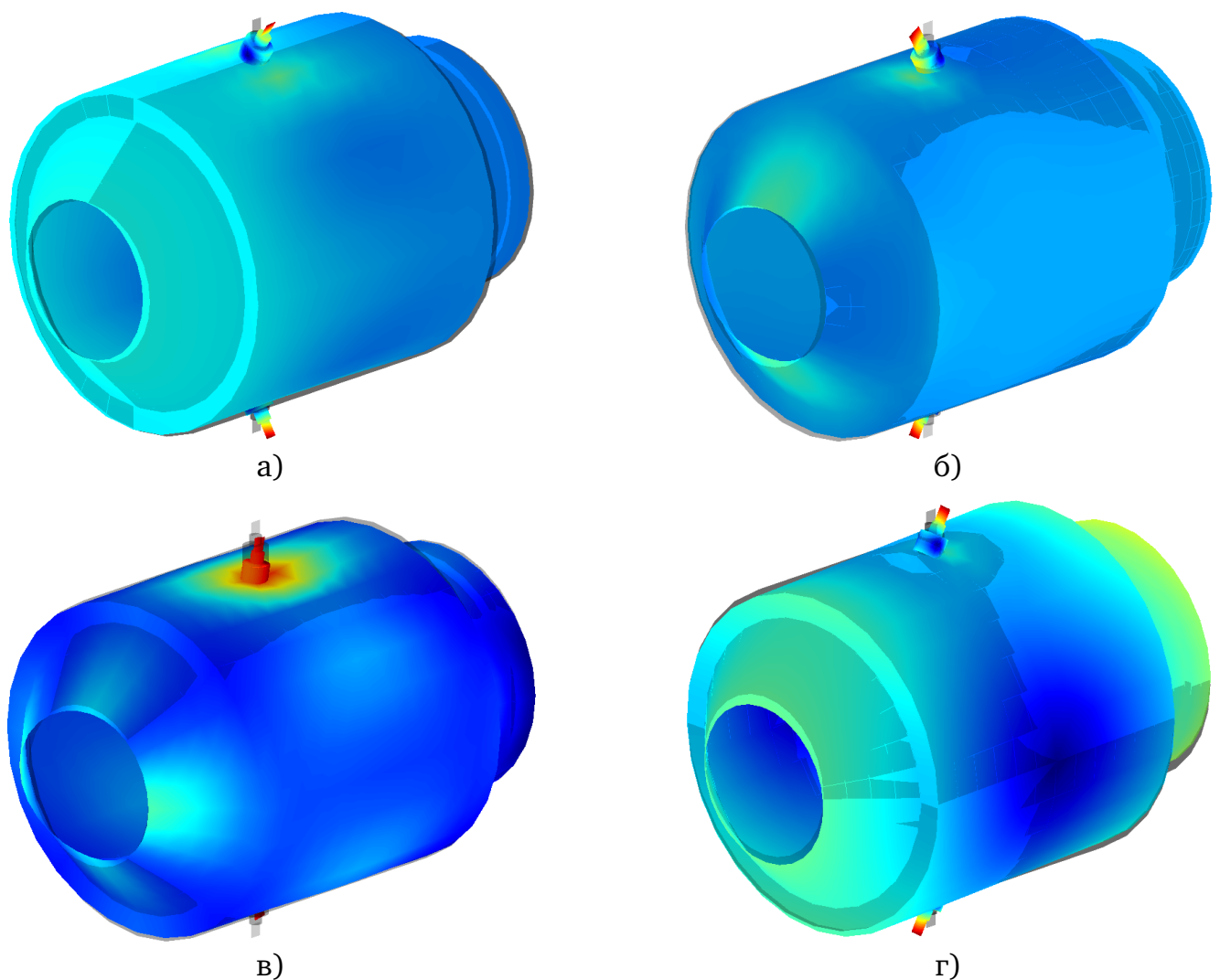


Рисунок 2.14 — Первые четыре упругие формы колебаний орбитального модуля с прикрепленными к узлам стыковки массами (а – г)

Примем в качестве целевых значений частоты собственных колебаний исходных моделей, сведенные в таблице 2.2. Для имитации погрешностей моделирования изменим модули упругости конструктивных элементов составных частей.

Так, жесткость рамы панелей солнечных батарей, орбитального модуля и соединительных элементов была понижена на 10 % в то время, как модуль упругости солнечных батарей повышен на 5 %.

Таблица 2.2 — Целевые значения для коррекции составных частей космического аппарата

№ тона	Частоты собственных колебаний, Гц			
	Орбитальный модуль		Панели солнечных батарей	
	Свободный с прикрепленной массой	Свободный	Закрепленные	Свободные
1	—	—	1.591	—
2			5.193	
3			6.841	
4			10.070	
5			22.028	
6			26.398	
7	8.221	15.721	42.179	11.810
8	8.477	15.721	42.613	13.770
9	8.660	21.300	46.050	29.339
10	8.863	21.303	58.393	33.784
11	9.095	24.132	67.767	42.796
12	10.598	24.498	68.897	51.135
13	10.600	24.498	85.064	58.768
14	11.178	31.483	88.711	61.625
15	15.730	31.483	93.117	72.682

Проведем коррекцию составных частей космического аппарата по девяти частотам собственных колебаний, используя одновременно данные двух виртуальных экспериментов. После этого выполним ассемблирование скорректированных моделей. Полученные погрешности в частотах синтезированной модели сведены в таблице 2.3. Дополнительно к этим результатам отметим, что при коррекции

составных частей только по данным одного виртуального эксперимента, максимальная погрешность в частотах синтезированной модели составила 6.34 %. Такое значительное расхождение свидетельствует в пользу необходимости учета результатов нескольких испытаний при коррекции.

Таблица 2.3 — Результаты коррекции и сборки составных частей тестовой модели космического аппарата

№ тона	Погрешность в частотах собственных колебаний, %			
	Без коррекции	Коррекция по девяти частотам		
		Панелей	Модуля	Панелей и модуля
7	-4.689	-2.120	-2.756	-0.021
8	-4.678	-2.078	-2.782	-0.018
9	-5.121	-4.447	-0.674	0.100
10	-5.040	-4.760	-0.354	-0.028
11	-5.040	-4.760	-0.357	-0.032
12	-5.121	-4.443	-0.687	0.091
13	-4.102	-0.966	-3.161	0.011
14	-4.112	-0.999	-3.135	0.016
15	-3.303	-0.234	-3.066	-0.006
16	-3.303	-0.234	-3.066	-0.005

Распределение изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы для орбитального модуля и панелей солнечных батарей показано на рисунках 2.15а и 2.15б соответственно. При этом минимальный критерий модального соответствия, связывающий формы собственных колебаний синтезированной модели до и после коррекции, составил 0.9996.

Сходимость процедуры коррекции показана на рисунке 2.16. Она оценивалась посредством частотного критерия $\|\alpha\|_{\max}$:

$$\alpha_{i,j} = \left| 1 - \frac{f_{i,j}^*}{f_{i,j}} \right|, \quad i = 1 \dots s, \quad j = 1 \dots r, \quad (2.69)$$

где s — число корректируемых тонов колебаний, r — число испытаний (моделей) для коррекции, f и f^* — текущие и целевые значения частот.

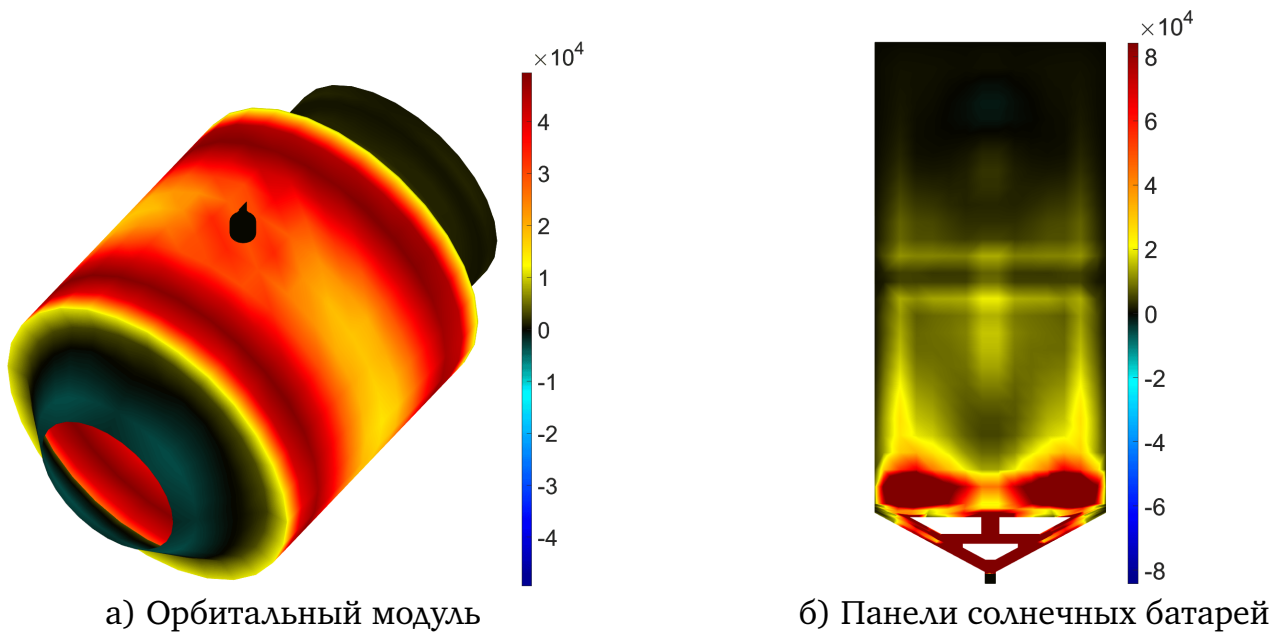


Рисунок 2.15 — Распределение изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы при коррекции моделей составных частей по девяти частотам собственных колебаний

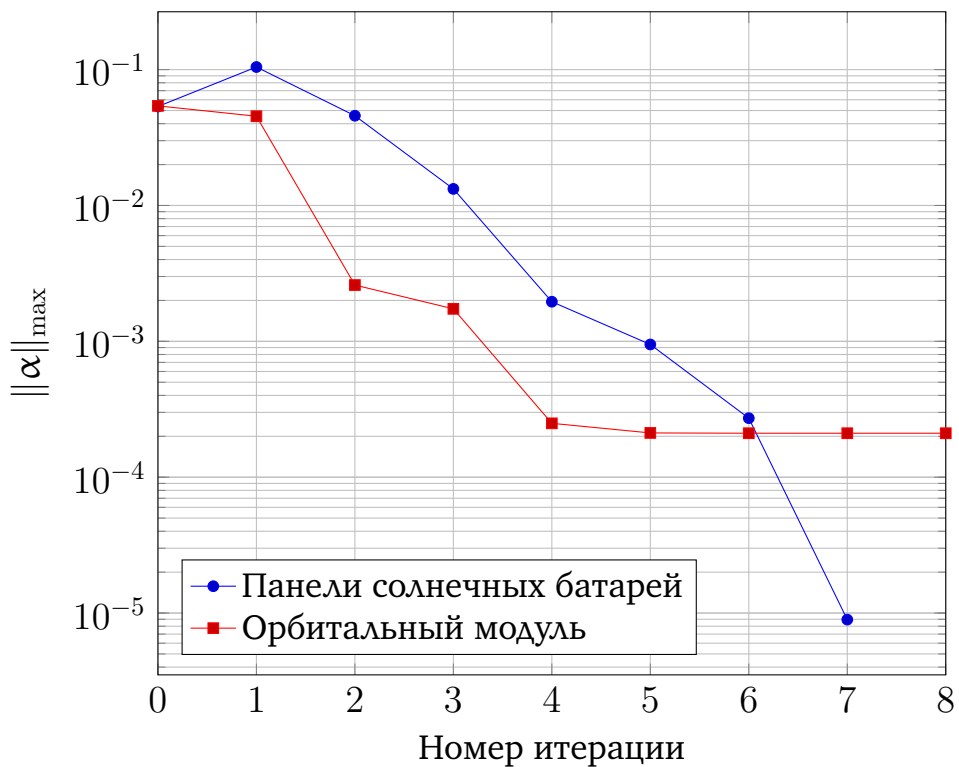


Рисунок 2.16 — Сходимость алгоритма коррекции при уточнении моделей панелей солнечных батарей и орбитального модуля

Время одновременной коррекции орбитального модуля по двум экспериментам составило 27 минут, а время коррекции панелей солнечных батарей — 2 минуты.

2.6 Программная реализация методик коррекции, освобождения и синтеза

По результатам проведенных исследований был разработан программный комплекс, реализующий методики коррекции, освобождения и синтеза конечно-элементных моделей. Конфигурирование и управление расчетом осуществляется с помощью последовательностей команд, размещенных в текстовых файлах. С целью обеспечения возможности параметризации исследований реализован загрузчик, позволяющий переключать управляющие файлы расчета. Ход работы программ отображается на экране и сохраняется в виде файлов журналов событий («лог-файлах»).

Исходными данными для расчета являются конечно-элементные модели, представленные в виде: координат узлов; данных разметки; матриц жесткости, масс и демпфирования. Для учета геометрических особенностей конструкций при решении задач коррекции могут использоваться данные плоскостей симметрии, а также координаты узлов, определяющих конструктивно-подобные элементы и области коррекции. Последнее особенно актуально при наличии информации об элементах конструкций, характеризующихся наибольшей неопределенностью в упругих и диссипативных характеристиках — они подлежат первоочередной коррекции. Модуль коррекции допускает множественную загрузку моделей для проведения одновременной коррекции по результатам нескольких экспериментов.

Программная платформа не учитывает особенностей построения расчетных моделей, присущих различным конечно-элементным пакетам — является универсальной. Это достигается за счет использования единого бинарного формата, обеспечивающего компактное хранение и оперативную загрузку данных моделей. Для выгрузки моделей из конечно-элементного пакета Ansys используются макросы на языке APDL. Конвертация моделей, полученных в конечно-элементном комплексе Femap, проводится посредством авторской утилиты, размещенной на платформе github [109].

Формирование глобальной модели конструкции происходит путем ассемблирования КЭ-моделей подконструкций после коррекции и освобождения по степеням свободы узлов стыковки. Полученные данные: модифицированные модели, данные о корректирующих элементах, частоты и формы колебаний, используются для визуализации и оценки достоверности результатов коррекции, освобождения и ассемблирования.

Выводы по главе 2

На основании исследований, изложенных в данной главе, получены следующие основные результаты:

1. Разработана методика коррекции упругих и восстановления диссипативных характеристик, состоящая в дополнении исходных конечно-элементных моделей внутренними и внешними корректирующими элементами. Параметры этих элементов являются неизвестными, разыскиваемыми в ходе решения задачи оптимизации по целевым значениям из результатов экспериментального модального анализа. Начальное приближение для коррекции диссипативных характеристик конечно-элементных моделей формируется на основе гипотезы Е. С. Сорокина.
2. Показана сходимость и устойчивость алгоритма коррекции к погрешностям в целевых значениях частот собственных колебаний. Критерием оценки сходимости являлась мера искажения форм собственных колебаний по критерию модального соответствия.
3. Создана методика освобождения расчетных моделей от связей, наложенных для проведения модальных испытаний. Суть подхода заключается в том, что матрицы жесткости и масс дополняются степенями свободы, которые отвечают за перемещения и повороты модели как жесткого целого. Методика протестирована на примере упруго-массовой системы и балочной модели самолёта.
4. Развита методика синтеза глобальной расчетной модели конструкции по результатам испытаний её составных частей. Разработаны рекомендации по выбору граничных условий при проведении экспериментального модального анализа. На примере тестовой модели космического аппарата показано, что использование результатов нескольких экспериментов с разными граничными условиями для каждой из составных частей, ведет к уточнению частот собственных колебаний синтезированной модели.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [106; 110–119]. Способ определения частот и форм собственных колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями зарегистрирован как патент на изобретение (приложение Б).

Глава 3 Результаты модальных испытаний как исходные данные для коррекции расчетных моделей конструкций

В настоящей главе развиваются методы классического и операционного модального анализа, позволяющие получать достоверные оценки динамических параметров для коррекции. Составляются программные реализации для представления и обработки результатов натурных и лабораторных испытаний. Разрабатываемые подходы используются для решения практических задач.

3.1 Методика определения модальных параметров по результатам экспериментального модального анализа

С целью обеспечения возможности эффективного расчета обобщенных характеристик по результатам модальных испытаний, на языке программирования C# разработана программная реализация GenCalc, позволяющая посредством графического интерфейса (рисунок 3.1) гибко менять параметры расчета и исследовать зависимости получаемых характеристик несколькими способами одновременно.

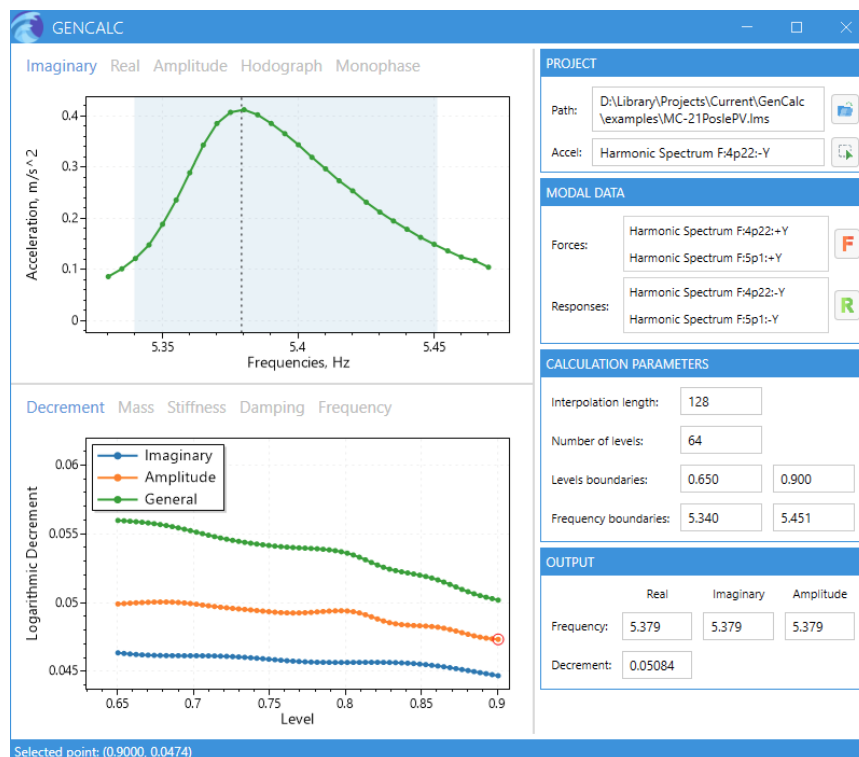


Рисунок 3.1 — Графический интерфейс программы GenCalc

Более того, для оценки качества выделения тона колебаний в программе заложена возможность построения параметра монофазности (рисунок 3.2) и частотного годографа (рисунок 3.3) колебательной системы.

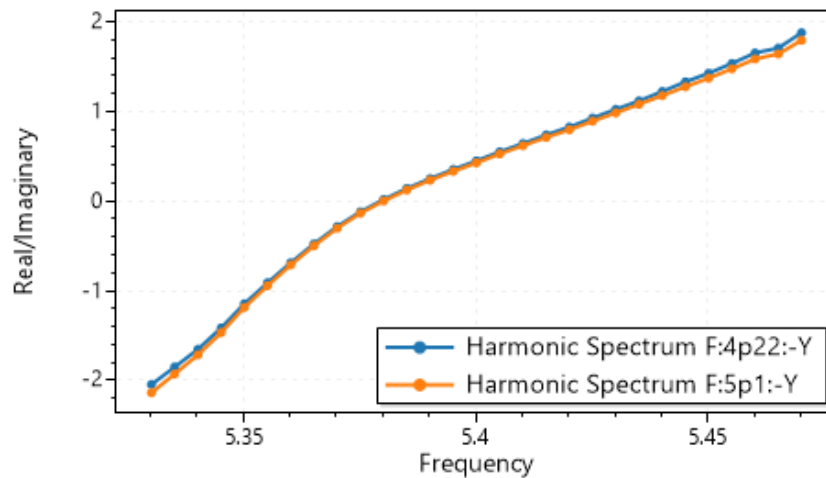


Рисунок 3.2 — Параметр монофазности по двум каналам возбуждения при колебаниях авиационного изделия тону вертикального изгиба фюзеляжа

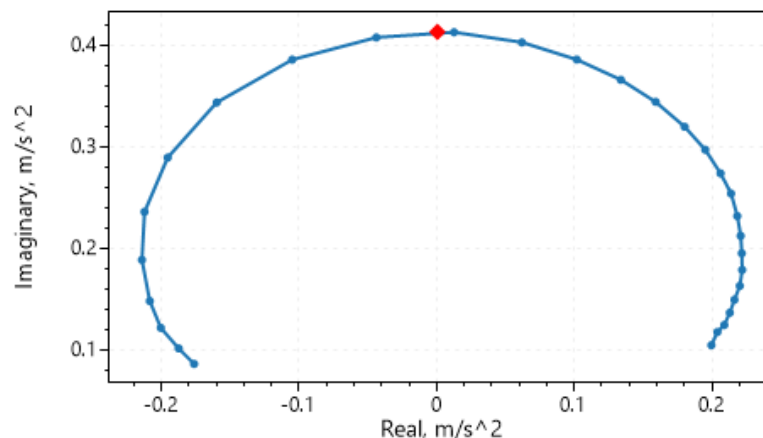


Рисунок 3.3 — Частотный годограф в точке отклика авиационного изделия при колебаниях по тону вертикального изгиба фюзеляжа

Необходимо отметить, что составленная программная реализация обеспечивает прямое взаимодействие с результатами модальных испытаний, которые были получены с использованием комплекса Simcenter Testlab. Это достигается за счет использования программного интерфейса приложения Simcenter Testlab Automation (API).

В рамках предлагаемого подхода, для расчетного диапазона необходимо задать минимальный и максимальный уровень амплитуды, число уровней, а также число точек для интерполяции сигнала отклика на каждом уровне. Кроме того, необходимо выбрать частоты амплитудного и фазового резонанса.

Программный функционал позволяет определять логарифмической декремент колебаний системы по каждому тону, используя четыре подхода:

1. по ширине резонансного пика мнимой составляющей сигнала отклика;
2. по ширине резонансного пика амплитуды колебаний;
3. по наклону реальной составляющей сигнала отклика;
4. посредством точного решения (3.2) системы нелинейных уравнений третьего порядка (3.1) относительно обобщенных характеристик.

$$\begin{aligned}
 & a^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^8 - 3a^2 c \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^6 + a \sum_{k=1}^M [y_k^4 \omega_k^4 (3c^2 + h^2) - Q_k^2 y_k^2 \omega_k^4] + \\
 & \quad + c \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 \omega_k^2 - c^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 - ch^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 = 0, \\
 & a^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^8 - 3a^2 c \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^6 + a \sum_{k=1}^M [y_k^4 \omega_k^4 (3c^2 + h^2) - Q_k^2 y_k^2 \omega_k^4] + \quad (3.1) \\
 & \quad + c \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 - c^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 - ch^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 = 0, \\
 & a^2 h \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^4 - 2ach \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 - h \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 + c^2 h \sum_{k=1}^M y_k^4 + h^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 = 0.
 \end{aligned}$$

Эту систему уравнений удается решить точно [120]:

$$\begin{aligned}
 & a = b^{1/2}, \\
 & c = -\frac{bd_1 + d_3}{d_2 b^{1/2}}, \\
 & h = \left[\left(\sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 - c^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 - a^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^4 + 2ac \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 \right) / \sum_{k=1}^M y_k^4 \right]^{1/2}, \\
 & f_1 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_j^4 (\omega_j^4 - \omega_i^4), \quad d_1 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_i^4 (\omega_i^4 - \omega_j^4), \\
 & f_2 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_j^2 (\omega_j^2 - \omega_i^2), \quad d_2 = 2 \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_i^2 (\omega_j^2 - \omega_i^2), \\
 & d_3 = \sum_{i,j=1}^M y_i^2 y_j^2 \omega_j^2 (y_i^2 Q_j^2 - y_j^2 Q_i^2), \quad f_3 = \sum_{i,j=1}^M y_i^2 y_j^2 \omega_i^4 (y_i^2 Q_j^2 - y_j^2 Q_i^2), \\
 & b = \frac{f_2 d_3 - f_3 d_2}{f_1 d_2 - f_2 d_1}.
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае подхода 4 будем дополнительно определять обобщенные характеристики: коэффициенты демпфирования, жесткости и массы, и представлять их в виде графических зависимостей от уровня амплитуд.

Для выбранной точки отклика конструкции, которая, как правило, располагается вблизи точки возбуждения, выберем некоторый диапазон значений в окрестности резонансной частоты для которого будет проводиться расчет по каждому из подходов. Заметим, что логарифмический декремент изменяется по мере изменения амплитуды воздействия, поэтому, с целью определения характера этого изменения и его предельных значений, предлагается строить графические зависимости определяемых характеристик от амплитуды отклика.

Рассмотрим каждый из расчетных способов в отдельности. Для вычисления логарифмического декремента колебаний δ_I по ширине резонансного пика мнимой составляющей (№ 1) воспользуемся следующей формулой [121]:

$$\delta_I = \pi \Delta \bar{f} \sqrt{\frac{\text{Im } \bar{a}}{1 - \text{Im } \bar{a}}}, \quad (3.3)$$

где $\text{Im } \bar{a} = \frac{\text{Im } a}{\text{Im } a_{\max}}$ — относительное значение мнимой составляющей сигнала, $\Delta \bar{f} = \frac{\Delta f}{f_{\text{Im}}}$, $\Delta f = f_2 - f_1$ — разность характерных частот амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). Значения f_1 и f_2 равны абсциссам где ординаты АЧХ достигают (в долях от максимальной амплитуды) характерное значение уровня.

Логарифмический декремент колебаний δ_{II} по ширине резонансного пика амплитуды колебаний (№ 2) рассчитывается следующим образом [121]:

$$\delta_{II} = \pi \Delta \bar{f} \frac{\bar{A}}{\sqrt{1 - \bar{A}^2}}, \quad (3.4)$$

где $\bar{A} = \frac{A}{A_{\max}}$ — относительная амплитуда уровня, $A = \sqrt{(\text{Re } a)^2 + (\text{Im } a)^2}$.

Расчет δ_{III} по наклону реальной составляющей (№ 3) производится по следующей формуле [121]:

$$\delta_{III} = \pi \Delta \bar{f}, \quad (3.5)$$

где значения f_1 и f_2 равны абсциссам тех точек, где ординаты АЧХ достигают экстремальных значений. Для определения этих значений предлагается использовать первую производную интерполированной действительной составляющей.

Для определения обобщенных характеристик конструкции из решения системы нелинейных уравнений (3.1) необходимо произвести расчет обобщенной

силы Q . Для этого воспользуемся выражением:

$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^p |F_i^{(k)}| \cdot \text{Im } a_i^{(k)}}{\text{Im } a_i^{\text{ref}}}, \quad i = 1 \dots n, \quad (3.6)$$

где n — число отсчетов сигнала, $|F_i^{(k)}|$ — амплитуда воздействия в k -ой точке, $\text{Im } a_i^{(k)}$ — мнимая составляющая отклика сигнала k -ой точке, $\text{Im } a_i^{\text{ref}}$ — мнимая составляющая отклика сигнала в опорной точке.

Отметим, что расчеты по каждому из способов (3.2), (3.3) – (3.5) являются независимыми, поэтому осуществляются параллельно. Такой подход позволяет существенно ускорить производительность вычислений при высокой дискретизации сигнала отклика по уровню амплитуды.

По результатам вычислений было замечено, что изменение длины интерполяции на каждом расчетном уровне вне зависимости от расчетного подхода слабо влияет на результирующие значения обобщенных характеристик.

Также отметим, что частота собственных колебаний, определенная по обобщенным характеристикам в рамках четвертого способа, претерпевает малые изменения по мере роста относительного значения расчетного уровня (рисунок 3.4). Это предположительно связано с тем, что погрешности определения обобщенных масс и жесткостей являются равнозначными, поэтому оценка частоты собственных колебаний получается практически несмещенной.

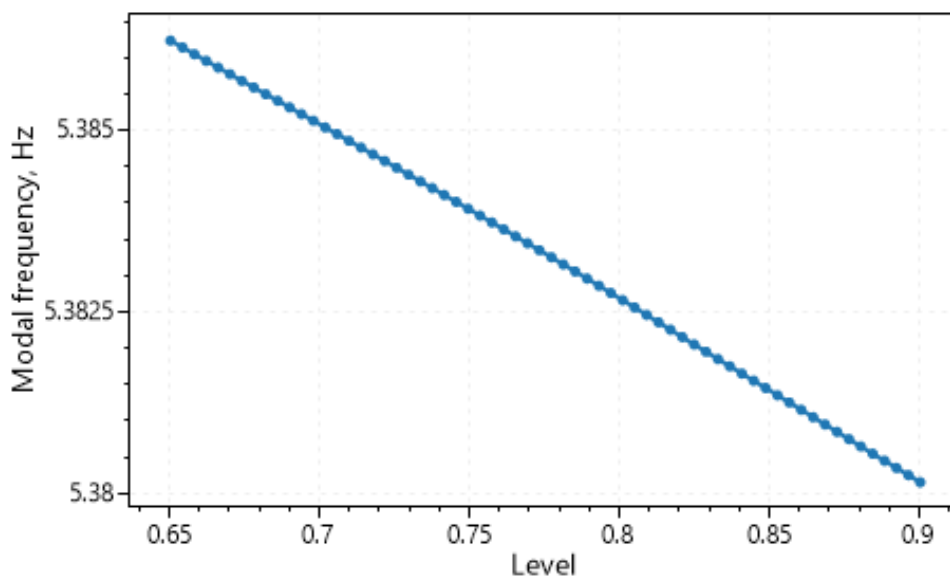


Рисунок 3.4 — Пример определения частоты собственных колебаний авиационного изделия по обобщенным характеристикам

3.2 Диагностика дефектов конструкций по результатам испытаний

В конструкциях многих технических изделий имеются зазоры (люфты), которые можно условно разделить на два вида. Одни из них — зазоры в соединениях составных частей конструкций — вводятся для обеспечения нормального функционирования этих соединений. Величины таких зазоров обычно нормируются. Другой вид — люфты, возникающие в процессе эксплуатации. Поскольку нормированные зазоры увеличиваются, как правило, в процессе эксплуатации, то оба этих вида могут привести к повышенной нагруженности и износу деталей, изменению динамических характеристик и ухудшению технического состояния изделий. Поэтому зазоры, конечно же, контролируются. Так как большинство технических изделий подвергается вибрационным испытаниям (прочностным, модальным, испытаниям на виброустойчивость), то представляется целесообразной разработка методики диагностики зазоров в этих испытаниях.

Техническая вибродиагностика машинного оборудования нашла широкое распространение в машиностроении для контроля механических передач, соединительных муфт и подшипников [122–126]. Эти вращающиеся элементы машин при наличии дисбалансов, люфтов, несоосности и изгибов валов генерируют механические колебания. Колебания, регистрируемые на корпусных деталях машин как вибрации, содержат информацию о динамических процессах, которые происходят в работающей машине. Из этого объема информации необходимо выделить такие данные, на основании которых можно идентифицировать дефекты машин и отслеживать развитие этих дефектов [127–129].

Методы вибродиагностики технических изделий по результатам испытаний разделяются на три группы. К первой из групп относятся методы обнаружения дефектов по изменению параметров собственных тонов колебаний [130–136]. Необходимо отметить, что нередко даже относительно большие повреждения слабо сказываются на изменении основных модальных параметров: частот и форм собственных колебаний. Более того, однозначная идентификация дефекта затруднена тем, что модальные параметры являются интегральными характеристиками, а расположение и величина дефекта — дифференциальными [137].

Методы контроля дефектов по параметрам распространения упругих волн образуют вторую группу [138–142]. Но неоднородности конструкции в виде отверстий и вырезов осложняют использование этих методов.

Если в техническом изделии, проектные характеристики которого соответствуют линейной динамической системе, возникают суб- и супергармонические резонансы, искажения фазовых и других видов портретов колебаний, например, фигур Лиссажу, то методы обнаружения дефектов по этим признакам можно отнести к третьей группе [143–151].

Как показано в работе [150], для обнаружения и оценки величины зазоров в узлах проводки управления отклоняемыми поверхностями самолётов могут быть использованы нелинейные искажения портретов колебаний.

В данном подразделе излагается методика контроля зазоров в технических изделиях по искажениям портретов вынужденных колебаний в процессе вибрационных испытаний. Представлен способ поэтапного выявления всех зазоров в объекте испытаний, которые приводят к искажениям портретов колебаний. Это позволяет не только идентифицировать зазоры, но и оценивать их величины. В рамках описываемого подхода разработана и введена в программное обеспечение управления испытаниями подпрограмма анализа портретов колебаний.

3.2.1 Методика исследований

Методика диагностирования дефектов в конструкциях летательных аппаратов по искажениям портретов колебаний заключается в следующем: на конструкции вблизи подвижных соединений и мест стыковки или крепления агрегатов и оборудования, а также в наиболее нагруженных местах устанавливаются датчики ускорений. Затем с помощью источников гармонических вибраций создаются вынужденные колебания конструкции. Эти колебания фиксируются акселерометрами и представляются в виде портретов: вертикальная развертка пропорциональна сигналу датчика, а горизонтальная — первой гармонике сигнала, сдвинутой по фазе на $\pi/2$. Такой портрет колебаний для линейной динамической системы является окружностью. Наличие дефектов сопровождается нелинейными искажениями портретов колебаний из-за соударения элементов конструкции в зазорах, схлопывания трещин, трения в вершинах трещин и подвижных соединениях. Для численной оценки искажений из ряда Фурье для портрета колебаний вычитается первая гармоника, в остатке ряда определяется абсолютный максимум за период колебаний, величина которого Ψ принимается за параметр искажений. Величина параметра Ψ нормируется и обозначается как

ξ . Строится распределения ξ по объекту контроля. По расположениям локальных максимумов искажений определяются местоположения дефектов.

В расчетах параметра ξ используются два вида нормирования искажений Ψ , условно названные глобальным и локальным. При глобальном нормировании величина Ψ относилась к амплитуде первой гармоники в контрольной точке конструкции. Предлагается принимать в качестве контрольной такую точку, в которой амплитуда колебаний первой гармоники наибольшая. В случае локального нормирования имеем:

$$\xi_i = \frac{\max |\Psi_i|}{(A_1)_i}, \quad (3.7)$$

где $(A_1)_i$ — амплитуда колебаний первой гармоники, i — номер канала измерений.

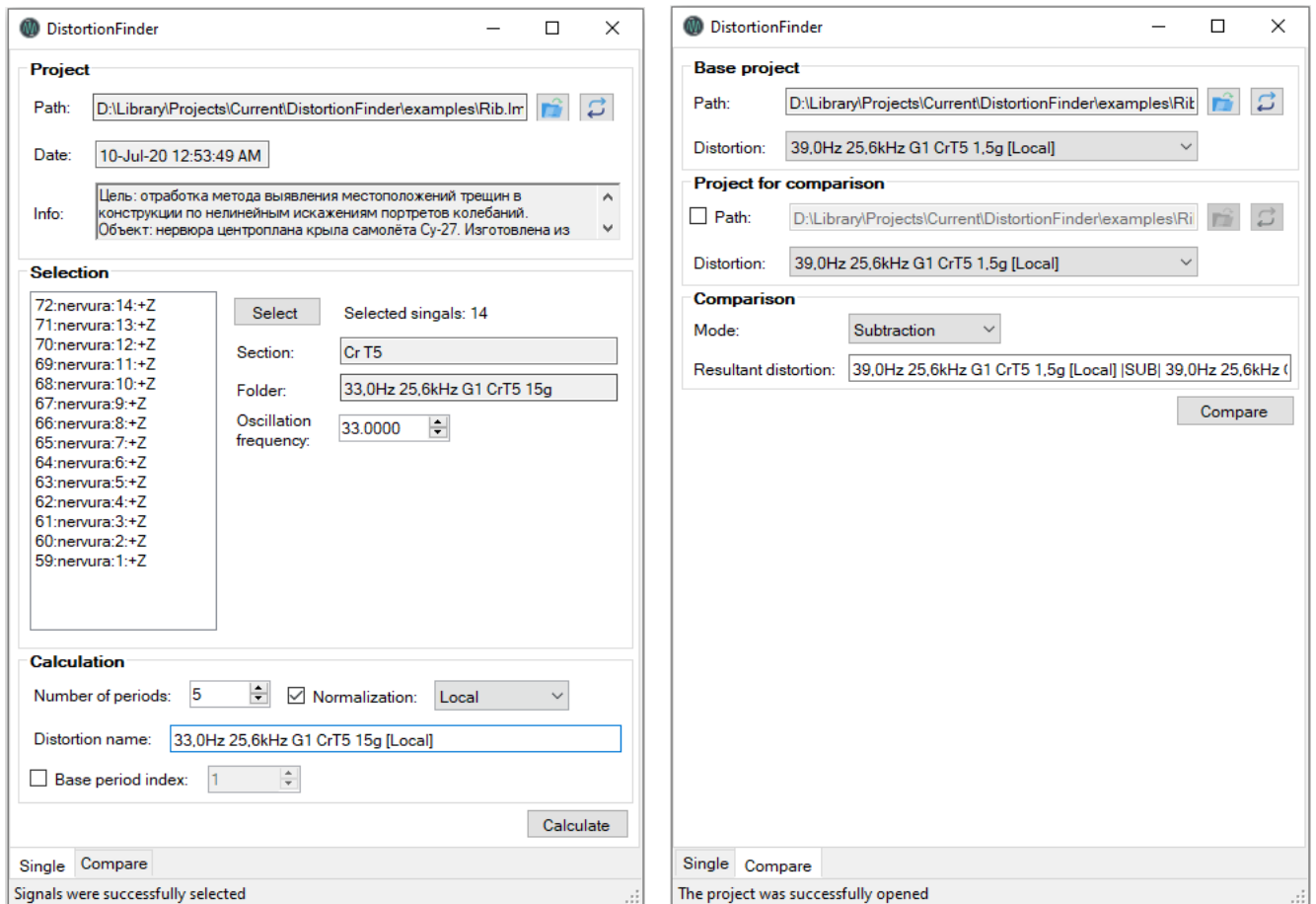
Глобальное нормирование необходимо для анализа распределения искажений портретов колебаний по всему изделию. Поскольку частоты вибрационного нагружения объектов испытаний находятся обычно в окрестности их собственных частот, то нужно исключить появление ложных локальных максимумов искажений. Это происходит из-за того, что некоторые акселерометры могут быть установлены вблизи узлов форм собственных колебаний конструкции.

Локальное нормирование искажений портретов колебаний используется для определения местоположений дефектов в отдельных агрегатах и узлах сопряжения конструкции. Такое нормирование позволяет сопоставить между собой проявления разных дефектов и отследить динамику изменения каждого из них в процессе испытаний или эксплуатации.

В рамках описанной методики была создана программа для контроля дефектов в процессе вибрационных испытаний, проводимых с использованием программного комплекса Simcenter Testlab. Для оценки состояния поврежденности конструкции проводится расчет и построение параметров искажений портретов колебаний, которые позволяют выявлять такие конструкционные дефекты, как зазоры (люфты), трещины и повышенное трение в подвижных соединениях. Исходными данными для расчета являются временные сигналы по выбранным каналам измерения.

По команде экспериментатора (рисунок 3.5a) она осуществляет расчет параметров искажений портретов колебаний ξ параллельно по всем каналам измерений, строит распределения искажений по конструкции и запоминает такие распределения. Это позволяет контролировать проявление дефектов в течение вибропрочностных испытаний, а также эксплуатации конструкции путем

сравнения полей параметра искажений (рисунок 3.5б), записанных для разных состояний изделия. Кроме того, в программе заложена возможность построения искажений портретов колебаний для отдельных агрегатов и узлов сопряжения конструкции, что необходимо, например, для поэтапного контроля дефектов.



а) Режим одиночного расчета

б) Режим сравнения

Рисунок 3.5 — Графический интерфейс программы DistortionFinder

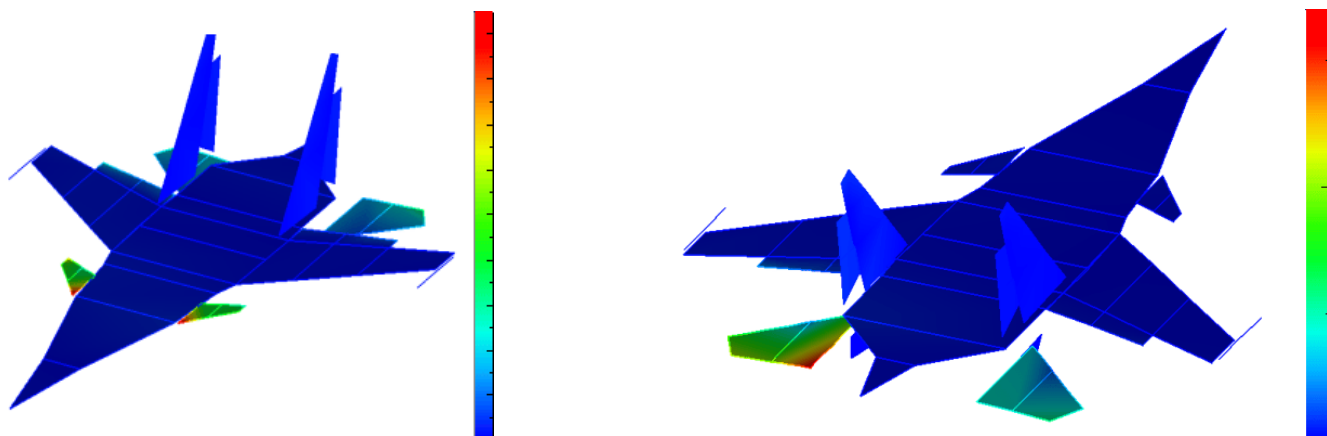
Для сохранения результирующих форм и портретов колебаний в навигаторе рабочего проекта, программа использует интерфейс Testlab Automation.

3.2.2 Применение методики для диагностирования зазоров и люфтов

Методика обнаружения зазоров по искажениям портретов колебаний использована для диагностирования самолётов в процессе модальных испытаний, а также космических аппаратов открытого исполнения в технологических вибрационных испытаниях.

На рисунках 3.6 и 3.7 приведены распределения искажений портретов колебаний, полученные в модальных испытаниях нескольких самолётов. Здесь и далее

на рисунках красной цветовой гамме соответствуют области изделий с наибольшими искажениями, а синей — с наименьшими. Полученные максимумы искажений соответствуют повышенным зазорам, обнаруженным в конструкциях.



а) Переднего горизонтального оперения б) Цельноповоротного стабилизатора

Рисунок 3.6 — Зазоры в узлах крепления оперения.

Глобальная нормировка искажений

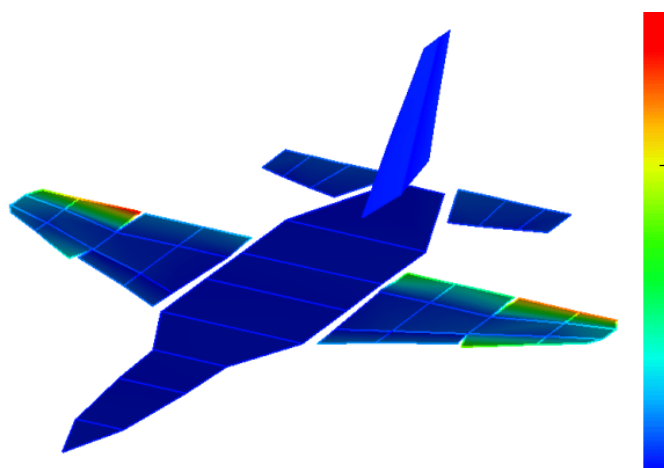


Рисунок 3.7 — Зазоры в проводках управления механизацией крыла самолёта.

Глобальная нормировка искажений на частоте изгиба крыла

На рисунке 3.8 показаны искажения портретов колебаний для самолёта с безбустерной системой управления (фюзеляж не показан). Видно, что максимумы искажений находятся на руле высоты и триммере из-за зазоров в проводках управления. Исключение этих искажений из рассмотрения приводит к локализации максимума искажений в соединении ручки управления с проводкой управления, где обнаружен повышенный люфт (рисунок 3.9).

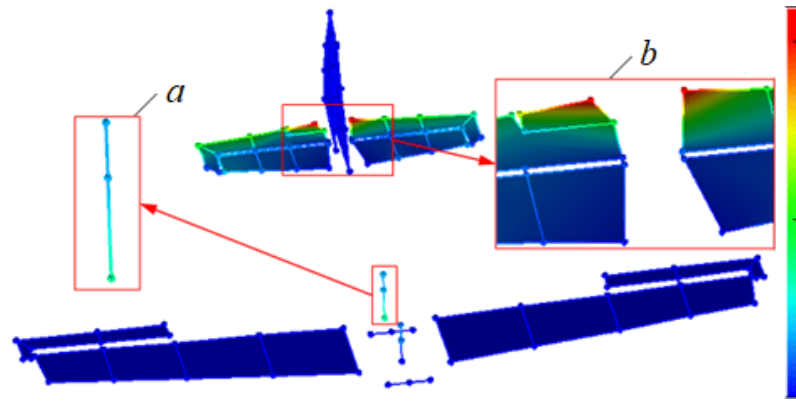


Рисунок 3.8 — Зазоры в проводке управления рулем высоты и триммером.

Глобальная нормировка искажений портретов колебаний

а) датчики на ручке управления, б) искажения на руле высоты и триммере

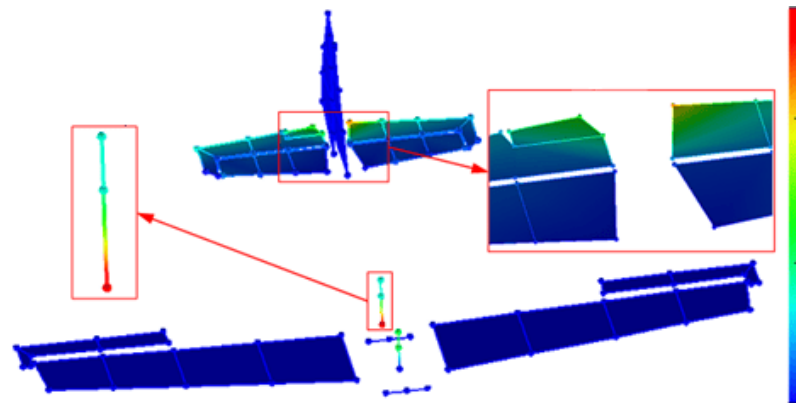


Рисунок 3.9 — Люфт в соединении ручки управления с проводкой.

Глобальная нормировка искажений портретов колебаний

Из представленных результатов следует, что планеры самолётов являются линейно деформируемыми конструкциями. Нелинейные искажения портретов соответствуют колебаниям отклоняемых поверхностей. Необходимо отметить, что полученные результаты не являются частным случаем. На рисунке 3.10 приведены распределения искажений портретов колебаний самолётов на разных резонансных частотах нескольких собственных форм колебаний планера. Видно, что качественно результаты практически не отличаются — максимальные искажения портретов колебаний соответствуют отклоняемым поверхностям.

Зазоры, в том числе предусмотренные конструкторской документацией, имеют место и в узлах соединения агрегатов планера. В приведённом примере (рисунок 3.11а) видно, что максимумы искажений приходятся не только на отклоняемые поверхности, но и на концевые части крыла. Если нормировать величины искажений к амплитуде первой гармоники в каждой точке измерения,

получится следующее: максимумы искажений соответствуют отклоняемым поверхностям и корневым частям крыла (рисунок 3.116).

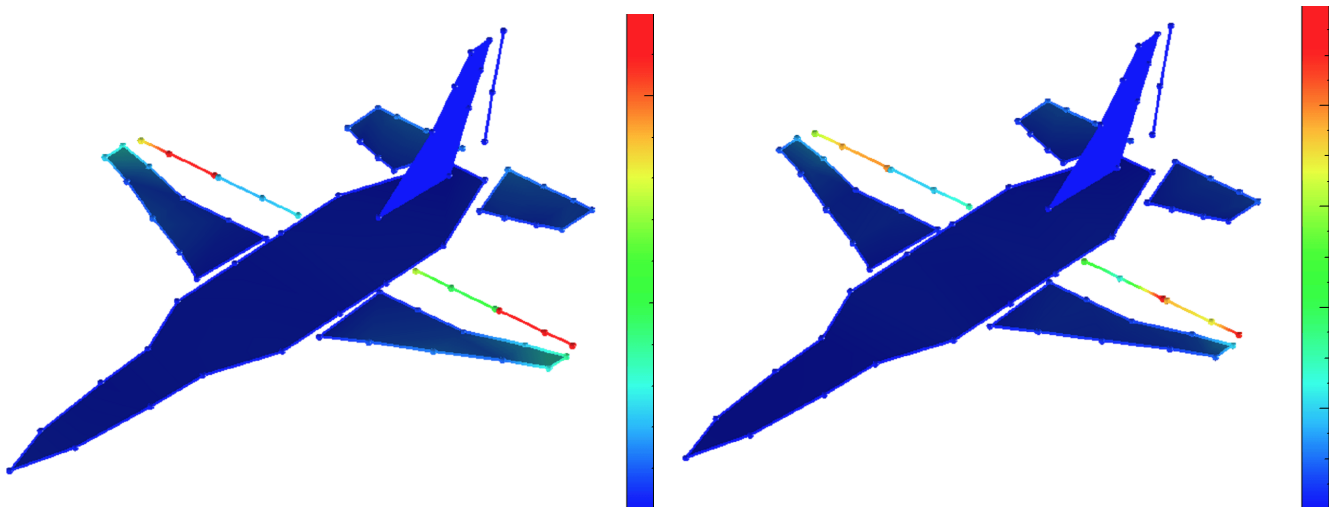
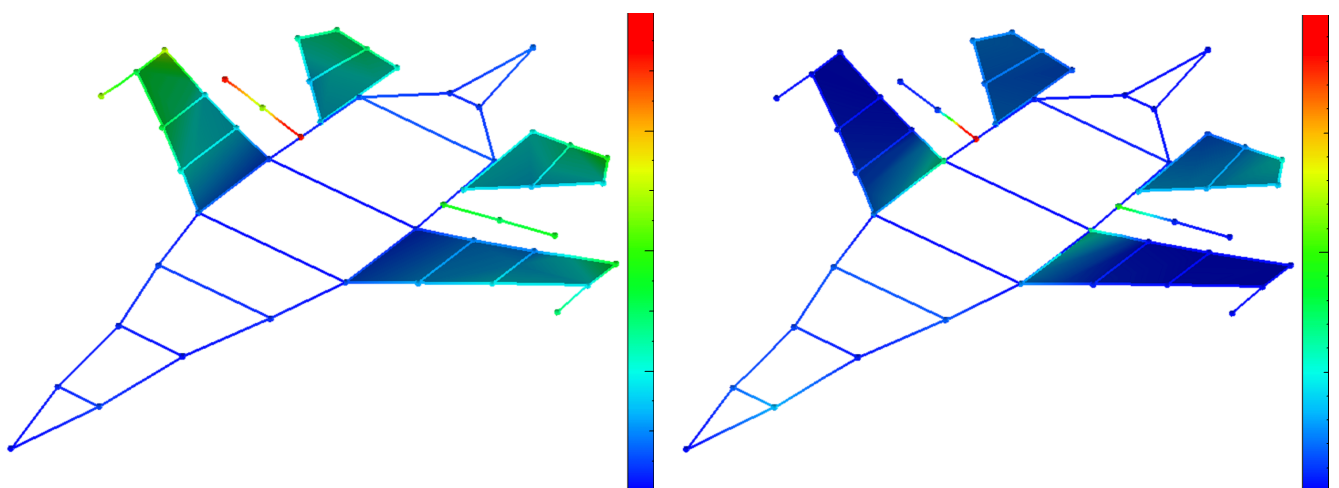


Рисунок 3.10 — Распределения искажений портретов колебаний для различных резонансных частот планера



а) Глобальная нормировка

б) Локальная нормировка

Рисунок 3.11 — Распределения искажений портретов колебаний для многоцелевого самолёта

Поскольку в проводках управления и узлах установки флаперонов и стабилизаторов могут быть зазоры, исключим их из рассмотрения. Полученное распределение искажений портретов колебаний (рисунок 3.12) указывает на наличие зазоров в узлах стыковки отъемной части крыла с фюзеляжем. По конструкторской документации самолёта было установлено, что нижние узлы навески крыла действительно выполняются с гарантированным зазором, допускающим перемещения в вертикальном направлении.

Космические аппараты (КА) в ходе создания подвергаются технологическим вибрационным испытаниям. Результаты используются для подтверждения

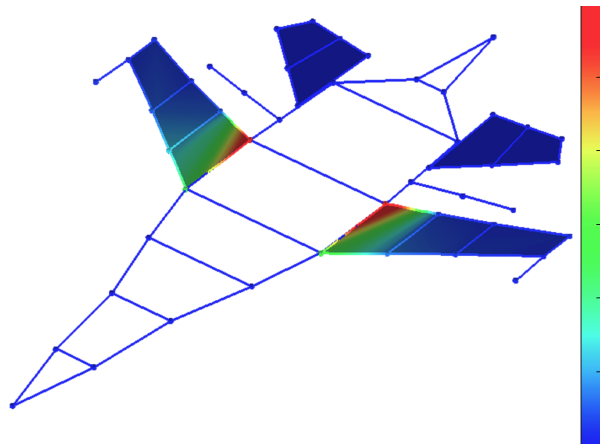


Рисунок 3.12 — Исключение показаний датчиков из распределения искажений портретов колебаний для многоцелевого самолёта

качества спроектированной конструкции КА и обеспечения ее вибрационной прочности, в том числе для обнаружения производственно-технологических дефектов. Поскольку наибольшие вибрационные нагрузки воздействуют на КА во время его выведения на орбиту, то испытаниям подвергаются КА в стартовой конфигурации. На рисунке 3.13 показана конструктивно-компоновочная схема КА открытого исполнения. Силовым каркасом является углепластиковый цилиндр с закрепленными на нем трёхслойными плоскими панелями с сотовым наполнителем. Оборудование КА (антенны, солнечные батареи и т.д), а также астроплата с датчиками системы ориентации и стабилизации расположены на панелях. Для проведения испытаний КА устанавливается на адаптер, предназначенный для стыковки КА с ракетой-носителем.

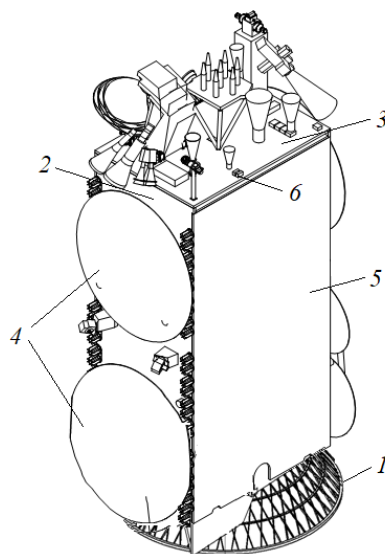


Рисунок 3.13 — Конструктивно-компоновочная схема космического аппарата
1 — адаптер, 2 — панель, 3 — астроплата, 4 — рефлекторы антенн, 5 — панели солнечной батареи, 6 — узел крепления солнечной батареи

Вибрационная диагностика КА проводится в несколько этапов [150]. На первом из этапов выполняется вибрационное нагружение низкой интенсивности с целью проверки соответствия динамических характеристик КА их проектным значениям. На втором этапе происходит нагружение КА нормированным вибрационным воздействием. В ходе нагружения могут возникать и развиваться дефекты, например, нарушаться межблочные связи за счет появления зазоров. Третий этап повторяет программу нагружения первого. На основании изменения параметров вибраций: резонансной частоты и амплитуды колебаний; появлению высокочастотных составляющих в отклике КА и сдвигу частотного спектра, определяют местоположения и характер дефектов.

Используем методику диагностики для обнаружения зазоров по искажениям портретов колебаний применительно к конструкциям двух КА. Необходимо отметить, что в испытаниях нагружение этих КА производилось синусоидальной вибрацией, частота которой изменялась по логарифмическому закону. Поскольку вынужденные колебания КА являлись нестационарным процессом, то в окрестностях резонансных частот объектов испытаний выделялись временные сегменты, для которых в глобальной нормировке вычислялись искажения портретов колебаний. Среди всех распределений выбирались те, которым соответствуют наибольшие значения искажений.

На рисунке 3.14 показаны распределения искажений портретов колебаний по поверхности одного из испытываемых КА. Наибольшие искажения достигаются вблизи узлов установки солнечных батарей, в которых имеются конструктивные зазоры.

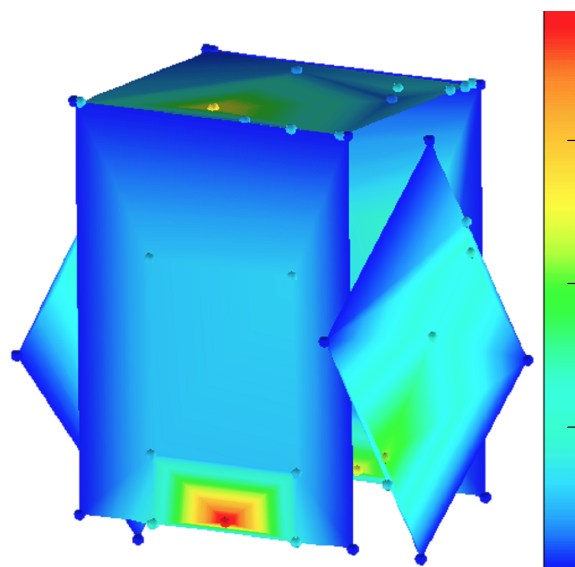


Рисунок 3.14 — Проявление зазоров в узлах установки солнечных батарей

Построенное распределение (рисунок 3.14) является единственным вариантом в диапазоне частот колебаний от 20 до 100 Гц, в котором искажения портретов колебаний превышали погрешности их построения. Продолжительность выделенных временных сигналов ускорений, использованных для расчета распределения, составила 0.3 секунды.

На рисунке 3.15 представлена схема установки для вибрационных испытаний антенны другого КА и распределение искажений портретов колебаний рефлектора антенны. Точками на рисунке 3.16 отмечены места установки датчиков ускорений на поверхности рефлектора. Стрелкой обозначено местоположение дефекта: разрушение клеевого соединения одной из опор рефлектора с его каркасом, в результате чего возник зазор. Этому месту соответствуют и наибольшие искажения портретов колебаний.

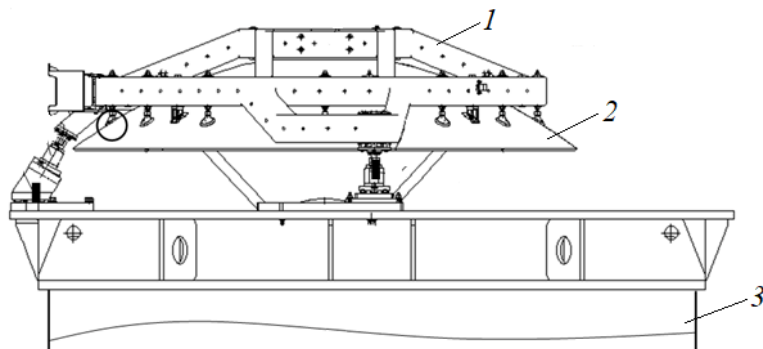


Рисунок 3.15 — Установка для испытаний антенны
1 — каркас, 2 — рефлектор, 3 — вибростенд

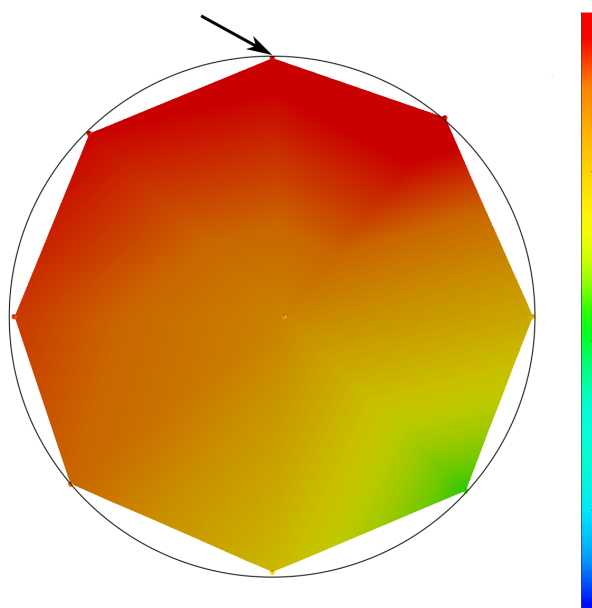


Рисунок 3.16 — Искажения портретов колебаний рефлектора антенны

3.3 Обработка и представление результатов в процессе испытаний

Одним из ключевых требований обеспечения непрерывности производственного процесса авиационной техники является сокращение времени между натурными испытаниями и первым вылетом изделия. Для удовлетворения этого условия необходимо осуществлять обработку и представление результатов модального анализа непосредственно в процессе испытаний. Это позволит оперативно составить заключение о полноте экспериментальных данных, необходимых для коррекции расчетной модели объекта испытаний.

Для решения этой задачи на языке программирования C# разработана программа ResponseAnalyzer (рисунок 3.17). Программа предназначена для представления результатов модальных испытаний, проведенных с использованием программного комплекса Simcenter Testlab. Программная реализация использует интерфейс Testlab Automation для получения и обработки сигналов с акселерометров, геометрии и информации о ходе проведения эксперимента.

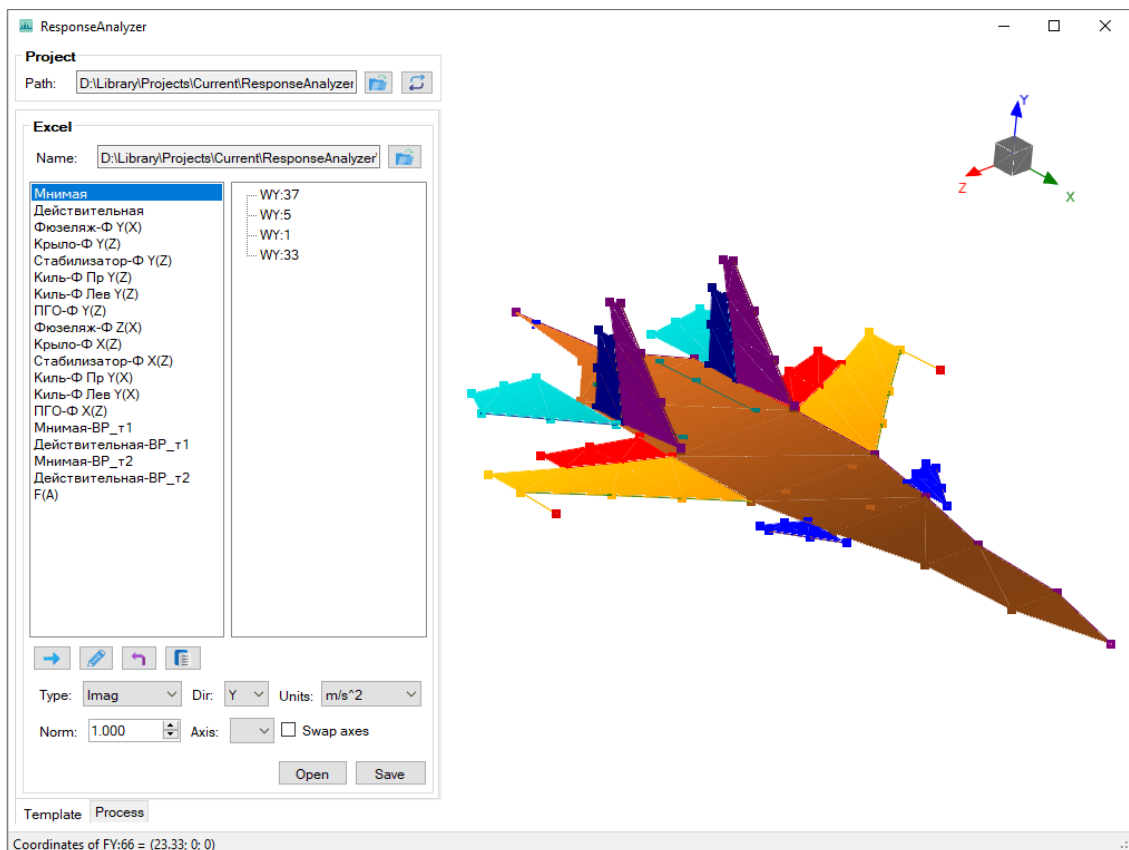


Рисунок 3.17 — Графический интерфейс программы ResponseAnalyzer

Посредством графического интерфейса возможен выбор как отдельных геометрических точек конструкции, так и их комбинаций, для построения

амплитудно-частотных характеристик на одном и нескольких уровнях нагружения, форм колебаний, зависимостей резонансных частот собственных колебаний от амплитуд возбуждения. Данные пользовательского выбора сохраняются в виде бинарных шаблонов, которые могут использоваться для обработки результатов повторных испытаний рассматриваемой конструкции. Формой представления результатов работы программы являются электронные таблицы Excel. В соответствии с пользовательским форматированием этих таблиц происходит размещение результатов. Так, пользователь может поставить в соответствие графическим объектам типа «Диаграмма» различные экспериментальные данные, определив стиль и очередность их отображения: толщину и тип линий, параметры маркеров. С целью обеспечения пользовательского контроля результатов обработки, данные, использованные для построения этих графических объектов, наряду со служебной информацией о работе программы, приводятся в одном из разделов результирующих таблиц.

Для осуществления выбора сигналов используется раздел навигации Simcenter Testlab (рисунок 3.18). При этом пользователю доступна загрузка результатов, соответствующих как одному, так и нескольким экспериментам. Кроме того, имеется возможность исключать из рассмотрения отдельные случайные выбросы в экспериментальных данных и выбирать для обработки определённый частотный диапазон.

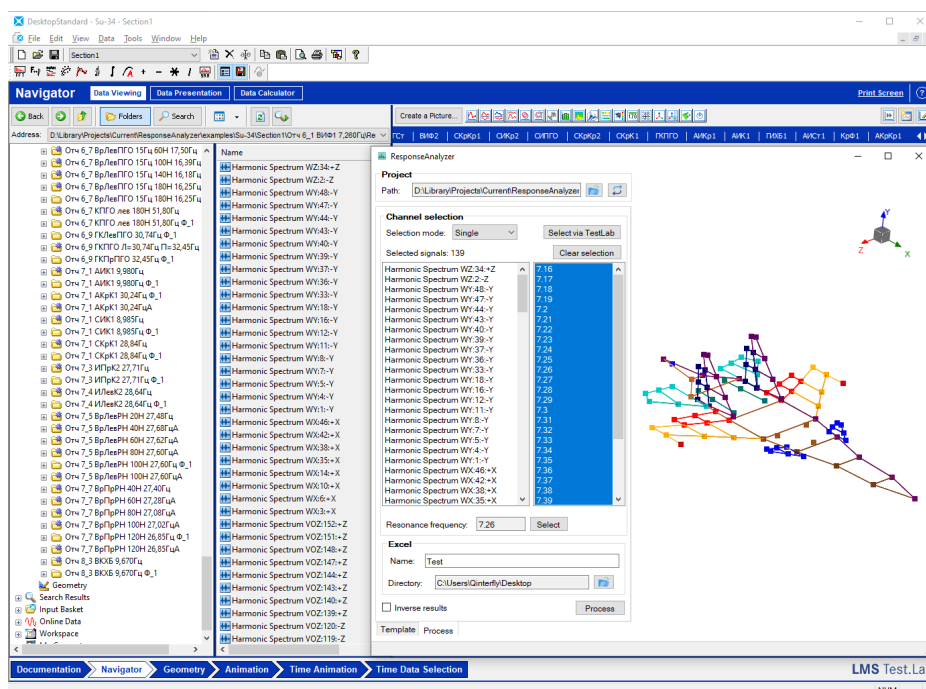


Рисунок 3.18 — Выбор сигналов для построения графических объектов посредством дерева навигации Simcenter Testlab

Взаимодействие с геометрической моделью исследуемого объекта осуществляется с помощью пользовательского ввода и контекстного меню (рисунок 3.19), в котором доступно для выбора: модель отображения конструкции (полигональная и сетчатая), модель отображения узлов (маркеры и имена), отображение отдельных конструкционных элементов, модель освещения, а также стандартные виды (изометрические и проективные).

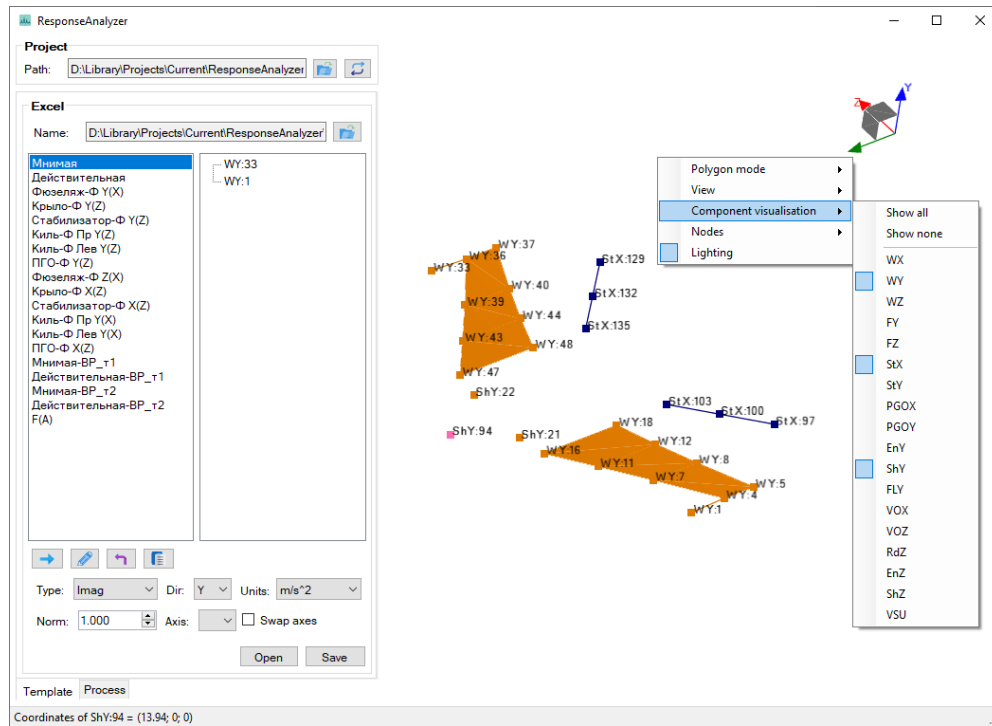


Рисунок 3.19 — Выбор точек конструкции с помощью графического меню

3.4 Операционный модальный анализ

Воспользуемся методами операционного модального анализа, изложенными в подразделе 1.4, для обработки результатов летных и натурных испытаний. Запись колебательного процесса осуществлялась посредством акселерометров, обладающих высокой чувствительностью и позволяющих фиксировать высокочастотные составляющие отклика конструкции.

3.4.1 Декомпозиция сигналов виброускорений

Временные зависимости перемещений определяются посредством двойного интегрирования сигналов виброускорений. При этом показания акселеромет-

ров подвержены влиянию как постоянных факторов, например, воздействию температуры, так и случайных факторов, изменяющихся со временем. Наличие этих составляющих обуславливает дрейф показаний (тренд) акселерометров, который кратно возрастает при каждом численном интегрировании данных сигналов [152]. Как правило, этот тренд аппроксимируется полиномиально по методу наименьших квадратов [153]. В этом случае неоднозначный выбор степени аппроксимирующего полинома существенно определяет результат вычислений. Известны подходы исключения тренда на основе фильтрации, использующие различные модификации метода скользящего среднего [154]. В рамках этого подхода неправильный выбор ширины временного окна для фильтрации влечет потерю полезных составляющих сигнала.

Модальные характеристики нередко определяются по откликам конструкции на импульсное воздействие. Полагая характер этих возмущений однократным и затухающим, ускорения могут быть представлены в виде, позволяющим автоматически извлекать частоты и логарифмические декременты колебаний. В этом случае не возникает необходимости фильтрации тренда.

Представим ускорения в каждый момент времени как:

$$\alpha_i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m A_k e^{-\eta_k(t_i-t_0)} [\rho_{1,i}(\mathbf{p}) + \rho_{2,i}(\mathbf{p})], \quad i = 1 \dots n. \quad (3.8)$$

Гармонические слагаемые, входящие в это разложение, запишутся:

$$\begin{aligned} \rho_{1,i}(\mathbf{p}) &= \cos [\varphi_k + \omega_k(t_i - t_0)] (\eta_k^2 - \omega_k^2), \\ \rho_{2,i}(\mathbf{p}) &= 2\eta_k \omega_k \sin [\varphi_k + \omega_k(t_i - t_0)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

где m — число гармоник в разложении, n — число временных отсчетов, η_k — относительный коэффициент демпфирования, φ_k и ω_k — фаза и частота колебаний.

Сведем варьируемые параметры разложения в вектор неизвестных:

$$\mathbf{p} = \left\{ \varphi_k \quad A_k \quad \omega_k \quad \eta_k \right\}, \quad k = 1 \dots m. \quad (3.10)$$

Выразим ошибку представления $\alpha_i(\mathbf{p})$ экспериментальных ускорений a_i :

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \left\{ \alpha_0(\mathbf{p}) - a_0 \quad \dots \quad \alpha_i(\mathbf{p}) - a_i \quad \dots \quad \alpha_n(\mathbf{p}) - a_n \right\}. \quad (3.11)$$

Таким образом, получаем задачу условной оптимизации ($k = 1 \dots m$):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \quad & \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{f}\|^2, \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \varphi_k \leq \pi, \\ & \omega_k > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Градиент целевой функции имеет вид:

$$\nabla F(\mathbf{p}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}), \quad (3.13)$$

где $\mathbf{J}(p)$ — матрица Якоби по неизвестным параметрам.

Для решения задачи (3.12) будем использовать метод логарифмических барьеров (внутренней точки). С целью улучшения сходимости, предлагается использовать каскадный вычислительный алгоритм, который постепенно наращивает число гармоник в разложении (3.8). На каждом шаге итерационного процесса решаются две подзадачи:

1. Минимизация ошибок представления $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ одной гармоникой.
2. Аппроксимация сигнала виброускорений \mathbf{a} . В качестве начального приближения для m -ой гармоники используется решение задачи частичной минимизации.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не достигнуто целевое число гармоник.

Заметим, что для использования описанного подхода необходимо знание временных границ импульсных фрагментов. Ручная разметка таких границ подвержена влиянию субъективных факторов и является особенно трудоемкой в случае многоканальной системы измерения. Для автоматической разметки границ используем метод сегментации, представленный в [155]. Он описывается следующей последовательностью шагов, применяемой к каждому из рассматриваемых сигналов в отдельности.

1. Вычисление скользящего максимума. Использование локальных экстремумов полученной последовательности для подсчета числа импульсных фрагментов в сигнале.
2. Вычисление скользящей разницы в окрестности импульса. Определение начала импульса как локального минимума ядерной оценки плотности последовательности.
3. Использование преобразования Гильберта для построения огибающих. Определения окончания импульса как нуля производной экспоненты, аппроксимирующей огибающую.
4. Шаги 2 – 3 повторяются до тех пор, пока не выполнена сегментация всех найденных импульсов.

Продемонстрируем успешную работу алгоритма сегментации для нескольких сигналов виброускорений, являющих собой отклики на многократное им-

пульсное воздействие. На рисунке 3.20 синим цветом обозначены сигналы с акселерометров, а красным — автоматически выделенные сегменты, определяющие затухающие колебания на импульсные воздействия.

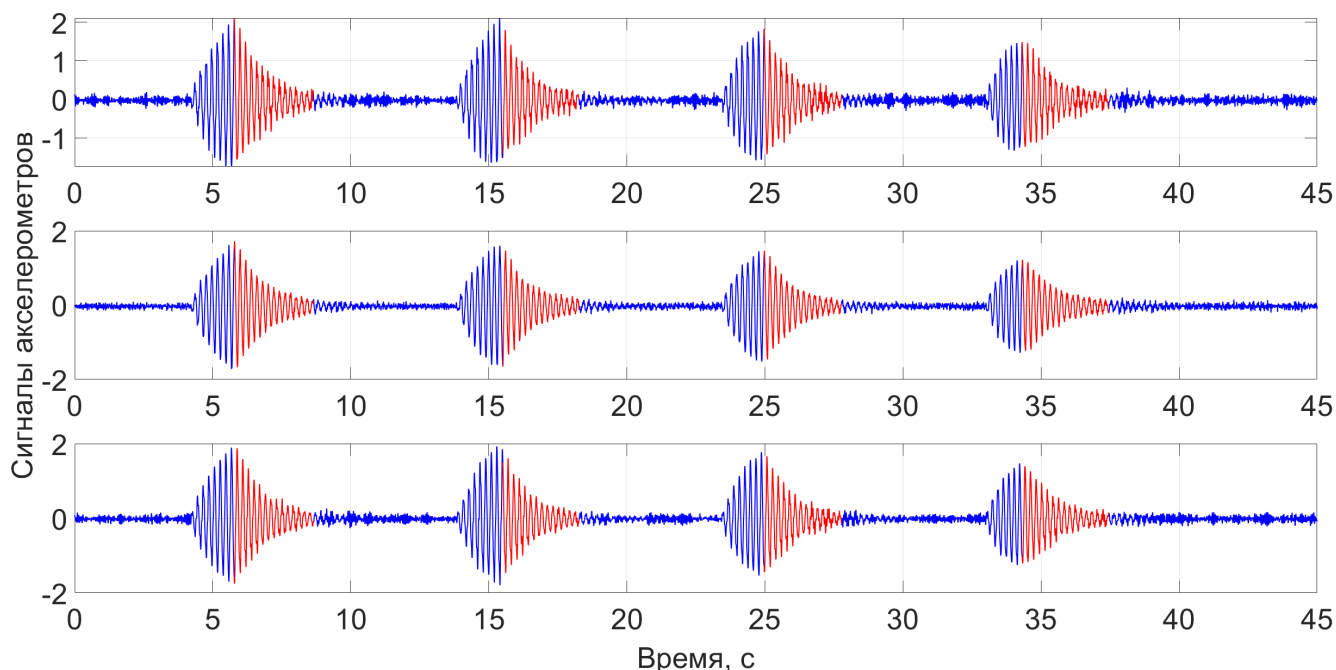


Рисунок 3.20 — Пример сегментации сигналов виброускорений

3.4.2 Тестирование на примере имитационной модели ЛА

Протестируем методы операционного модального анализа на примере имитационной модели беспилотного летательного аппарата XQ-58 Valkyrie (рисунок 3.21) [156].

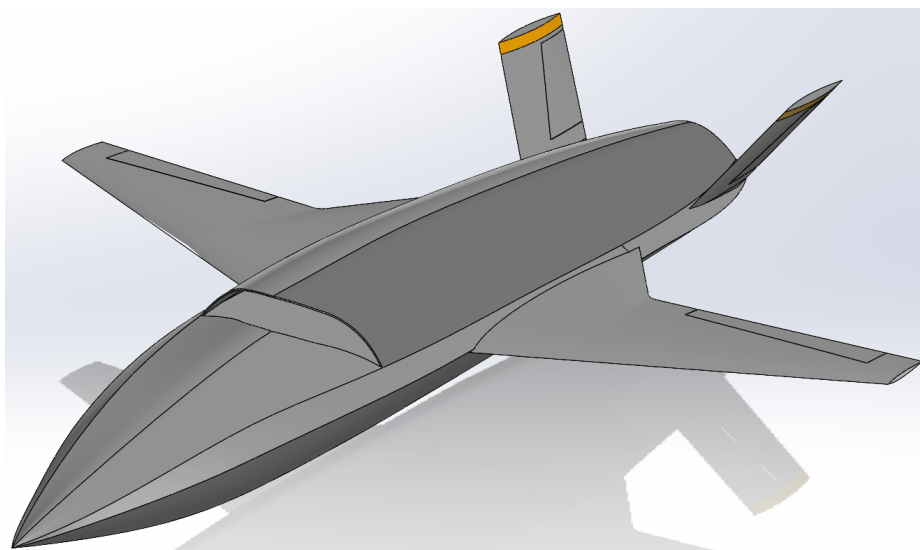


Рисунок 3.21 — Геометрическая модель беспилотного летательного аппарата

На основании геометрической модели планера была создана конечно-элементная модель Ansys (рисунок 3.22). При этом жесткостные характеристики элементов планера подбирались таким образом, чтобы приблизить спектр частот собственных колебаний к тому, который наблюдается на летательных аппаратах схожей компоновки.

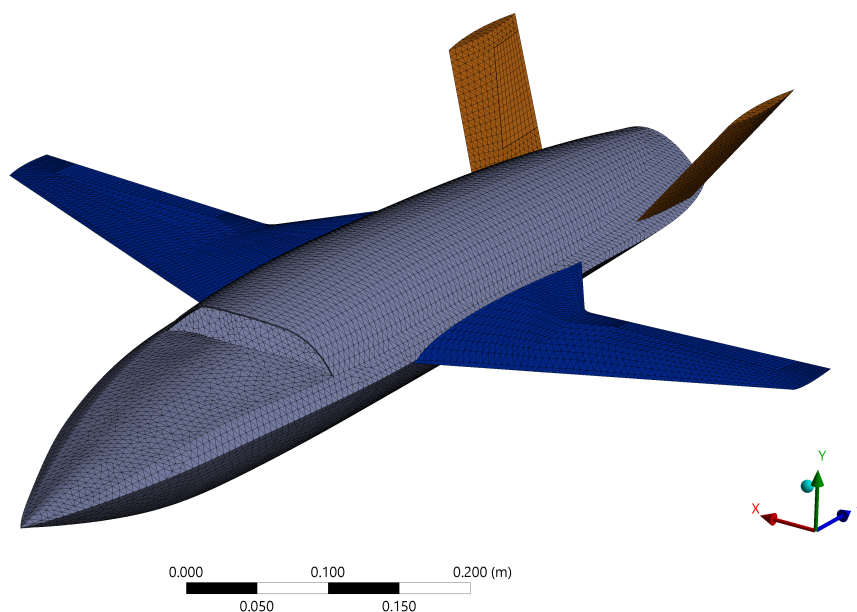


Рисунок 3.22 — КЭ-модель беспилотного летательного аппарата

На каждом из элементов планера была размещена сеть виртуальных датчиков, связанных между собой треугольными полигонами. Пространственная схема расположения датчиков, общее количество которых составило 101, приведена на рисунке 3.23.

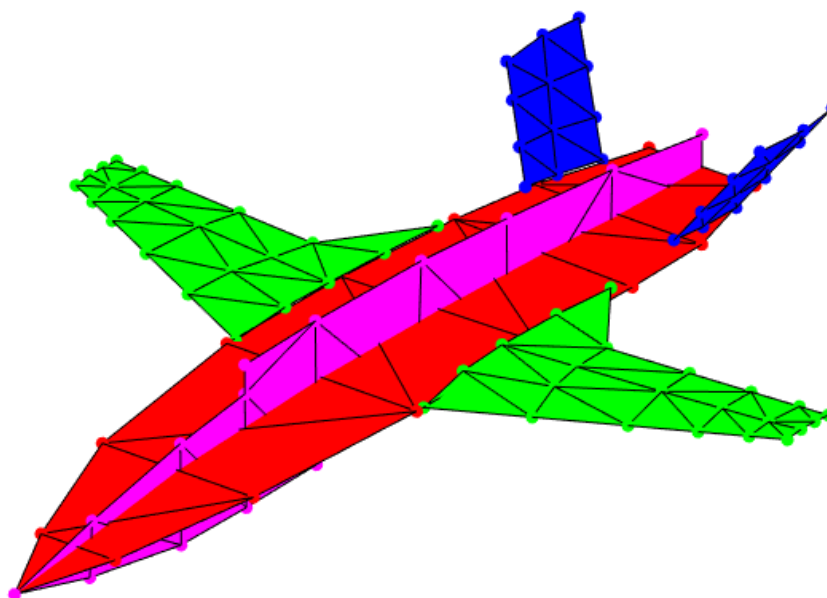


Рисунок 3.23 — Схема размещения датчиков

Для определения модальных характеристик планера к законцовкам крыла приложено однократное импульсное воздействие длительностью 0.04 с. Данные динамических откликов записывались с частотой дискретизации 2 кГц по каждому пространственному направлению во всех датчиках в течение 5 с. Временные зависимости ускорений вдоль направления Y, полученные в нескольких точках левой консоли крыла, приведены на рисунке 3.24. Распределение спектральной плотности мощности, соответствующей этим сигналам, показано на рисунке 3.25.

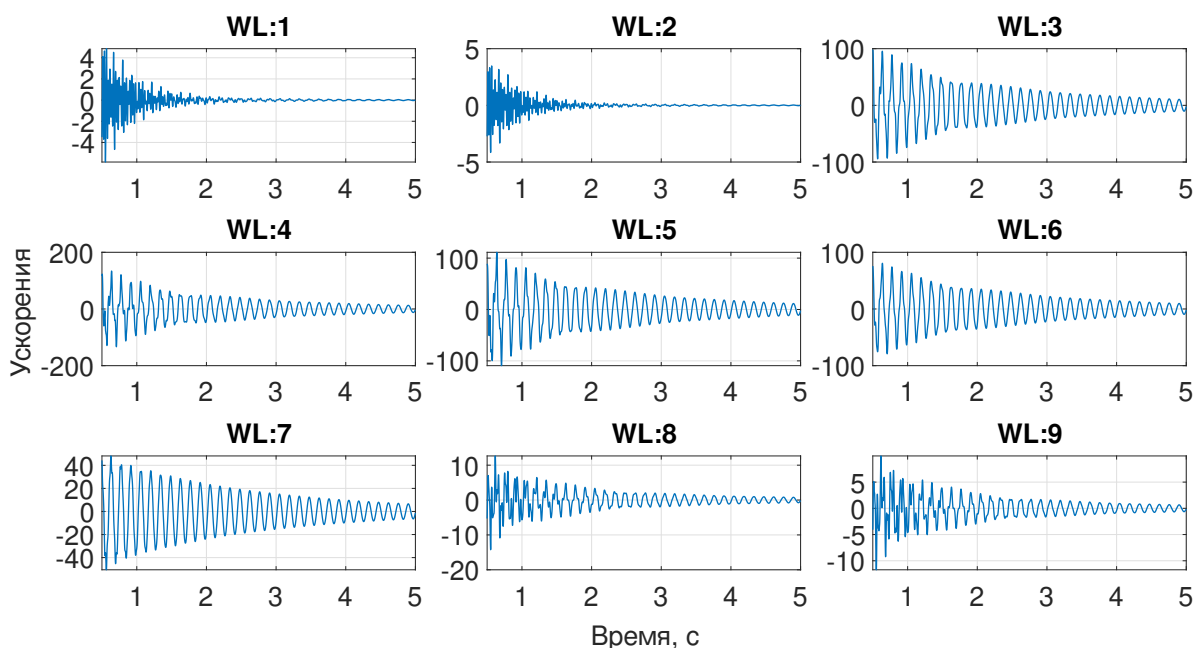


Рисунок 3.24 — Временные сигналы ускорений в точках консоли крыла

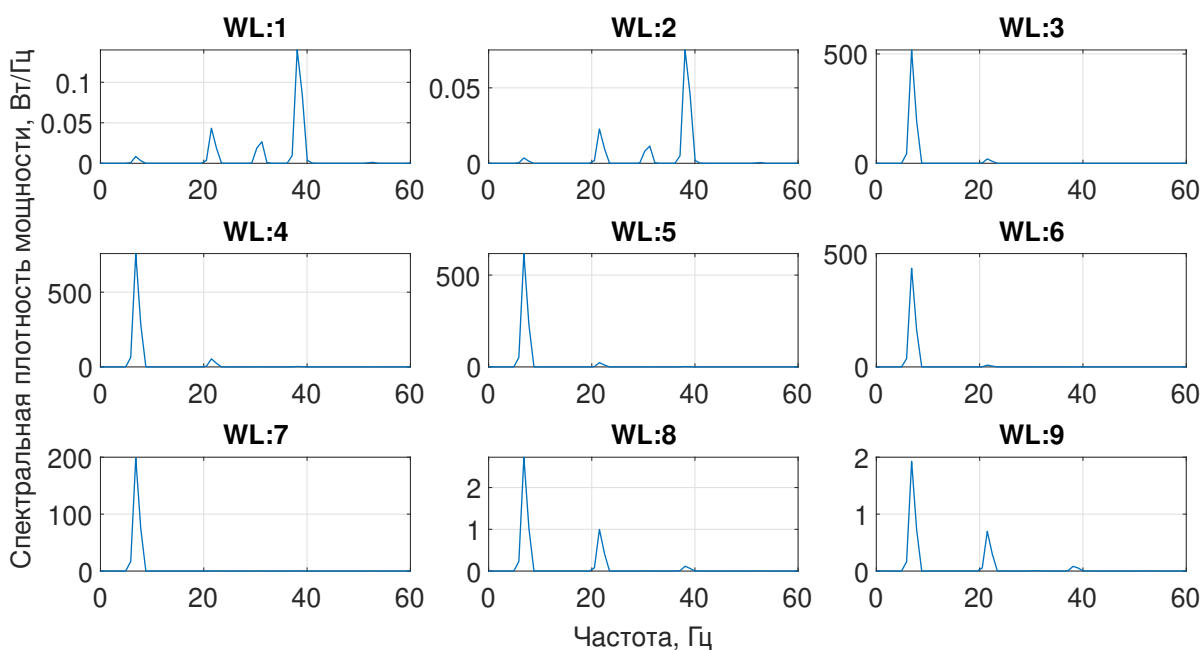


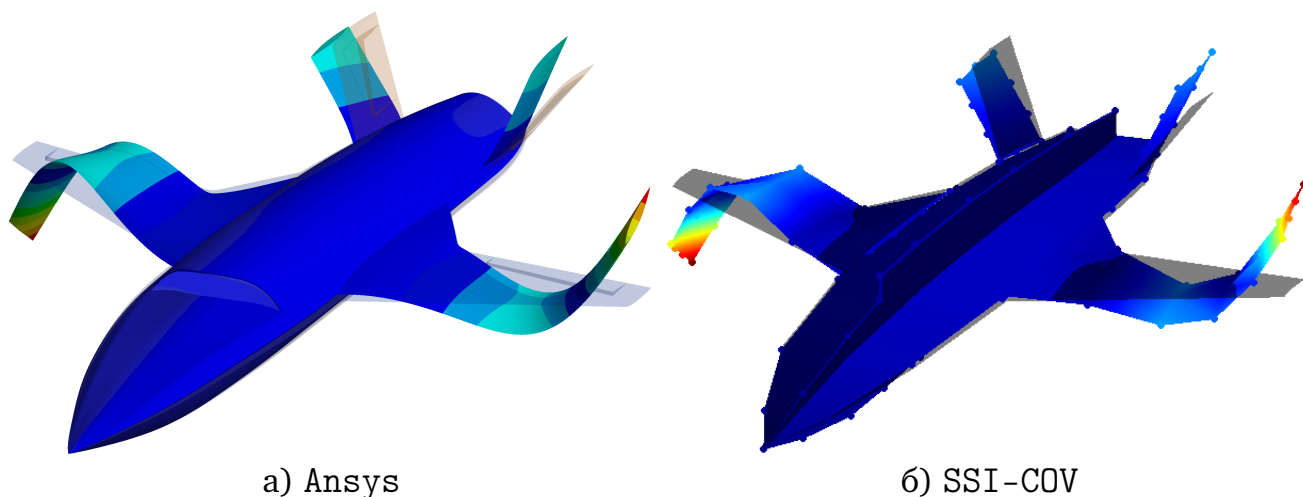
Рисунок 3.25 — Спектральная плотность мощности в точках консоли крыла

Необходимо заметить, что не все методы операционного модального анализа, которые рассматриваются в настоящей работе, достаточно эффективны с численной точки зрения для одновременной обработки всего массива данных откликов. Так, посредством метода ERA удастся обработать лишь один элемент планера одновременно. Наиболее высокопроизводительным и точным применительно к рассматриваемой задаче оказался метод SSI-COV. В таблице 3.1 сведены частоты f и логарифмические декременты колебаний δ , определенные по конечно-элементной модели и методом SSI-COV. По этим данным вычислены погрешности определения модальных характеристик, которые приведены в двух последних столбцах.

Таблица 3.1 — Результат определения модальных характеристик методом SSI-COV

Тон	Ansys		SSI-COV		Погрешность, %	
	f , Гц	δ	f , Гц	δ	$\Delta \bar{f}$	$\Delta \bar{\delta}$
1	1.8343	0.0628	1.8343	0.0628	-0.0018	0.0018
2	7.0324		7.0322	0.0628	-0.0035	0.0050
3	10.2304		10.2300	0.0628	-0.0042	-0.0141
4	21.7268		21.7180	0.0628	-0.0405	-0.0730
5	25.9578		25.9430	0.0628	-0.0571	-0.1016
6	30.8802		30.8560	0.0627	-0.0784	-0.1732
7	35.5900		35.5530	0.0627	-0.1039	-0.2035
8	38.4500		38.4030	0.0627	-0.1223	-0.2369
9	40.3791		40.3250	0.0626	-0.1340	-0.2942
10	40.4966		40.4420	0.0627	-0.1348	-0.2608
11	52.6507		52.5310	0.0626	-0.2274	-0.4486

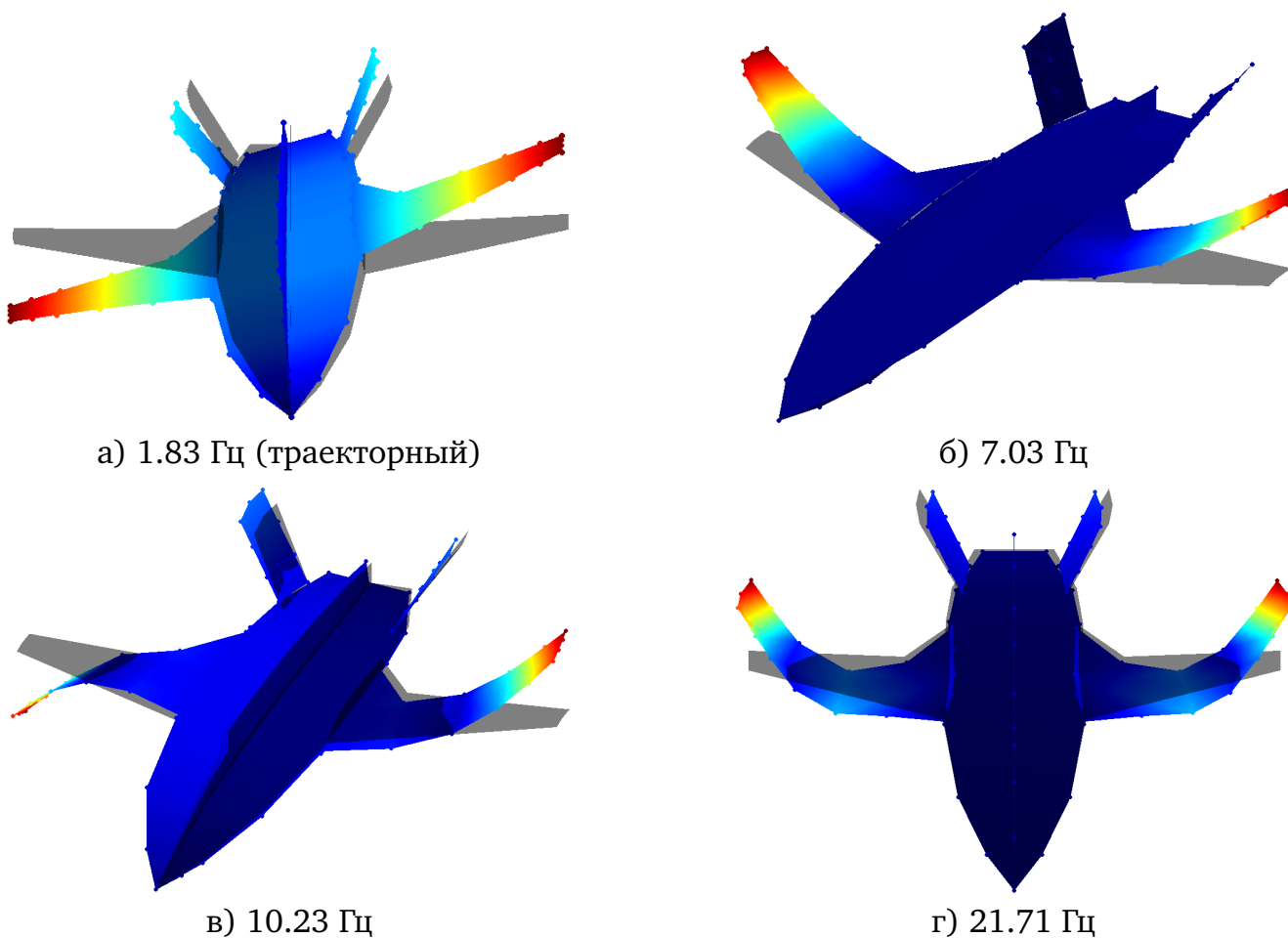
Необходимо заметить, что определенные формы колебаний SSI-COV совпадают с расчетными из Ansys. Сравнение форм колебаний на примере пятого тона собственных колебаний приведено на рисунке 3.26. Остальные формы колебаний, определенные методом SSI-COV, показаны на рисунке 3.27.



а) Ansys

б) SSI-COV

Рисунок 3.26 — Сопоставление расчётной и определённой методом SSI-COV формы колебаний тона № 5



а) 1.83 Гц (траекторный)

б) 7.03 Гц

в) 10.23 Гц

г) 21.71 Гц

Рисунок 3.27 — Формы колебаний имитационной модели по методу SSI-COV

Устойчивость получаемых параметров оценивалась путем варьирования порядка стохастической модели. При это решение считалось стабильным, если ему предшествовали близкие по значению собственные частоты, декременты и формы

колебаний. Значения этих параметров накапливались и усреднялись по кластерам. Полученные данные отображены в виде стабилизационной диаграммы по методу SSI-COV (рисунок 3.28).

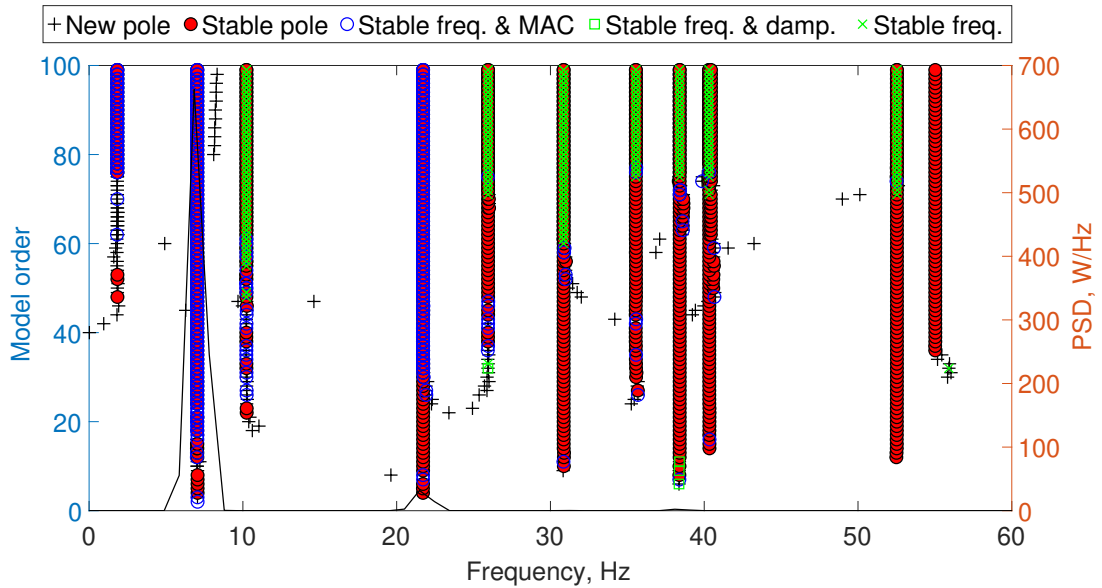


Рисунок 3.28 — Стабилизационная диаграмма по методу SSI-COV

Для количественной оценки соответствия определенных форм колебаний их расчетным аналогам, воспользуемся критерием модального соответствия. Численная оценка качества выделения первых одиннадцати форм колебаний методом SSI-COV приведена на рисунке 3.29. Из рисунка видно, что определенные формы колебаний практически совпадают с расчетными.

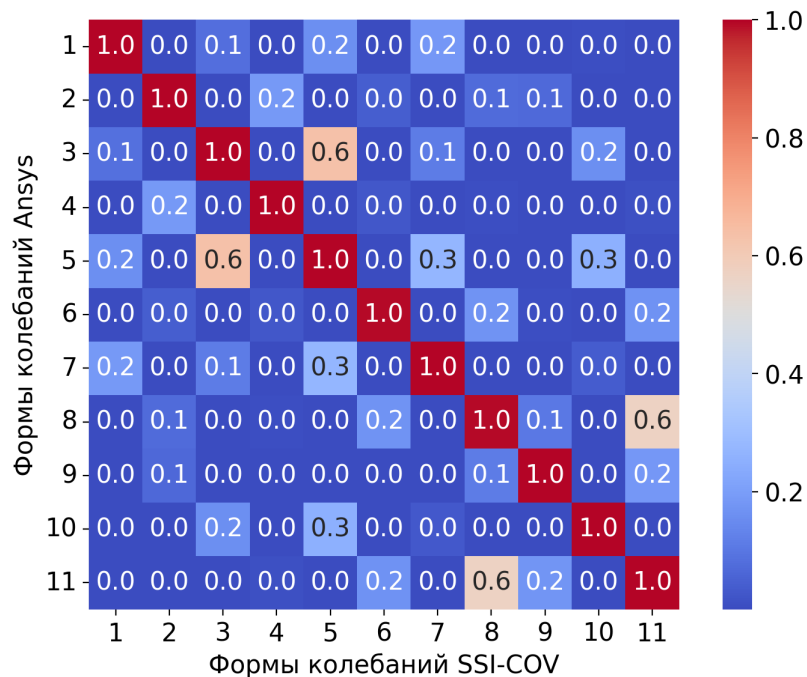


Рисунок 3.29 — Критерий модального соответствия по методу SSI-COV

3.4.3 Определение модальных характеристик по результатам акустических испытаний

Определим модальные характеристики рефлектора (рисунок 3.30) по результатам отклика на шумовое акустическое воздействие. Для записи откликов использовались акселерометры (рисунок 3.31), размещенные на поверхности рефлектора и рамы.

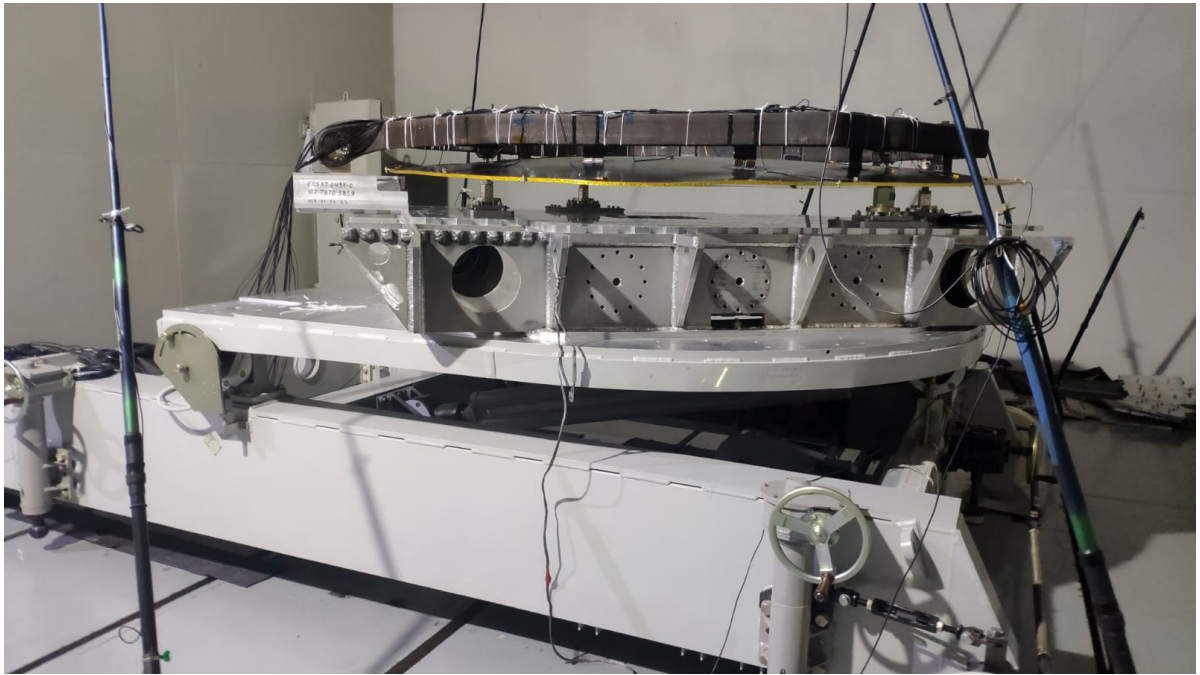


Рисунок 3.30 — Рефлектор в сборе с испытательной оснасткой

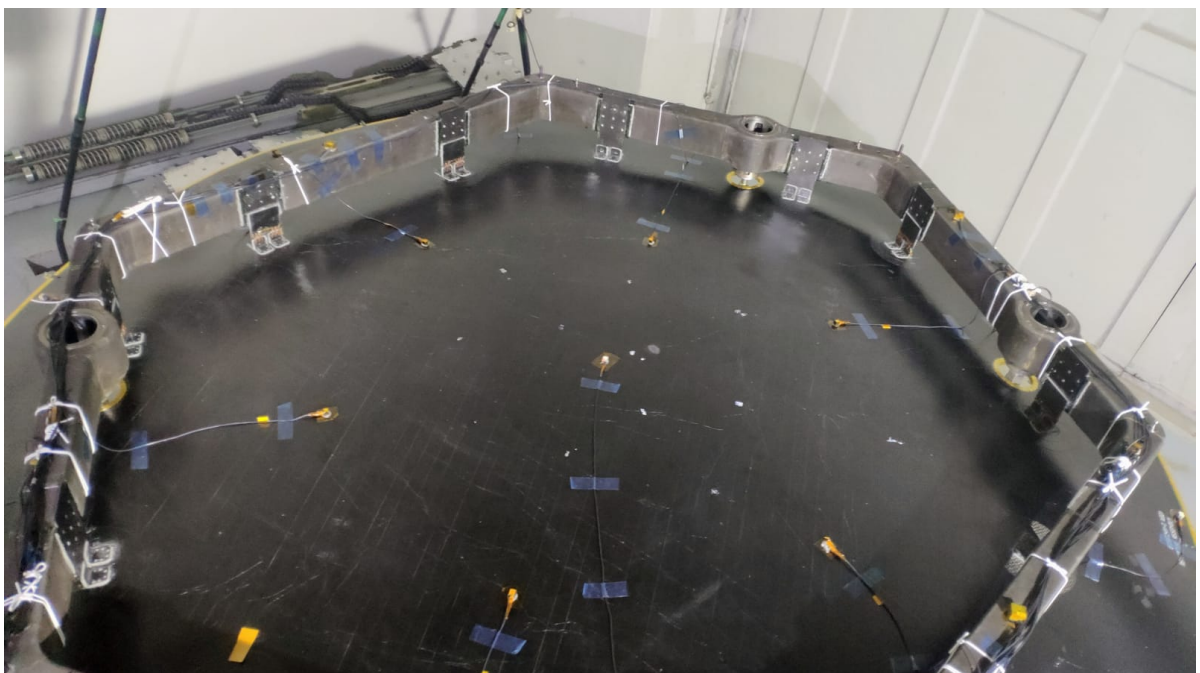


Рисунок 3.31 — Датчики ускорений, размещенные на поверхности рефлектора

Длительность шумового воздействия составила 53 секунды при частоте дискретизации сигналов равной 12800 Гц. Пример временных сигналов акселерометров вдоль направления Y показан на рисунке 3.32. Спектральная плотность мощности исследуемых сигналов приведена на рисунке 3.33.

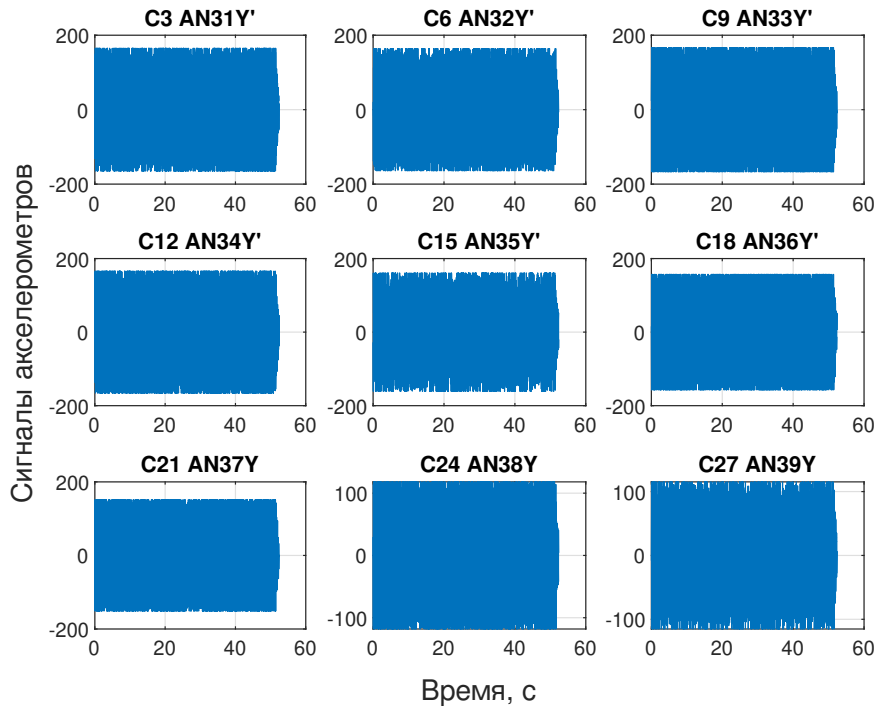


Рисунок 3.32 — Временные сигналы акселерометров вдоль направления Y

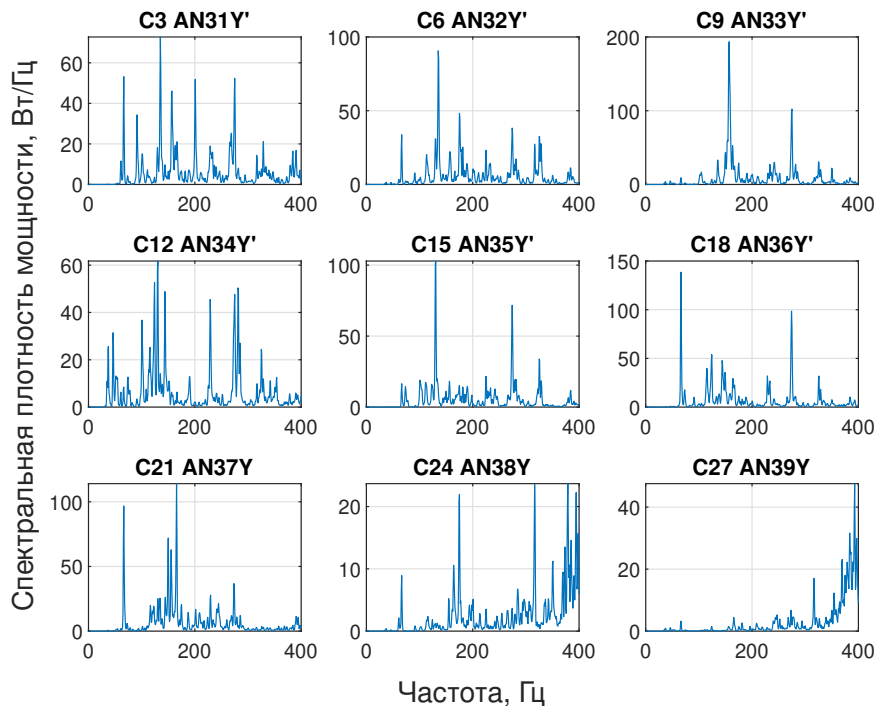


Рисунок 3.33 — Спектральная плотность мощности временных сигналов акселерометров вдоль направления Y

Обработка сигналов осуществлялась последовательно вдоль каждого из пространственных направлений тремя методами операционного модального анализа: SSI-COV, ERA и SSI-DD. При этом сигнал шумового воздействия не использовался. Частоты и логарифмические декременты колебаний, полученные посредством каждого из методов, сведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 — Результаты определения частот и логарифмических декрементов колебаний методами операционного модального анализа

Тон	Частота, Гц			Логарифмический декремент		
	SSI-COV	ERA	SSI-DD	SSI-COV	ERA	SSI-DD
1	66.052	65.962	66.403	0.054	0.042	0.045
2	91.287	90.910	91.843	0.030	0.052	0.042
3	102.540	—	—	0.056	—	—
4	114.770	—	—	0.063	—	—
5	122.370	—	—	0.094	—	—
6	127.850	—	—	0.049	—	—

Примеры форм колебаний, определенных методам SSI-COV, отображены на рисунке 3.34. Полученные формы колебаний сопоставлялись с расчетными — достигнуто удовлетворительное согласование.

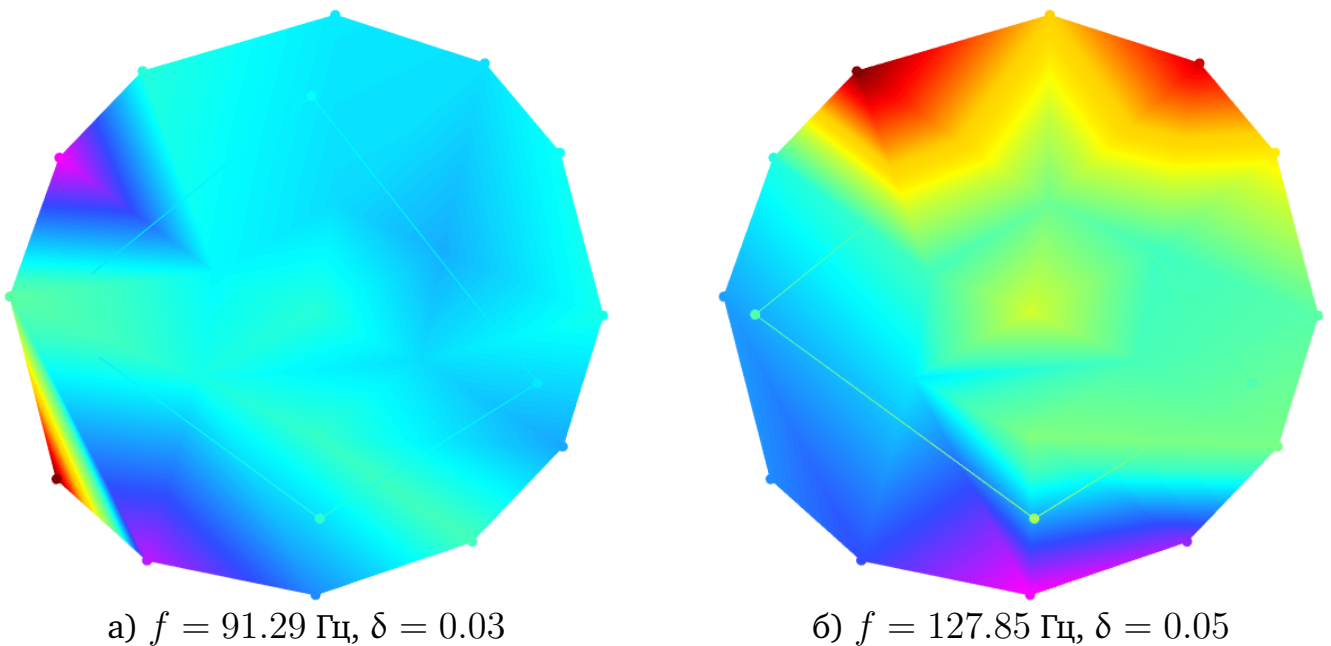


Рисунок 3.34 — Пример определенных форм колебаний рефлектора

На основе таблицы 3.2 можем заключить, что метод SSI-COV позволяет выделить наибольшее число тонов колебаний. Оценим сходимость модальных характеристик, определяемых этим методом: частот (таблица 3.3) и логарифмических декрементов колебаний (таблица 3.4), варьируя длительность временных сигналов от 5 до 50 секунд.

Таблица 3.3 — Сходимость частот собственных колебаний в зависимости от длины временного сегмента

Тон	Длительность сегмента, с					
	5	10	20	30	40	50
1	66.096	65.993	66.102	66.04	66.042	66.052
2	91.335	91.193	91.174	91.259	—	91.287
3	—	—	—	102.87	102.64	102.54
4	115.25	—	114.79	114.97	114.21	114.77
5	124.26	119.06	122.3	122.09	122.24	122.37
6	—	—	130.13	—	128.34	127.85

Таблица 3.4 — Сходимость логарифмического декремента колебаний в зависимости от длины временного сегмента

Тон	Длительность сегмента, с					
	5	10	20	30	40	50
1	0.060	0.041	0.052	0.052	0.051	0.054
2	0.027	0.027	0.025	0.027	—	0.030
3	—	—	—	0.060	0.057	0.056
4	0.081	—	0.070	0.073	0.068	0.063
5	0.086	0.090	0.098	0.101	0.096	0.094
6	—	—	0.022	—	0.043	0.049

Дополнительно оценим влияние частоты дискретизации на устойчивость численных значений модальных характеристик, определяемых методом SSI-COV.

Для этого осуществим децимацию временных откликов с интервалами, которые соответствует диапазону частот дискретизации от 12800 до 2560 Гц. Результаты по частотам и логарифмическим декрементам сведены в таблицах 3.5 и 3.6 соответственно.

Таблица 3.5 — Сходимость частот собственных колебаний в зависимости от частоты дискретизации

Тон	Частота дискретизации, Гц				
	12800	6400	4267	3200	2560
1	66.052	65.874	65.933	65.891	65.841
2	91.287	91.292	91.201	91.136	91.049
3	102.539	102.476	102.458	102.763	103.266
4	114.772	114.007	114.044	114.134	114.196
5	122.375	123.003	123.034	123.123	123.257
6	127.851	129.596	129.586	129.580	129.599

Таблица 3.6 — Сходимость логарифмического декремента колебаний в зависимости от частоты дискретизации

Тон	Частота дискретизации, Гц				
	12800	6400	4267	3200	2560
1	0.054	0.034	0.030	0.032	0.029
2	0.030	0.025	0.031	0.035	0.037
3	0.056	0.062	0.068	0.064	0.055
4	0.063	0.053	0.052	0.052	0.053
5	0.094	0.061	0.057	0.056	0.050
6	0.049	0.020	0.021	0.022	0.022

Можем видеть, что временного сегмента длительностью 20 секунд достаточно для стабилизации численных значений определяемых модальных характеристик. При децимации временных сигналов акселерометров оценка частоты

собственных колебаний меняется незначительно, в то время как логарифмический декремент колебаний изменяется в разы.

3.4.4 Оценка модальных параметров по результатам летных испытаний

Применим методы операционного модального анализа для получения оценок динамических параметров по результатам летных испытаний. Такие испытания предусматривают запись откликов на управляемое внешнее воздействие при полете летательного аппарата на разных скоростных режимах. Полученные после обработки и обобщения значения частот и логарифмических декрементов служат исходными данными для исследования аэроупругой устойчивости. Описанная методика формализуется в виде следующей последовательности шагов:

1. выход летательного аппарата на исследуемый скоростной режим;
2. задание генератором сигналов в систему управления;
3. передача системой управления воздействий отклоняемым поверхностям;
4. регистрация колебаний тензодатчиками и акселерометрами до полного завершения переходных процессов;
5. обобщение и обработка результатов измерений на различных скоростях полета.

Скоростные режимы и типы воздействий определяются программой летных испытаний. Среди воздействий различают:

1. развертку сигнала по частоте;
2. кратковременное гармоническое воздействие на исследуемой частоте;
3. беспокойную атмосферу.

Режим 1 служит для определения частот колебаний, характеризующихся максимальным откликом исследуемой конструкции. Дальнейшие исследования, как правило, связаны с определением диссипативных характеристик конструкции по выделенному тону колебаний (режим 2). Они осуществляются посредством многократного импульсного воздействия на разных скоростных режимах.

Выполним обработку летных данных, которые соответствуют двум испытаниям на режиме 2. На рисунке 3.35 приведены зависимости логарифмического декремента от скорости полета, полученные четырьмя методами операционного модального анализа. При расчете использовались только сигналы с акселерометров, сегментированные по методике 3.4.1 (ADA). Для оценки корректности обра-

ботки, проведено сопоставление результатов с данными летно-исследовательского института имени М. М. Громова (ЛИИ). Видим, что результирующие кривые располагаются в пределах доверительного интервала, заданного в данных ЛИИ своей нижней и верхней границами.

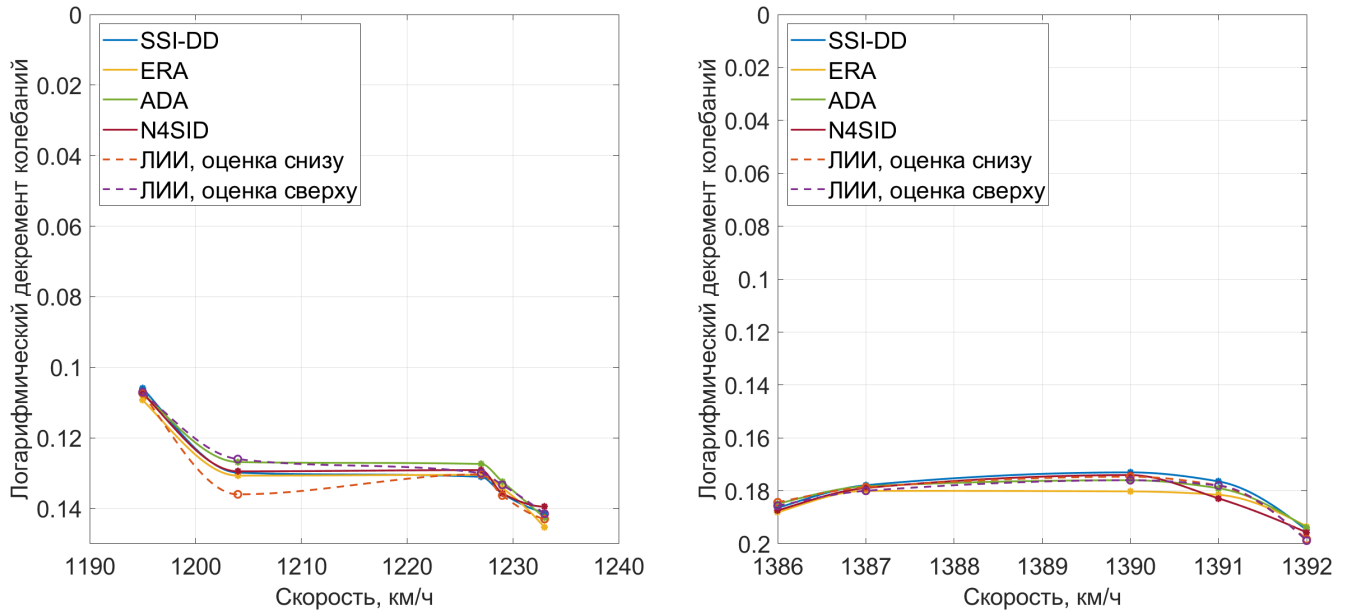


Рисунок 3.35 — Зависимости логарифмических декрементов от скорости полета

Выводы по главе 3

В настоящей части работы приведены детали нового и уже известных методов экспериментального модального анализа, а также получены следующие результаты:

1. Разработан комплекс программ, позволяющий оперативно обрабатывать и представлять результаты модальных испытаний. Создано программное обеспечение для определения производственно-конструктивных дефектов в конструкциях ЛА в ходе проведения классического модального анализа. Эффективность диагностирования дефектов продемонстрирована на примере авиационных и космических конструкций.
2. Предложено и протестировано представление сигналов виброускорений, устойчивое к наличию дрейфа в показаниях акселерометров. Проведено тестирование методов операционного модального анализа на примере имитационной модели ЛА. Исследована устойчивость и сходимость ре-

зультатов обработки акустических испытаний методами операционного модального анализа.

3. Кратко описана методика проведения летных исследований. На основе результатов летных испытаний, соответствующих случаю воздействия многократного импульсного воздействия, проведено сравнение результатов обработки несколькими методами операционного модального анализа с данными летно-исследовательского института имени М. М. Громова.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [157–173]. Разработанные программы зарегистрированы (приложение А) и переданы на коммерческой основе в ПАО «ОАК» в рамках лицензионных соглашений.

Глава 4 *Решение практических задач коррекции расчетных моделей*

В данной главе рассматривается применение разработанных методик для решения практических задач коррекции, освобождения и синтеза. Развиваются подходы, позволяющие моделировать податливость закреплений в условиях эксперимента.

4.1 *Коррекция расчетной модели динамически-подобной модели самолёта Ту-204*

Для апробации разработанной методики коррекции на примере реальной конструкции была выбрана динамически-подобная модель (ДПМ) самолёта Ту-204, выполненная по отсечно-балочной схеме (рисунок 4.1). Габаритные размеры: размах крыла 3172 мм, длина фюзеляжа 3462 мм (масштаб моделирования $1 \div 10$). Масса модели с датчиками и кабелями составила 50.5 кг.



Рисунок 4.1 — Общий вид ДПМ на упругой подвеске

Упругие характеристики фюзеляжа и крыла смоделированы лонжеронами, расположенными по оси жёсткости каждого агрегата. Топливо, коммерческая нагрузка, оборудование, носовая и основные опоры имитировались жёсткими сосредоточенными грузами. Аэродинамические обводы выполнены в виде лёгких

отсеков. Для проведения экспериментального модального анализа ДПМ была вывешена на упругой подвеске малой жесткости.

Исходя из типа схематизации ДПМ, первоначально было принято решение о создании балочной КЭ-модели. Распределение массы конструкции считалось дискретным, а распределение жесткостных характеристик — линейным по длине каждой из балок. При моделировании по представленной схеме особую сложность составило описание жесткостных характеристик узлов сочленения агрегатов планера. Так, по результатам расчета на собственные частоты и формы колебаний, было выяснено, что балочная расчетная модель некорректно описывает динамическое поведение реальной ДПМ, в связи с чем было принято решение отказаться от ее дальнейшего использования в пользу объемной конечно-элементной модели.

Создание трехмерной геометрической модели (рисунок 4.2) проводилось по натурной ДПМ. Геометрические модели крыльевых отсеков не создавались, так как они, в силу конструктивного исполнения ДПМ, являются точечными массами для упругого крыла — не вносят жесткостей и не соприкасаются между собой при малых амплитудах колебаний. В силу последнего обстоятельства отсеки и хвостовое оперение при создании КЭ-модели также моделировались дискретными массами с инерционными характеристиками, определенными по соответствующим геометрическим моделям (рисунок 4.3).

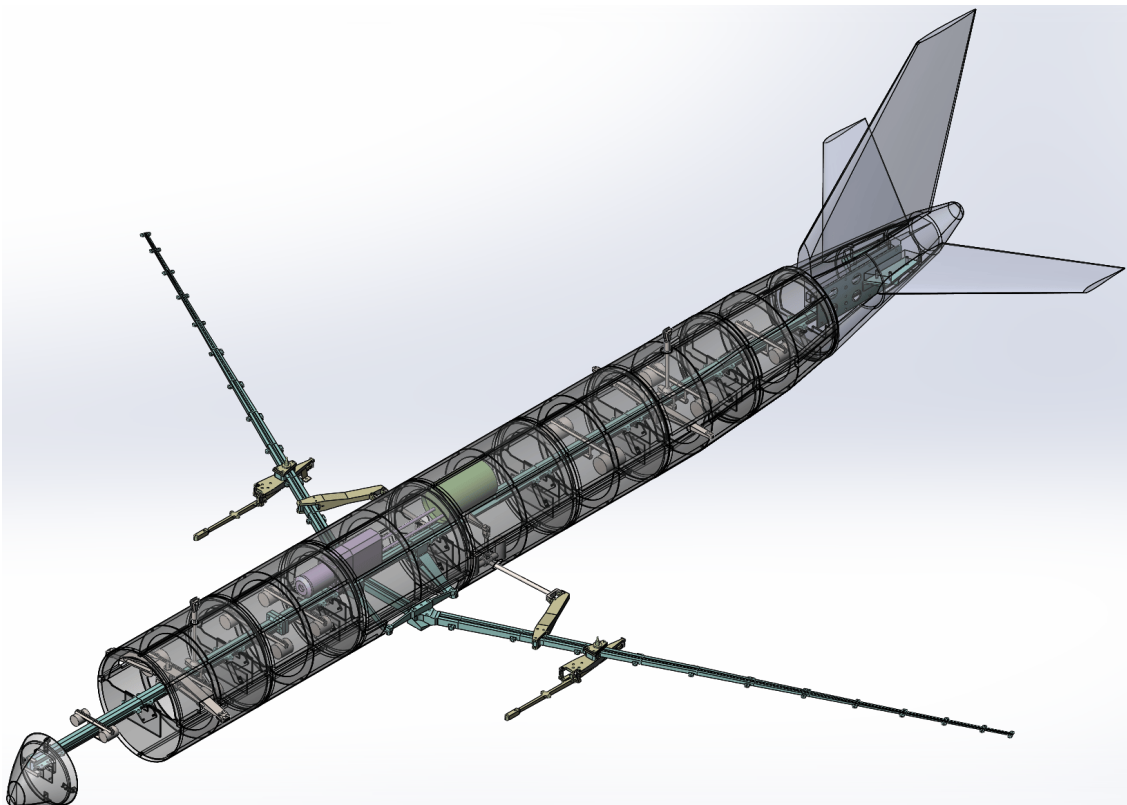


Рисунок 4.2 — Геометрическая модель ДПМ

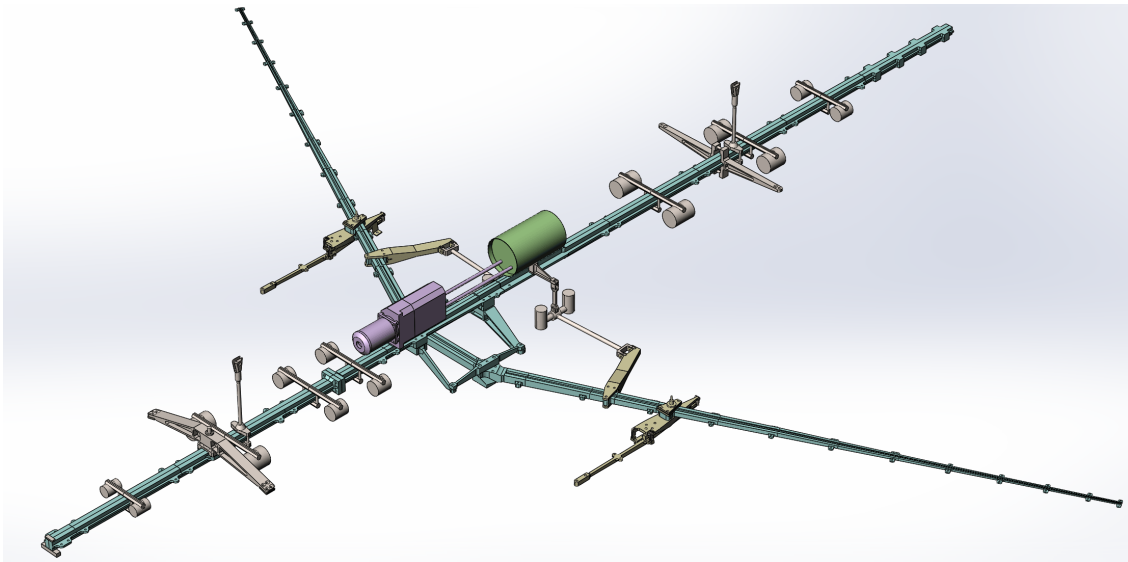


Рисунок 4.3 — Геометрическая модель ДПМ без фюзеляжных отсеков и хвостового оперения

Для достоверного определения инерционных характеристик исключенных из модели агрегатов их массы были скорректированы по результатам взвешивания. Аналогичная процедура была проведена для моделирования коммерческой загрузки дискретными массами. Отметим, что было достигнуто удовлетворительное согласование масс лонжерона крыла и фюзеляжа расчетной модели с данными технической документации ДПМ.

По выгруженной из Solidworks геометрической модели была создана КЭ-модель Ansys (рисунок 4.4) с числом степеней свободы — 752 тысячи. Стандартные инструменты графической оболочки конечно-элементного модуля Ansys Workbench предусматривают лишь возможность создания дискретных масс без учета центробежных моментов инерции. Поэтому был разработан скрипт на языке Ansys APDL для расширения существующего инструментария: моделирование дискретных масс по заданным матрицам инерции.

Расположение дискретных масс, моделирующих агрегаты планера и коммерческую загрузку, формировались посредством графического интерфейса Ansys Workbench и установления их именного соответствия с инерционными характеристиками (масса, положение и матрица инерции) в текстовом файле. В ходе расчета разработанным скриптом создаются дополнительные массовые элементы Matrix27, которые присоединяются жесткими невесомыми балками к узлам, принадлежащим выбранным областям.

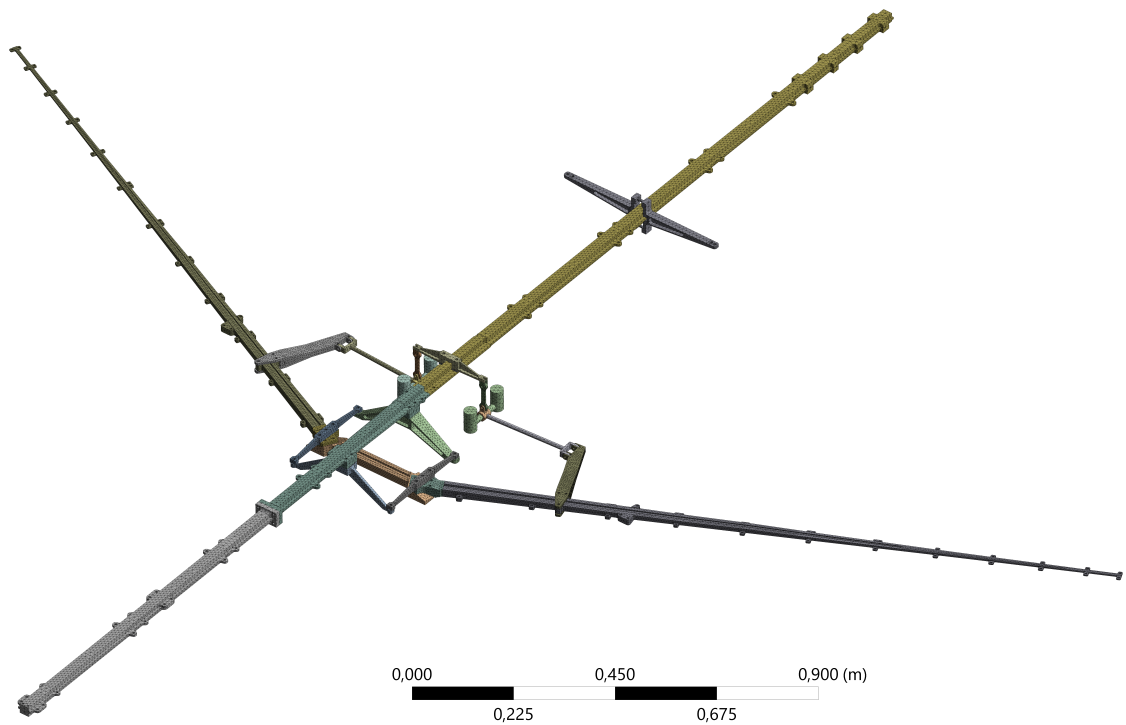


Рисунок 4.4 — Конечно-элементная модель ДПМ

Дискретизация конечно-элементной модели выбрана из условия корректного описания геометрических особенностей узлов сочленения и навески агрегатов планера.

Коррекция КЭ-модели проводилась по шести наборам экспериментально определенных частот собственных колебаний:

1. по 7 тону — симметричный изгиб крыла I тона (СИКр1);
2. с 7 по 8 тон — СИКр1, антисимметричный изгиб крыла I тона (АСИКр1);
3. с 7 по 9 тон — СИКр1, АСИКр1, горизонтальный изгиб фюзеляжа I тона (ГИФ1);
4. с 7 по 10 тон — СИКр1, АСИКр1, ГИФ1, вертикальный изгиб фюзеляжа I тона (ВИФ1);
5. с 7 по 10 и 12 тону — СИКр1, АСИКр1, ГИФ1, ВИФ1, симметричный изгиб крыла II тона (СИКр2);
6. с 7 по 10, 12 и 15 тонам — СИКр1, АСИКр1, ГИФ1, ВИФ1, СИКр2, вертикальный изгиб фюзеляжа II тона (ВИФ2).

Итерационный процесс коррекции по предложенному алгоритму считался завершенным при достижении целевых значений частот с точностью 0.0001 %. Результаты коррекции сведены в таблице [4.1](#).

Таблица 4.1 — Результаты коррекции ДПМ самолёта Ту-204

Тон	Частоты, Гц		Погрешность до и после коррекции, %						
	Эксперимент	Исходная модель	До	После					
				1	2	3	4	5	6
СИКр1	3.44	3.49	1.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
АСИКр1	4.87	4.96	1.7	-0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ГИФ1	5.44	5.73	5.3	4.7	4.7	0.0	0.0	0.0	0.0
ВИФ1	5.73	5.97	4.2	3.5	3.3	2.6	0.0	0.0	0.0
СИКр2	9.30	9.13	-1.8	-4.4	-3.2	-3.9	-4.4	0.0	0.0
ВИФ2	14.18	14.77	4.2	3.7	3.8	3.4	2.0	3.3	0.0

Распределения изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы КЭ-модели до и после каждой из коррекций приведены на рисунке 4.5.

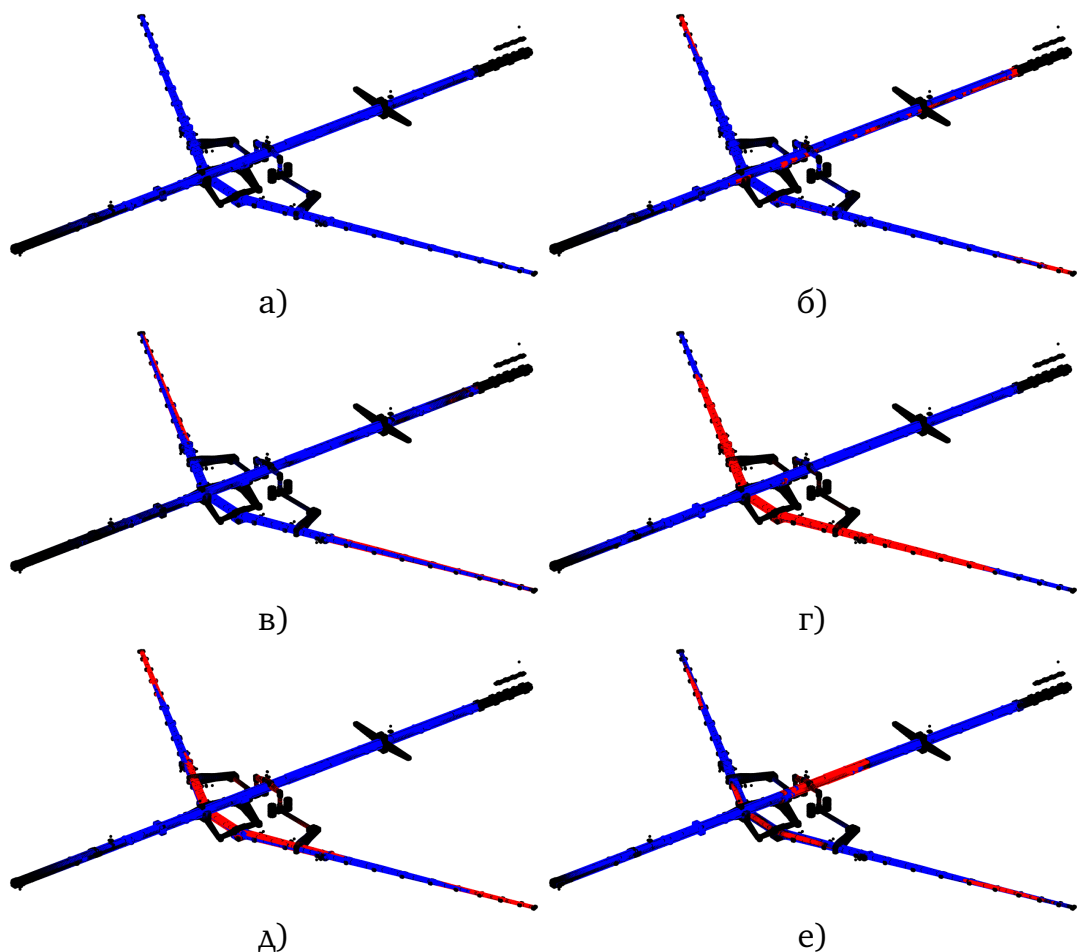


Рисунок 4.5 — Распределения изменений узловых жесткостей при коррекции по наборам целевых частот от 1 до 6 (а – е)

Синяя цветовая гамма на рисунке соответствует областям понижения исходной жесткости (корректирующая КЭ-модель имеет отрицательную жесткость в этих областях), а красная — областям повышения исходной жесткости. Черному цвету соответствуют области, жесткость которых в ходе коррекции осталась неизменной.

Заметим, что коррекция по одному тону (набор 1) приводит к снижению жесткости практически во всех областях (рисунок 4.5а) с измененной жесткостью. Добавление в набор других тонов приводит к появлению областей с положительным изменением жесткости в узлах (рисунки 4.5а – 4.5е). При этом для каждого набора распределение корректирующих жесткостей уникально.

Вследствие изменения упругости корректируемой модели происходит изменение частот и форм колебаний. Нормированные к массе формы колебаний до (серым цветом) и после коррекции (зеленым цветом) по шестому набору частот приведены на рисунке 4.6. Из рисунка видно, что формы колебаний до и после коррекции хорошо коррелируют между собой — разница между формами колебаний по МАС-критерию до и после коррекции составила: 0.02, 1.12, 1.74, 0.87, 0.18 и 4.09% соответственно.

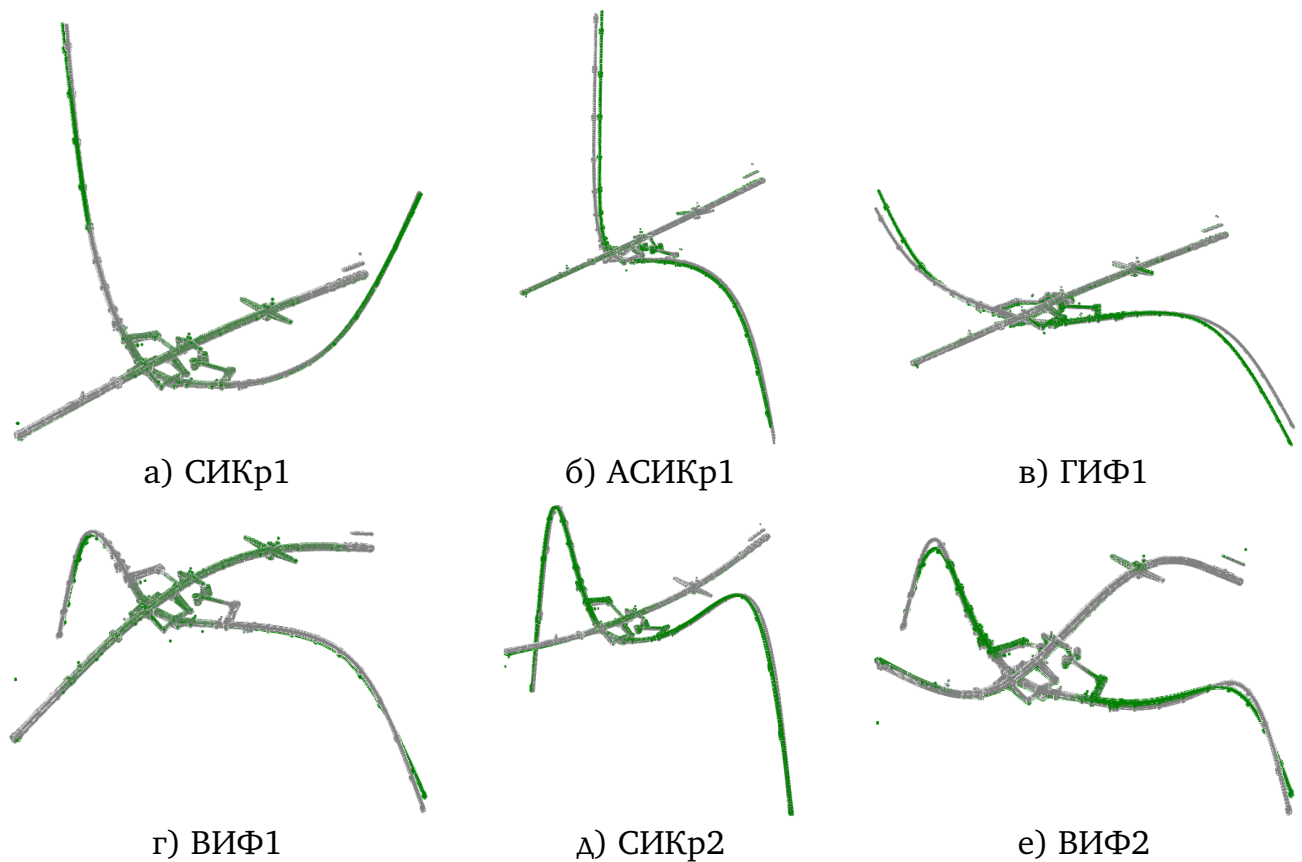


Рисунок 4.6 — Формы колебаний ДПМ до и после коррекции

4.2 Синтез имитационной модели каркаса зонтичной антенны космического аппарата

С целью апробации методики синтеза была выбрана имитационная модель каркаса зонтичной антенны (рисунок 4.7). Каркас выполнен из профилированных стальных труб и плоских стальных накладок. Конструктивно модель состоит из зонтичного каркаса и штанги, элементы скреплены болтами. Габаритные размеры показаны на рисунке 4.8. Масса каркаса 73 кг, штанги — 22 кг.



Рисунок 4.7 — Общий вид имитационной модели каркаса зонтичной антенны

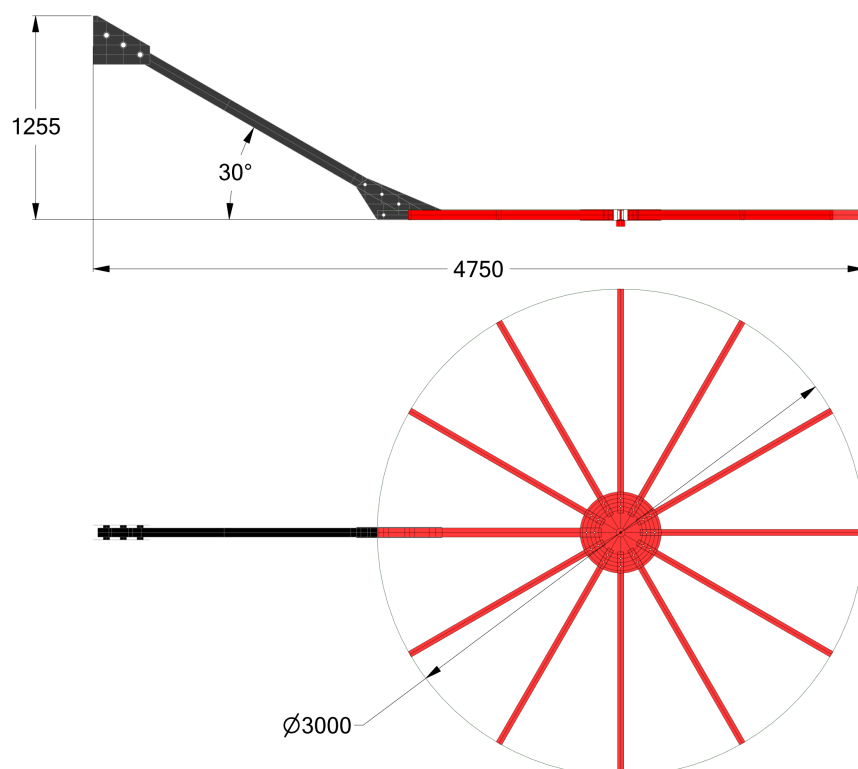


Рисунок 4.8 — Габаритные размеры модели каркаса зонтичной антенны

4.2.1 Модальные испытания

В соответствии с предлагаемой методикой синтеза конструкция разделена на две составные части (рисунок 4.9): зонтичный каркас и штангу, для каждой из которых проведен экспериментальный модальный анализ.



а) Зонтичный каркас



б) Штанга

Рисунок 4.9 — Составные части модели каркаса зонтичной антенны

Для управления возбуждением и измерением колебаний использовалась многоканальная система LMS SCADAS Lab (рисунок 4.10), включавшая в себя персональный компьютер со специализированным программным обеспечением LMS TestLab. Система измерений состояла из 19 блоков восьмиканальных измерительных усилителей стандарта IEPЕ (152 входных канала). Управление возбуждением колебаний осуществлялось шестиканальным генератором сигналов, позволяющим независимое варьирование амплитудой и фазой сигнала каждого канала. Возбуждение колебаний объекта испытаний осуществлялось электродинамическими силовозбудителями (ЭДСВ) 2060Е с усилителями мощности модели 2050Е09 производства компании TMS (рисунок 4.11). Максимальное номинальное усилие, развиваемое ЭДСВ — 267 Н. Измерение сил проводилось датчиками динамической силы модели 208С02 производства компании PCB Piezotronics. Возбуждающие силы прикладывались к элементам конструкции через стержни с малой изгибной жёсткостью. Виброускорения объекта испытаний измерялись в контрольных точках конструкции акселерометрами стандарта IEPЕ модели 333В30 производства компании PCB Piezotronics и модели AP2043-100 производства Глобалтест (рисунок 4.11). Акселерометры крепились на поверхность объекта с помощью восковой мастики.



Рисунок 4.10 — Система управления испытаниями SCADAS Lab

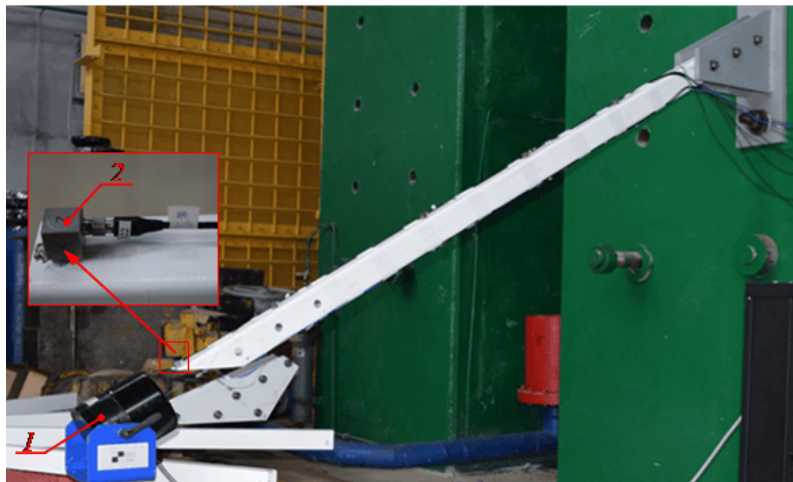


Рисунок 4.11 — Модальные испытания штанги: 1 — ЭДСВ, 2 — акселерометр

Расчётные исследования скорректированной по результатам испытаний математической модели показали, что узел крепления штанги к силовой колонне имеет недостаточную жёсткость в боковом направлении. Поэтому конструкция кронштейна была изменена (рисунок 4.12).

Установлено, что закрепление подконструкций на время испытаний в узлах стыковки приводит к потере информации о степенях свободы этих узлов в скорректированной расчётной модели. Поэтому зонтичный каркас был доработан для обеспечения его крепления в центральной части, а не за одну из спиц. На нижней поверхности каркаса установлена гайка с упорами для фиксации его на жёсткой опоре (рисунок 4.13). Собственная частота низшего тона колебаний составила 6.095 Гц.

Затем были проведены модальные испытания полностью собранной имитационной модели для проверки результатов коррекции, освобождения и сборки.



а) Исходный



б) Модернизированный

Рисунок 4.12 — Узел крепления имитационной модели к силовой колонне



Рисунок 4.13 — Узел крепления зонтичного каркаса

4.2.2 Разработка расчетной модели

Расчетная модель имитационной модели несколько раз уточнялась и претерпевала изменения в связи с отработкой методики синтеза и коррекции динамических свойств её составных частей. Прорабатывались такие аспекты, как моделирование узлов стыковки составных частей, моделирование контактного взаимодействия оболочечных элементов при переходе от исходной геометрии к срединным плоскостям. Кроме того, прорабатывались различные варианты крепления штанги к стене из-за невозможности привести динамические параметры модели к параметрам, определенным из эксперимента, что, в итоге, привело

к необходимости произвести оценку жесткости крепления штанги к стене. Методика оценки «жесткости заделки» описана далее в тексте настоящей работы. Кроме того, проводились исследования с целью определения влияния параметров конечно-элементной сетки на результаты коррекции и последующей виртуальной стыковки моделей составных частей. Каждый из полученных результатов также соотносился с результатами натурных экспериментов.

После проведенных исследований было принято решение отказаться от контактных элементов и моделировать контактные взаимодействия между срединными плоскостями оболочечными элементами.

Представленные в настоящей работе результаты по коррекции и стыковке получены по КЭ-модели каркаса зонтичной антенны с числом степеней свободы — 252375, из которых 57852 — штанга, 194523 — антенна. На рисунке 4.14 представлена сетка конечных элементов имитационной модели зонтичного каркаса антенны.

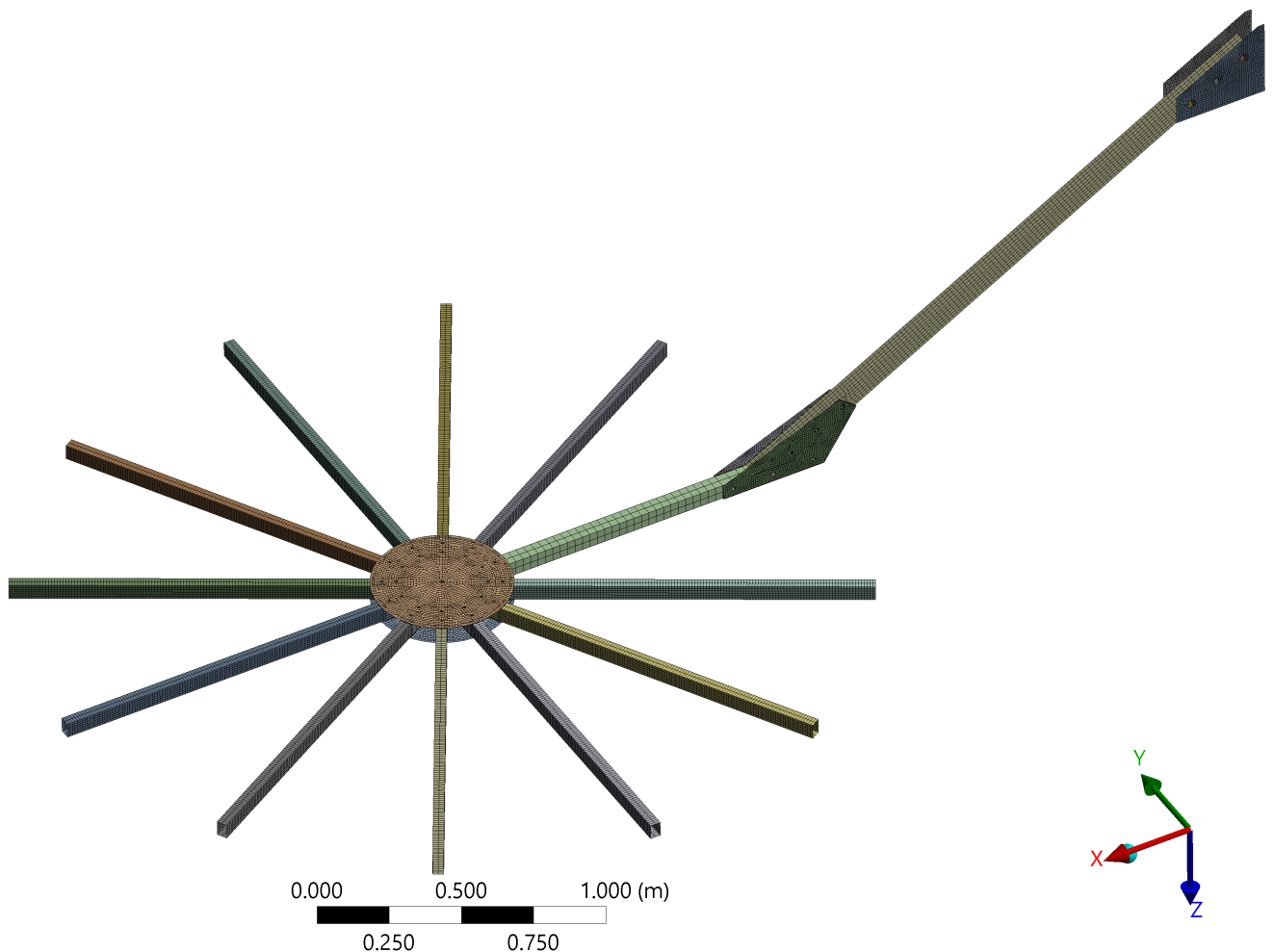


Рисунок 4.14 — КЭ-модель имитационной модели в Ansys

Идея оценочного расчета «жесткости заделки» основана на предположении, что математическая модель конструкции качественно описывает её статическую деформацию, а податливость закрепления вносит поворот конструкции как жесткого целого относительно точки крепления. Для приближенного определения «жесткости заделки» рассмотрим следующую расчетную схему (рисунок 4.15). Видится, что данная схема применима только для протяженных объектов типа штанги.

Приложим силу на конце балки, будем измерять перемещения в двух точках — A и B (рисунок 4.15). Представим перемещения точек A и B — Y_A, Y_B как сумму перемещений от поворота на угол α как жесткого целого и перемещения y_A, y_B абсолютно жестко заделанной конструкции под действием приложенной нагрузки. Перемещения Y_A, Y_B определяются из натурального эксперимента, а перемещения y_A, y_B — из виртуального, однако, из-за предполагаемого несоответствия математической модели по количественным показателям, для вывода формулы определения «жесткости заделки» будем использовать отношение перемещений, а не их абсолютные значения, предполагая, что математическая модель качественно описывает относительные перемещения конструкции при приложении статической нагрузки.

Положим, что перемещения малы, тогда можно записать следующее соотношение:

$$\frac{Y_A - l_A \sin \alpha}{Y_B - l_B \sin \alpha} = \frac{y_A}{y_B}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) можно получить выражение для угла:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{Y_A - Y_B \frac{y_A}{y_B}}{l_A - l_B \frac{y_A}{y_B}} \right). \quad (4.2)$$

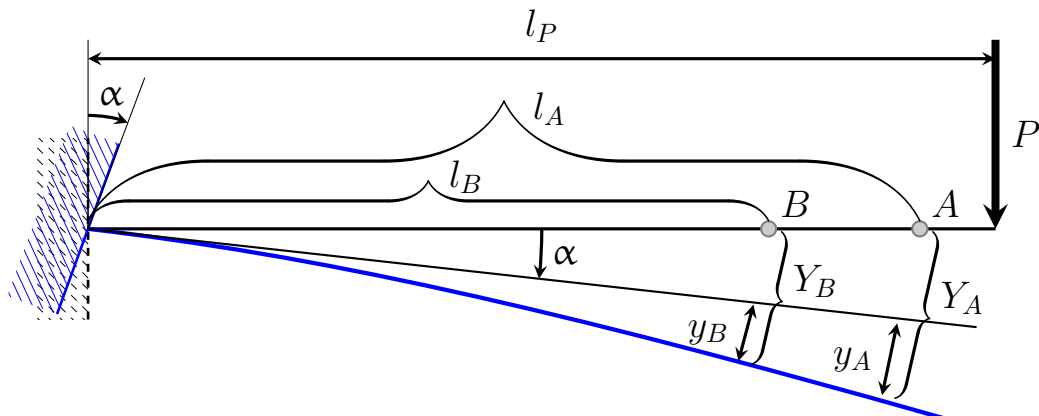


Рисунок 4.15 — Расчетная схема «жесткости заделки»

С помощью выражения для угла (4.2) можно рассчитать «жесткость заделки», зная расстояние до приложенной силы l_P , но в зависимости от принятой математической модели упругой заделки целесообразно выражать конкретные параметры. Примем модель «упругой заделки» в виде четырехугольной абсолютно жесткой невесомой пластины с четырьмя одинаковыми пружинами (рисунок 4.16), которая может поворачиваться только в горизонтальном и вертикальном направлениях. Такой шарнир реализуется запрещением всех перемещений центральной точки пластины – центра поворота и запрещением перемещений из плоскости всем остальным точкам пластины. Таким образом, пластина может только поворачиваться в двух плоскостях (при условии малости перемещений).

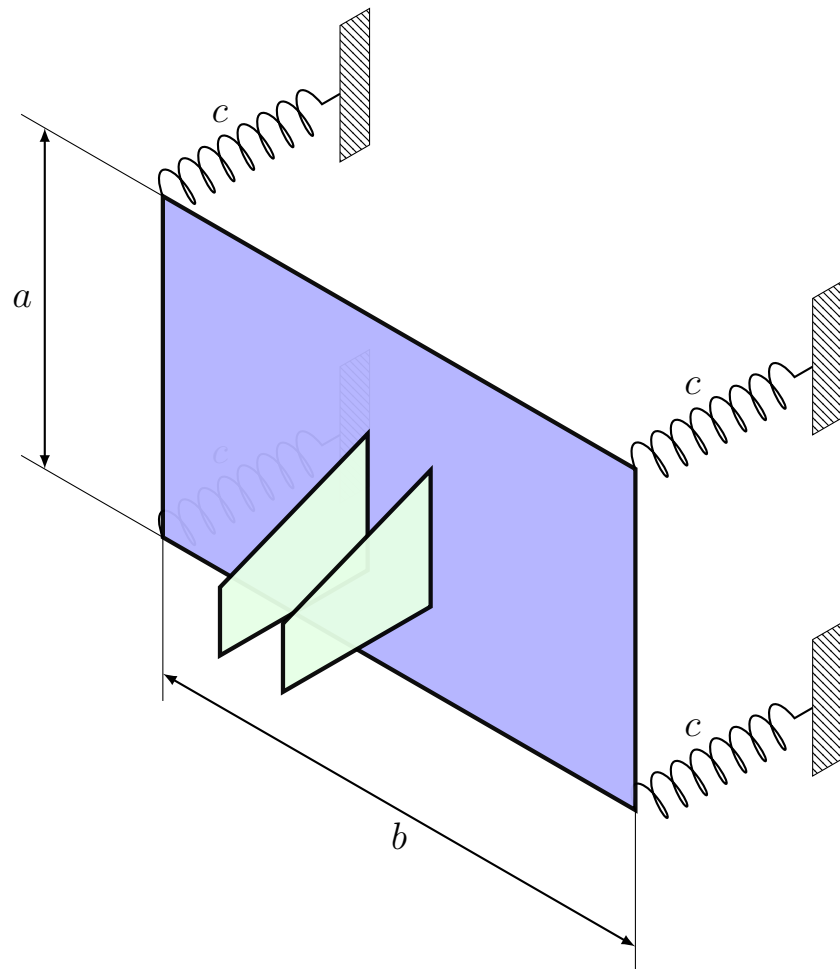


Рисунок 4.16 — Модель «упругой заделки» для штанги

Параметрами, которые подлежат определению для создания модели, являются жесткости пружин c и размеры пластины a и b . При этом необходимо проводить два эксперимента для расчета двух углов по горизонтали и вертикали по формуле (4.2). Пусть один размер, например b , задается расчетчиком из

соображений адекватности исследуемой конструкции. Соответствующая система уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} c \sin \alpha_1 a^2 = P_1 \ell_1, \\ c \sin \alpha_2 b^2 = P_2 \ell_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Для такой модели можно получить выражения для размера пластины и жесткости пружин:

$$a = b \sqrt{\frac{P_1 \ell_1 \sin \alpha_2}{P_2 \ell_2 \sin \alpha_1}}, \quad c = \frac{P_1 \ell_1}{a^2 \sin \alpha_1}. \quad (4.4)$$

Для определения параметров жесткости крепления штанги к стене проведены дополнительные статические испытания. Нагрузка прикладывалась в концевом сечении штанги вдоль осей Y и Z соответственно. Регистрация перемещений велась в двух сечениях по длине штанги в соответствии со схемой 4.16. Результаты экспериментов использованы для определения параметров заделки по формулам (4.4). По рассчитанным данным конечно-элементная модель штанги дополнена моделью «упругой заделки».

В таблице 4.2 сведены первые семь частот собственных колебаний, рассчитанных по модели с «нормальной (идеальной) заделкой», с «упругой заделкой» и определенные экспериментально. Из таблицы видно, что учет упругости закрепления позволил снизить частоты, но они всё равно остались выше определенных экспериментально, что не противоречит теории.

Таблица 4.2 — Частоты собственных колебаний колебаний штанги

№ тона	Частоты, Гц		
	«Идеальная заделка»	«Упругая заделка»	Эксперимент
1	10.472	9.7355	9.451
2	13.164	12.868	12.54
3	84.632	71.322	71.65
4	107.51	100.45	103.4
5	171.94	155.00	171.3
6	235.04	182.30	187.6
7	305.87	259.05	285.2

4.2.3 Формирование глобальной модели

Конечно-элементные модели составных частей имитационной модели: штанга и зонтичный каркас, были скорректированы по методике, описанной в подразделе 2.1. В качестве исходных данных для коррекции использовались результаты модальных испытаний. Уточненная модель штанги (рисунок 4.17а) наряду с распределением изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням представлена на рисунке 4.17б.

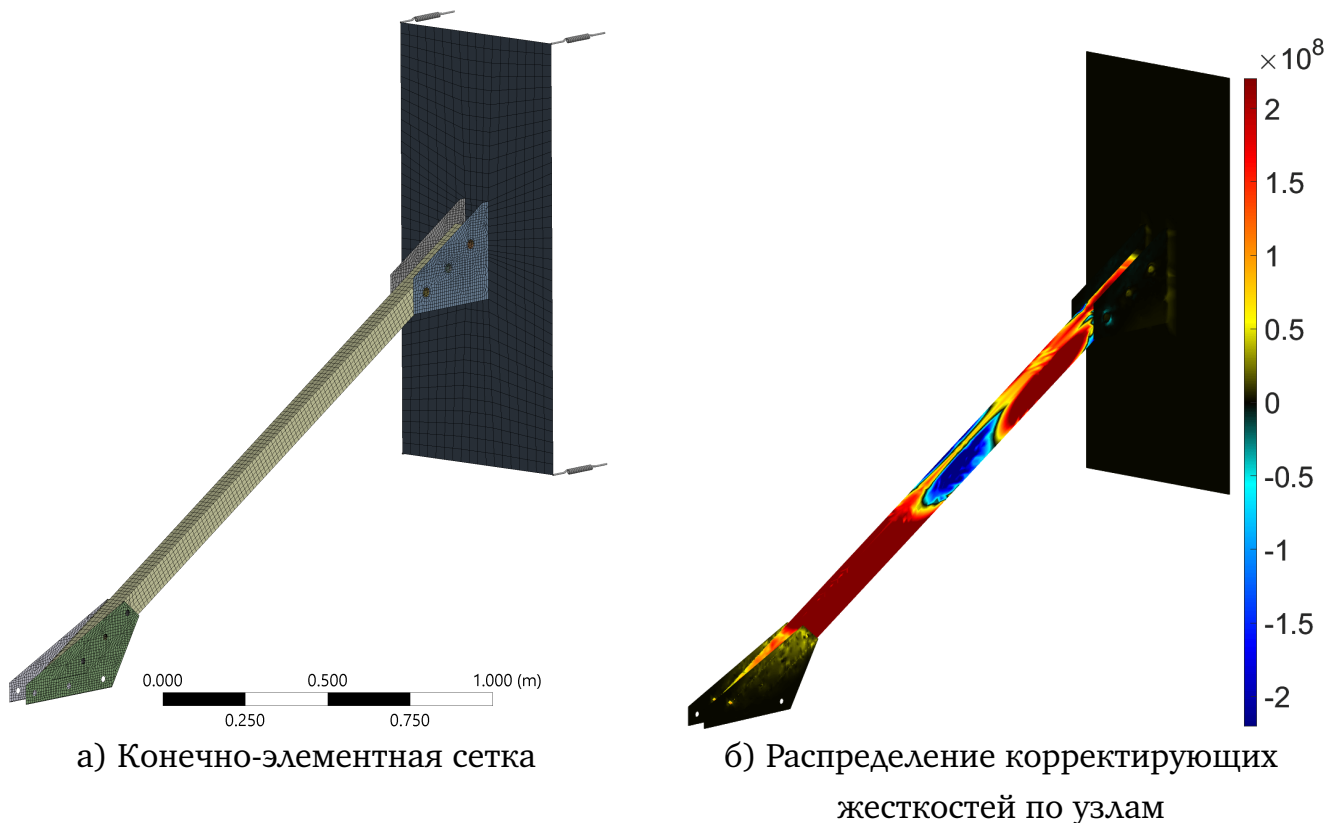


Рисунок 4.17 — КЭ-модель штанги с «упругой заделкой»

Скорректированная модель зонтичного каркаса освобождена от закрепления по методике, представленной в подразделе 2.3. Формирование глобальной модели конструкции было проведено путем ассемблирования КЭ-моделей подконструкций по степеням свободы узлов стыковки по принципу формирования глобальной матрицы жесткости в методу конечных элементов.

Также, используя соотношения (2.29) и (2.30), была проведена коррекция редуцированных моделей штанги и зонтичного каркаса с последующим ассемблированием. Результаты сведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 — Результаты коррекции, освобождения и сборки составных частей имитационной модели

№	Частоты собственных колебаний полной конструкции, Гц (погрешность относительно эксперимента)					
	Эксперимент	До коррекции		После коррекции		
		«Идеальная заделка»	«Упругая заделка»	Коррекция штанги	Коррекция штанги и антенны	Коррекция редуцированной штанги
1	1.726	1.852 (7.27 %)	1.758 (1.84 %)	1.738 (0.70 %)	1.738 (0.70 %)	1.758 (0.66 %)
2	2.248	2.383 (6.01 %)	2.335 (3.88 %)	2.241 (0.33 %)	2.239 (0.40 %)	2.335 (2.76 %)
3	5.215	5.430 (4.12 %)	5.382 (3.19 %)	5.280 (1.24 %)	5.280 (1.24 %)	5.382 (2.97 %)
4	9.253	9.708 (4.92 %)	9.450 (2.13 %)	9.364 (1.18 %)	9.364 (1.18 %)	9.450 (1.78 %)
5	11.98	12.44 (3.83 %)	12.25 (2.25 %)	12.32 (2.73 %)	12.22 (1.95 %)	12.25 (1.95 %)
6	26.79	27.76 (3.64 %)	27.74 (3.55 %)	27.76 (3.48 %)	27.74 (3.41 %)	27.74 (3.45 %)
7	27.22	28.25 (3.78 %)	28.25 (3.78 %)	28.25 (3.64 %)	28.25 (3.64 %)	28.25 (3.64 %)

Из таблицы 4.3 видно, что коррекция моделей составных частей приводит к удовлетворительному совпадению частот асSEMBлированной модели с соответствующими экспериментальными частотами. Важно отметить, что при коррекции моделей составных частей целевые значения частот были достигнуты с высокой точностью. Кроме того, при коррекции и создании матрицы демпфирования по результатам эксперимента методикой (2.27) и по формулам (2.30), (2.43) амплитудно-частотные характеристики в окрестности резонансных частот практически совпадают.

На рисунке 4.18a показаны изменения МАС-критерия до и после коррекции четырех низших частот, а на рисунке 4.18б — значения критерия модального соответствия между исходной и скорректированной моделью. Из рисунков видно, что в ходе коррекции происходит изменение форм собственных колебаний. Наиболее значительно изменилась вторая форма собственных колебаний, но величина этих изменений не превышает 0.14 % в метрике МАС-критерия.

Можно видеть, что наибольшее влияние на частоты асSEMBлированной модели оказывает коррекция штанги, в то время как коррекция зонтичного каркаса приводит лишь к небольшому снижению результирующих погрешностей.

4.3 Коррекция расчетной модели отъемной части крыла изделия С-70

В настоящем подразделе рассматривается применение методики коррекции к композитной отъемной части крыла (ОЧК) изделия С-70.

4.3.1 Экспериментальный модальный анализ

Для проведения экспериментального модального анализа консоль крыла была вывешена вертикально на авиационных амортизационных шнурах посредством траверсы (рисунок 4.19). Шнуры продевались через установленные в проушины узлов крепления технологические такелажные приспособления. Испытания выполнялись в соответствии методическими рекомендациями [121].



Рисунок 4.19 — Общий вид ОЧК изделия С-70 на упругой подвеске

4.3.2 Построение конечно-элементной модели

В соответствии с исходными данными, переданными специалистами конструкторского бюро, конструктивно-силовой набор крыла представлялся невесомыми балочными и оболочечными элементами. Последние имеют характеристики обшивки и работают только на растяжение-сжатие, в то время как балочные элементы, лежащие в плоскости симметрии крыла, работают только на изгиб. При этом инерционные характеристик крыла воспроизводятся дискретными массами, имеющими эксцентриситет.

Для формирования геометрической модели использовались таблицы с координатами вершин поверхностей и концевых точек балок. Толщины элементов обшивки задавались дискретно по вершинам, образующим граничные поверхности. Распределение изгибных жесткостей внутри каждой балки описывалось полиномом третьей степени, заданным в равноотстоящих узлах.

По результатам построения геометрической модели были замечено, что между некоторыми панельными элементами имеются существенные зазоры по высоте — нарушена непрерывность геометрического контура. Для обеспечения совместности перемещений элементов составлялись пары контактирующих ребер, которые примыкают друг к другу плоскости симметрии крыла. Кроме того, балочный каркас был спроецирован на обшивку для формирования линий контактного взаимодействия (рисунок 4.20). Массы размещались на ближайших точках балочного каркаса. При этом компоненты тензора инерции пересчитывались пропорционально относительному удалению массы от точки размещения.

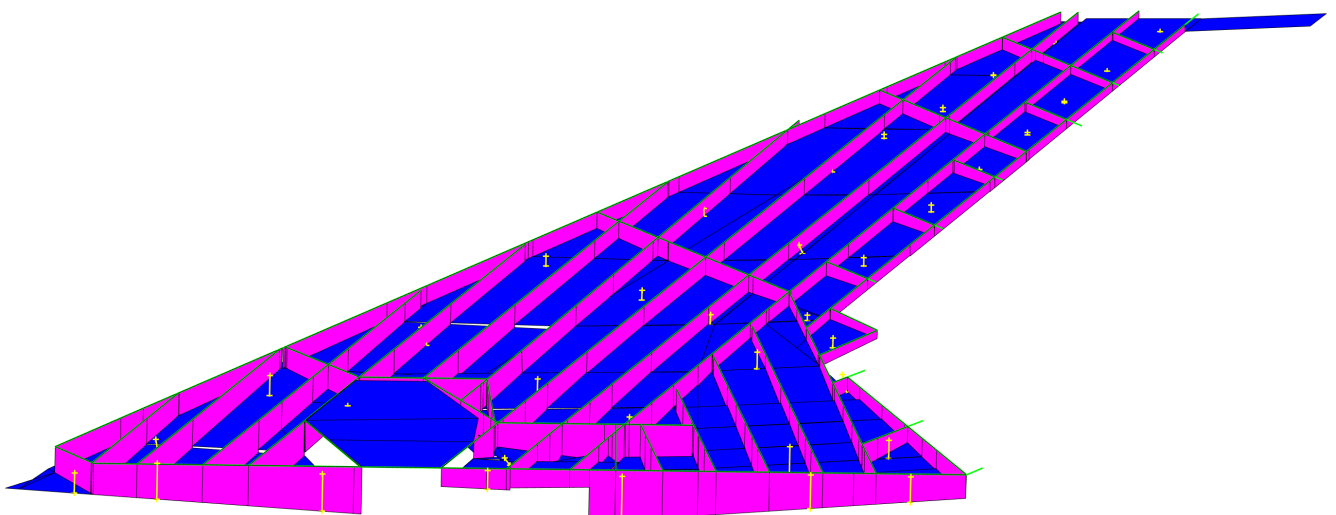


Рисунок 4.20 — Проецирование балочного каркаса и масс на элементы силового набора ОЧК

Посредством системы макросов Ansys Mechanical APDL была создана программа, позволяющая автоматически формировать конечно-элементную модель при изменении исходных данных. Геометрические модели балочного каркаса и обшивки приведены на рисунках 4.21 и 4.22 соответственно. Число степеней свободы в модели составило 19710. Для сшивки панелей как между собой, так и с балочным каркасом, использовались абсолютно жесткие балки. Результирующая конечно-элементная модель приведена на рисунке 4.23. Упругие формы собственных колебаний срединной поверхности модели приведены на рисунке 4.24. Здесь и далее нумерация тонов колебаний начинается с первого тона упругих колебаний.

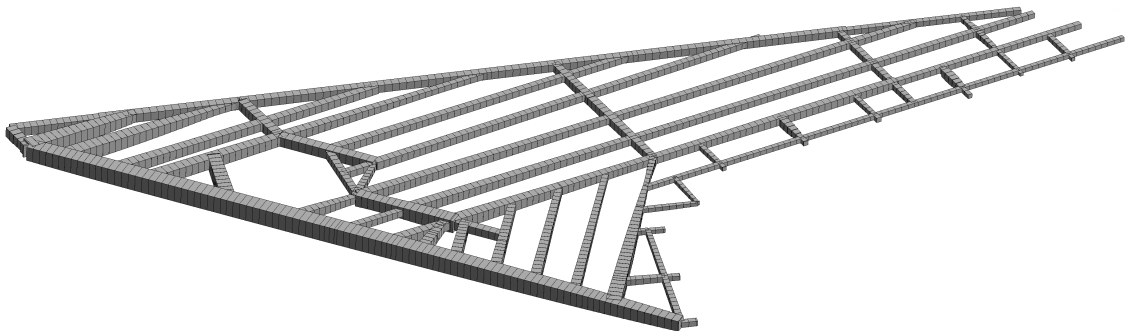


Рисунок 4.21 — Геометрическая модель балочного каркаса

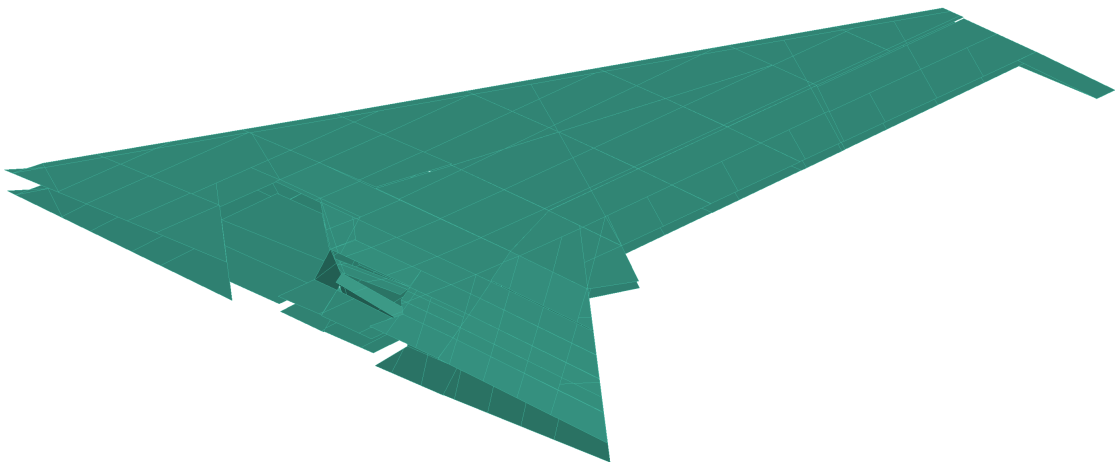


Рисунок 4.22 — Геометрическая модель обшивки

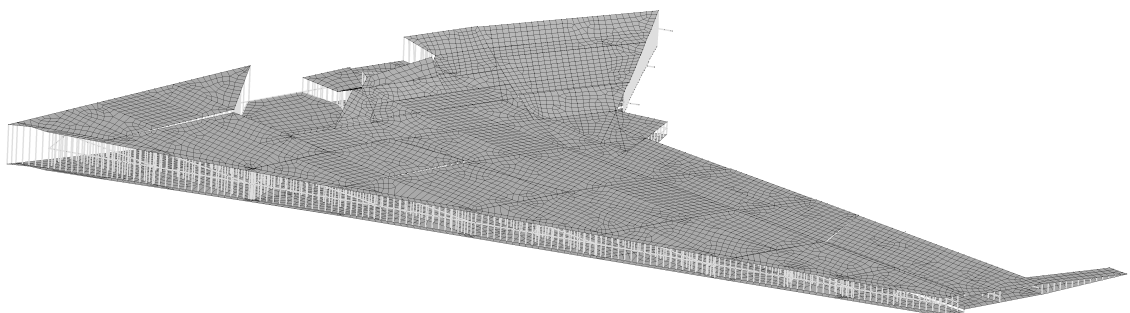


Рисунок 4.23 — Конечно-элементная модель ОЧК

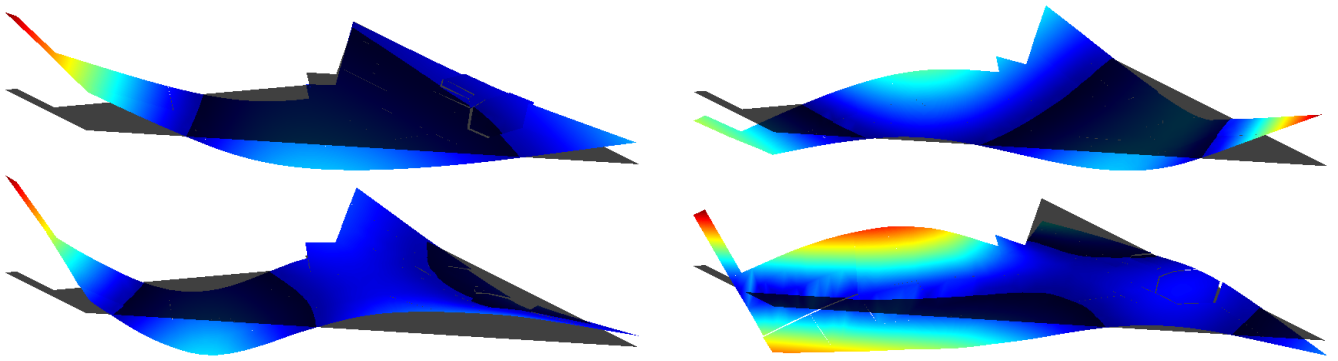


Рисунок 4.24 — Пример упругих форм колебаний исходной КЭ-модели ОЧК

4.3.3 Коррекция конечно-элементной модели

Коррекция КЭ-модели проводилась по пяти наборам экспериментально определенных частот. Каждый последующий набор дополнял предыдущий одним тоном колебаний. Так, сначала была проведена коррекция только по изгибу ОЧК I тона, а затем еще и по изгибу ОЧК II тона. В конечном итоге была осуществлена одновременная коррекция 5 тонов колебаний (таблица 4.5).

Таблица 4.5 — Результаты коррекции ОЧК

Тон	Приведенная частота		Погрешность до и после коррекции, %					
	Эксперимент	Исходная модель	До	После				
				1	2	3	4	5
1	1.00	1.51	50.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2.28	3.18	39.5	-7.4	0.0	0.0	0.0	0.0
3	3.37	4.13	22.6	-18.6	-13.8	0.0	0.0	0.0
4	3.95	4.82	21.8	-19.1	-17.8	-8.2	0.0	0.0
5	4.87	6.15	26.2	-16.2	-21.8	-2.6	-4.4	0.0

Распределения изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы КЭ-модели до и после коррекции по первому тону и пяти тонам колебаний приведены на рисунках 4.25а и 4.25б соответственно. Необходимо отметить, что изменения узловых жесткостей при коррекции по пяти тонам посчитаны относительно жесткостей, полученных в результате коррекции по первому тону. Синяя цветовая гамма на рисунках соответствует областям понижения исходной жесткости, а красная — областям повышения исходной жесткости. Черному цвету

соответствуют области, жесткость которых в ходе коррекции осталась неизменной.

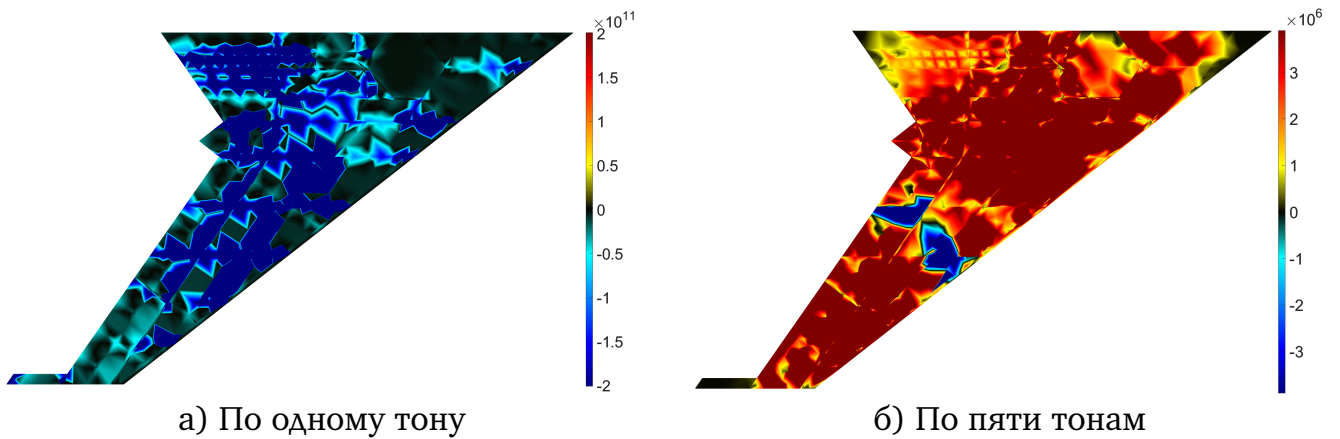


Рисунок 4.25 — Распределения изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы КЭ-модели до и после коррекции

Вследствие изменения упругости корректируемой модели происходит изменение частот и форм колебаний. Нормированные к массе формы колебаний срединной поверхности модели до (черным цветом) и после коррекции (красным цветом) по пяти частотам собственных колебаний приведены на рисунках 4.26а – 4.26д.

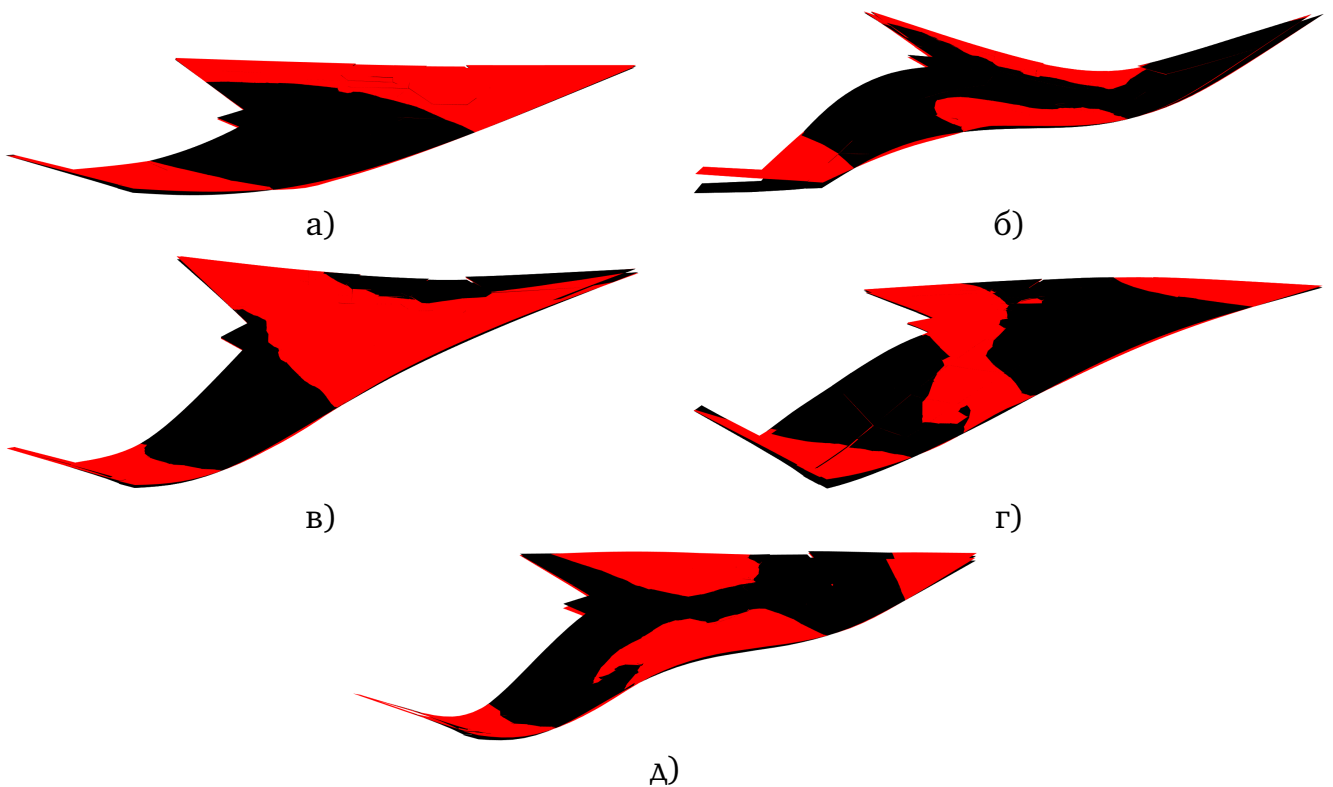


Рисунок 4.26 — Сопоставление первых пяти упругих форм колебаний ОЧК до и после коррекции (а – д)

Таблица соответствия форм колебаний до и после коррекции по критерию модального соответствия приведена на рисунке 4.27. Из рисунка видно, что формы колебаний до и после коррекции удовлетворительно коррелируют между собой.

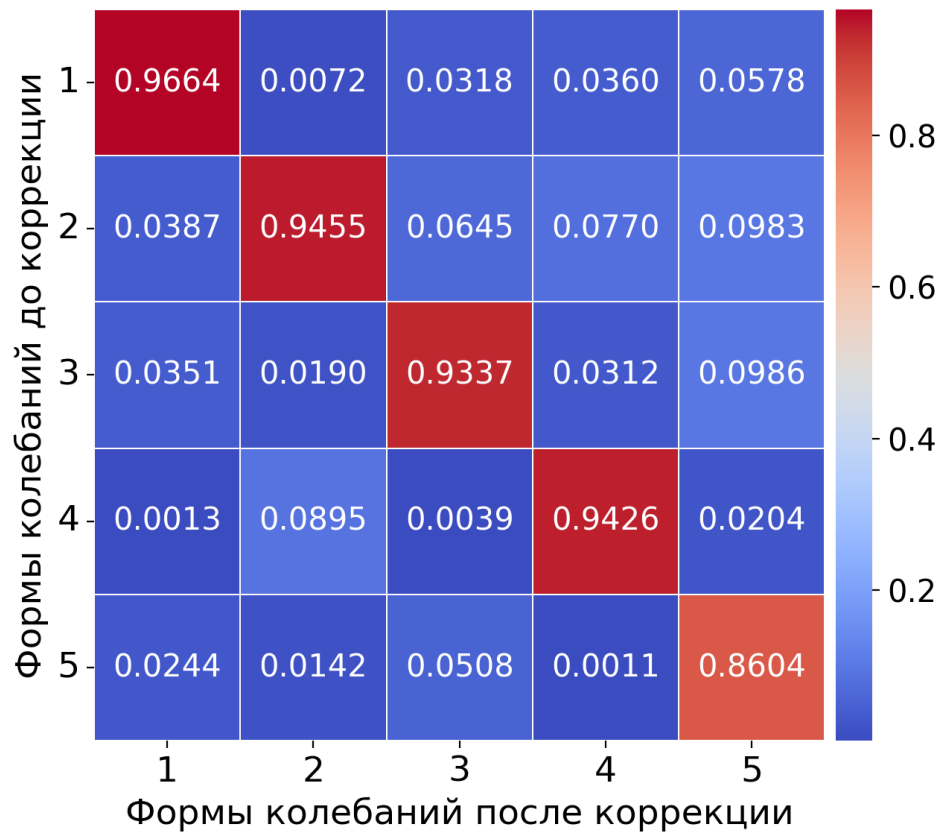


Рисунок 4.27 — Таблица соответствия форм колебаний до и после коррекции

4.4 Коррекция расчетной модели гирдера для модульных секций накопителя ЦКП «СКИФ»

Центр коллективного пользования «Сибирский кольцевой источник фотонов» (ЦКП «СКИФ») можно условно представить в виде инжекционной части, состоящей из бустерного синхротрона и линейного ускорителя, и накопительного кольца. В первой части происходит создание электронного пучка, обладающего требуемой энергией, который затем преобразуется и накапливается в виде синхротронного излучения в накопительной части. Ключевым требованием к последней является обеспечение максимальной продолжительности жизни пучка и сохранение его интенсивности. Среди прочего, это достигается за счет прецизионного выставления многочисленного электрофизического оборудования на специальных подставках, именуемых гирдерами. К посадочным поверхностям последних предъявляются высокие требования по точности размещения и регулирования.

Более того, во избежание возникновения резонансов, приводящих к потере качества пучка, собственные частоты гирдера должны быть отстроены от парциальных частот оборудования и сейсмических колебаний. Решение этой задачи реализуется в три этапа: проектирование, производство и экспериментальная отработка гирдера. Для обоснования и проработки конструкторских решений на первом этапе использовался метод конечных элементов.

В соответствии с конструкторской документацией была построена геометрическая модель гирдера накопительного кольца (рисунок 4.28) длиной 3800 мм (G3800). Масса гирдера составила 2166 кг.

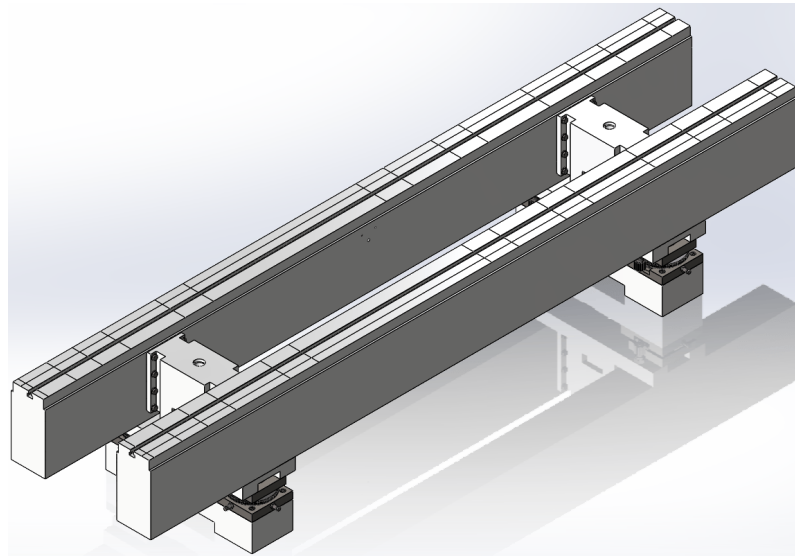


Рисунок 4.28 — Геометрическая модель гирдера

Конструктивное исполнение регулируемых опор гирдера раскрыто на рисунках 4.29 и 4.30. Особо отметим, что низшие частоты собственных колебаний гирдера в значительной степени обусловлены динамической жесткостью опор.

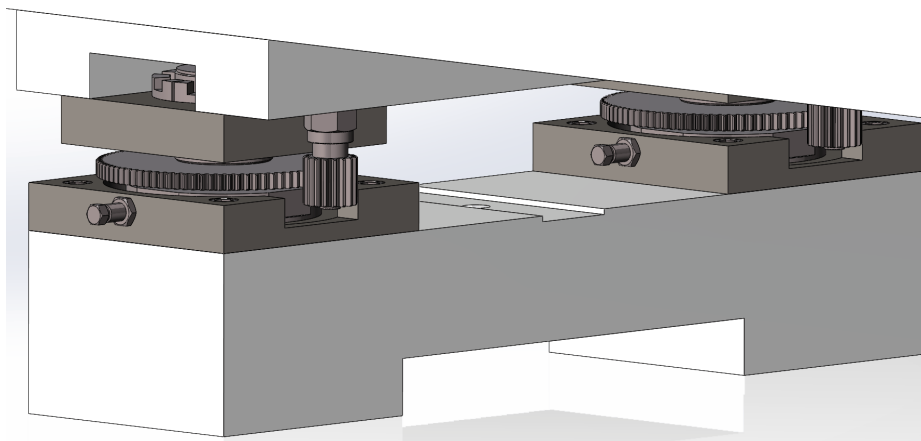


Рисунок 4.29 — Регулируемые опоры гирдера

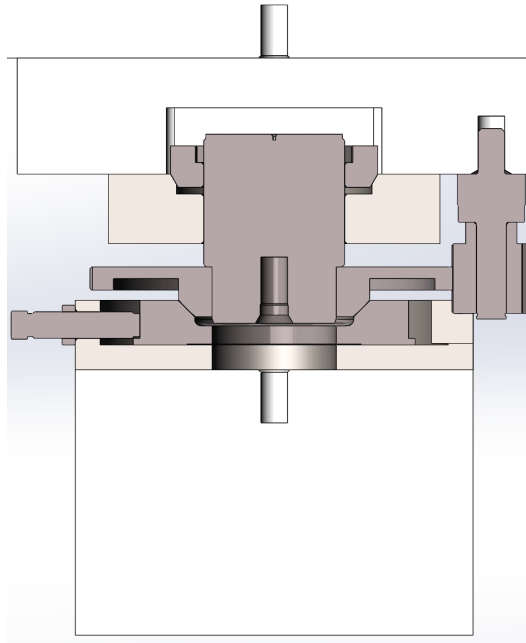


Рисунок 4.30 — Сечение регулируемой опоры гирдера

Для определения совместного отклика модульной секции магниты размещались на поверхности гирдера согласно рабочей документации института ядерной физики имени Г. И. Будкера СО РАН (рисунок 4.31).

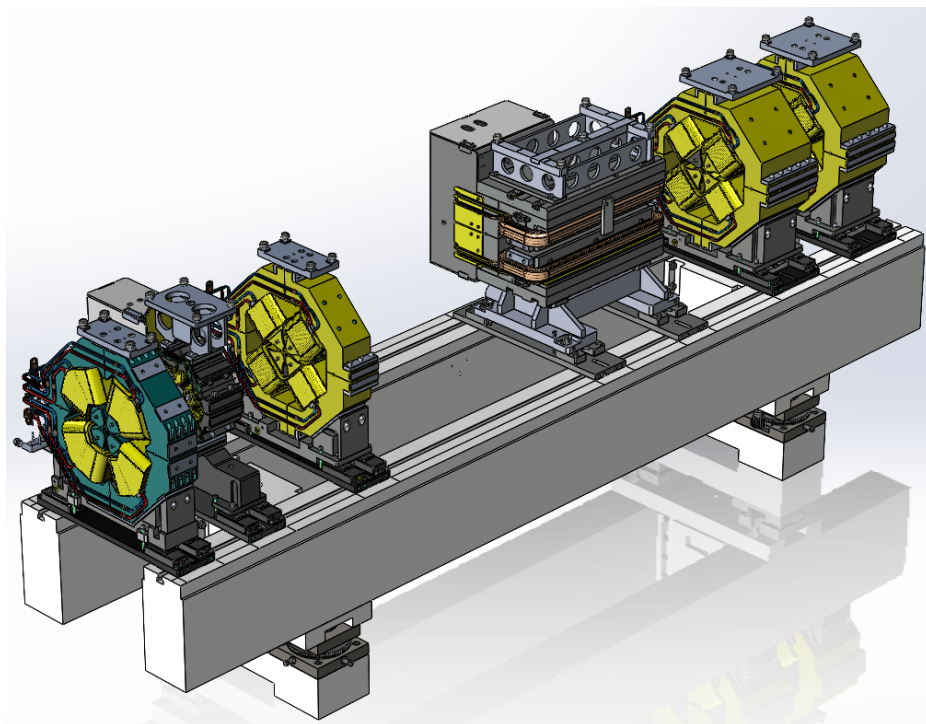


Рисунок 4.31 — Совместная геометрическая модель гирдера и магнитов

Необходимо заметить, что крепежные элементы, составные части системы охлаждения совместной системы гирдера и магнитов не оказывают существенного влияния на определяемые статические и динамические характеристики, поэтому

геометрическая модель рассматриваемой системы была упрощена. Общие упрощения, использованные при построении конечно-элементных моделей магнитов:

- крепежные элементы, не относящиеся к опорам, исключены и заменены контактными элементами;
- отверстия, соответствующие отброшенным крепежным элементам, заполнены материалом;
- распределение материала по каждому из магнитов считалось изотропным;
- плотность материала каждого магнита подбиралась так, чтобы его масса соответствовала массе позиции на чертеже рабочей документации.

Таким образом, была получена упрощенная геометрическая модель системы, на основе которой строилась конечно-элементная модель. Она использовалась для получения первичных оценок напряженно-деформированного состояния под воздействием весовых нагрузок и частот собственных колебаний.

По результатам расчётов доработано расположение и конструктивное исполнение регулируемых опор. Изменены геометрические параметры фундаментных опор и балок. Конструкция дополнена плитой с целью повышения жесткости гирдера в поперечном направлении. На основании выработанных конструкторских решений гирдер был произведен и испытан средствами экспериментального модального анализа (рисунок 4.32).



Рисунок 4.32 — Модальные испытания гирдера без магнитов

По результатам экспериментальных исследований было установлено, что формы собственных колебаний, соответствующие низшим тонам, происходят при совместном перемещении гирдера и блока фундамента, на который опираются регулируемые опоры (рисунок 4.33).

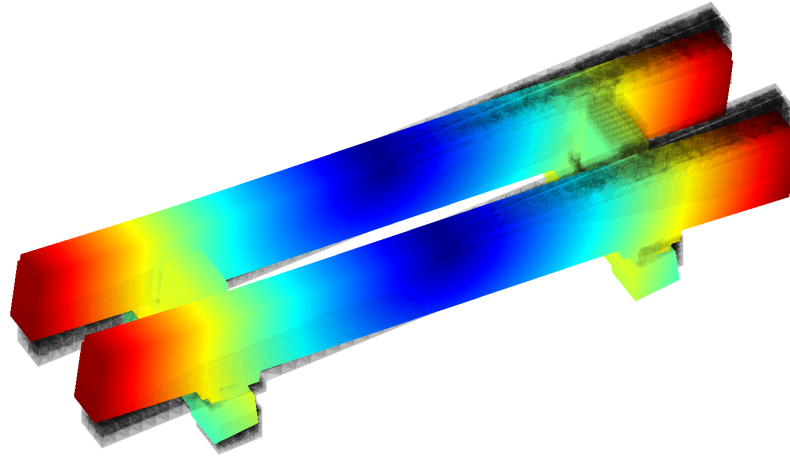


Рисунок 4.33 — Пример формы колебаний гирдера на упругом основании

Такое упругое поведение фундамента существенно отличается от модели жесткого закрепления, использованной в предварительных расчетах. Было принято решение построить модель упругого основания (рисунок 4.34), используя пружины, жесткости которых определялись автоматически по результатам решения задачи коррекции для первых пяти частот собственных колебаний, отвечающих этим движениям. Целевые значения частот достигнуты со степенью точности $2 \cdot 10^{-8}$ по критерию (2.69).

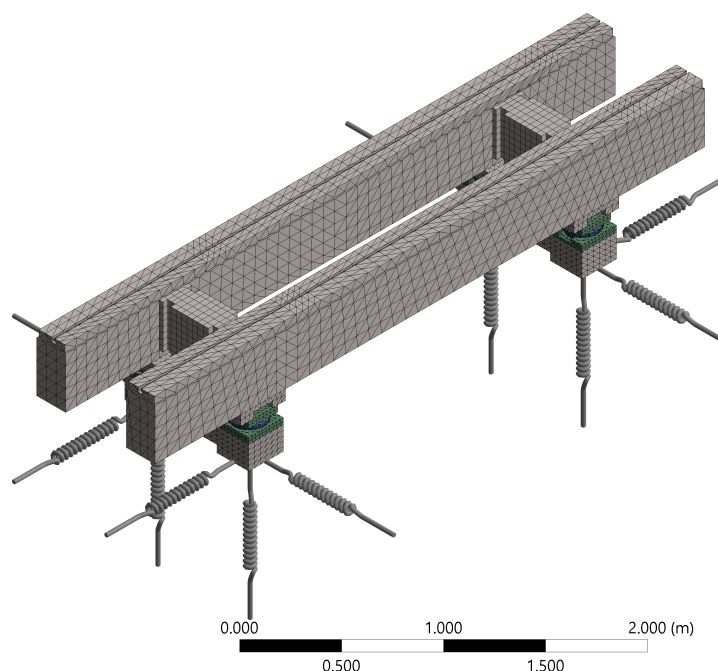


Рисунок 4.34 — Конечно-элементная модель гирдера на упругом основании

Полученная модель гирдера на фундаменте использовалась для осуществления одновременной коррекции по шести частотам упругих тонов собственных колебаний (рисунок 4.35). Коррекция КЭ-модели производилась без удержания частот собственных колебаний, соответствующих движениям на упругом основании. Это объясняется отсутствием экспериментальных данных о характере зависимости частот от уровня приложенных нагрузок. Целевые значения коррекции были достигнуты с высокой степенью точности (таблица 4.6).

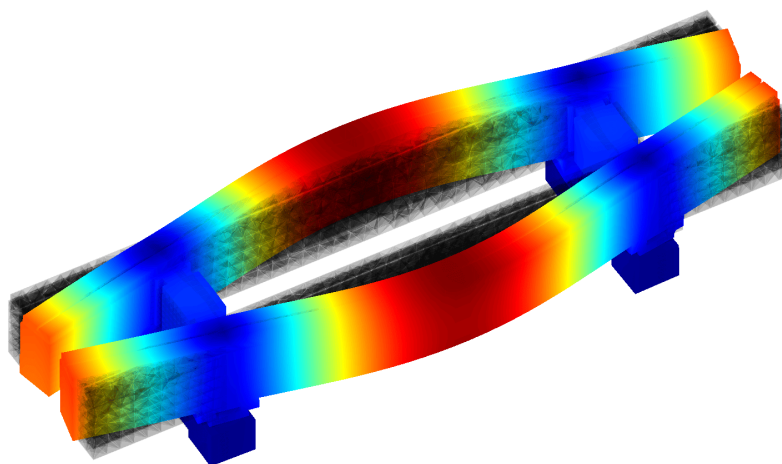


Рисунок 4.35 — Пример упругой формы колебаний гирдера

Таблица 4.6 — Результаты коррекции гирдера

Тон	Частота, Гц		Погрешность, %	
	Эксперимент	Исходная модель	До коррекции	После коррекции
6	119.51	135.08	13.03	0.00
7	140.97	146.46	3.89	
8	148.13	160.07	8.06	
9	189.65	210.48	10.98	
10	197.53	214.18	8.43	
11	242.24	253.51	4.65	

Наибольшие изменения узловых жесткостей (рисунок 4.36) достигаются в местах сопряжения конструктивных элементов гирдера. Минимальный критерий модального соответствия, связывающий формы колебания до и после коррекции, составил 0.9412 (рисунок 4.37). Суммарные модальные эффективные массы [174]

корректируемых тонов колебаний по направлениям глобальной системы координат составили: 79, 96 и 97 %.

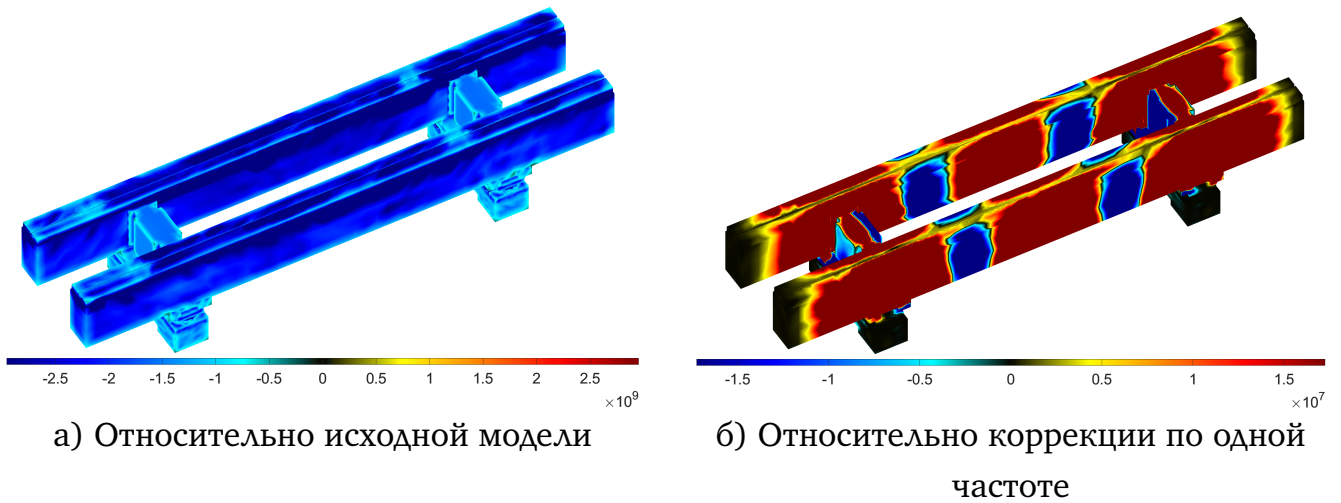


Рисунок 4.36 — Распределения изменений узловых жесткостей по всем линейным степеням свободы КЭ-модели до и после коррекции

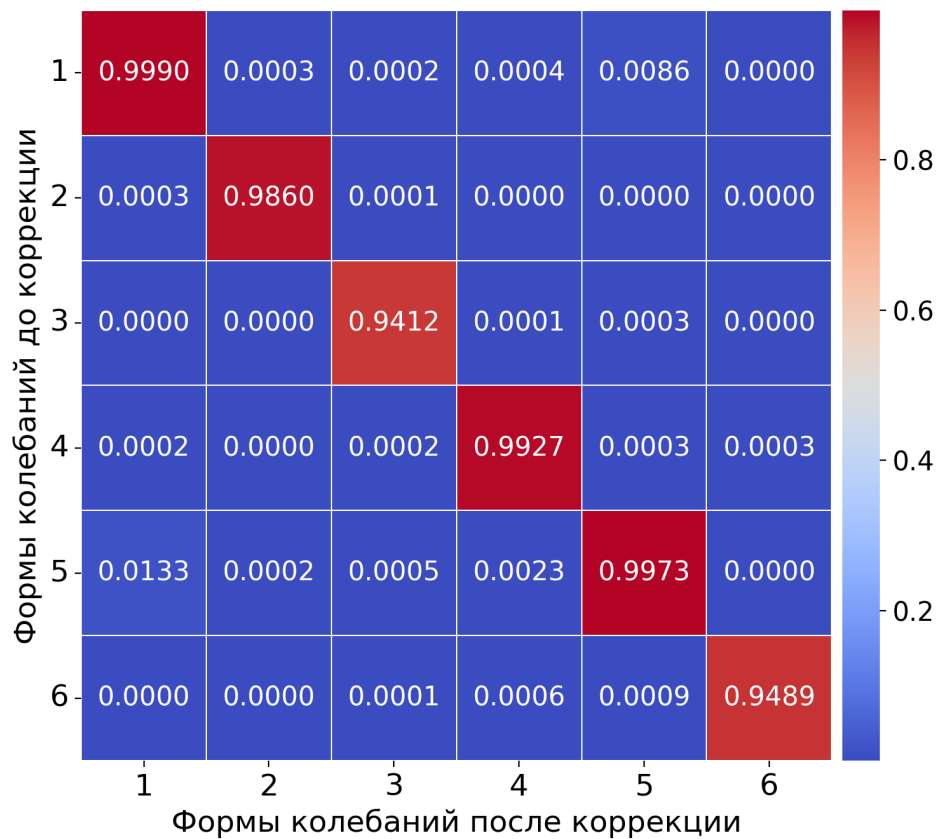


Рисунок 4.37 — Таблица соответствия форм колебаний до и после коррекции

Для оценки эффективности разработанных вычислительных алгоритмов, приведем данные о продолжительности работы программы на каждом этапе коррекции:

1. Уточнение упругих характеристик основания — 2 минуты.

2. Коррекция четырех упругих тонов, происходящих при преимущественном движении в горизонтальной плоскости — 7 минут.
3. Коррекция двух упругих тонов, происходящих при преимущественном движении в вертикальной плоскости — 1 минута.
4. Коррекция всех шести упругих тонов — 4 минуты.

Таким образом, длительность коррекции расчетной модели гирдера с числом степеней свободы 304 тысячи составила 14 минут. Уточнение расчетной динамической модели позволит улучшить эксплуатационные характеристики совместной системы гирдера и магнитов.

Выводы по главе 4

Разработанные методики использованы для решения практических задач коррекции, освобождения и синтеза расчетных динамических моделей конструкции. Получены следующие основные результаты:

1. Осуществлена последовательная коррекция динамически-подобной модели самолёта Ту-204 по шести наборам экспериментально определенных частот собственных колебаний. Показано, что на каждом шаге коррекции, дополняющим предыдущий одним тоном колебаний, происходит уточнение расчетной модели.
2. Выполнен синтез расчетных моделей составных частей модели каркаса зонтичной антенны. Податливость закрепления штанги учтена посредством подхода, состоящего в проведении дополнительных статических испытаний. Показано, что коррекция моделей составных частей приводит к уточнению частот собственных колебаний синтезированной модели.
3. Проведен экспериментальный модальный анализ отъемной части крыла изделия С-70. По результатам испытаний выявлено, что полученные частоты собственных колебаний консоли крыла существенно отличаются от расчетных. Однако, в результате применения разработанной методики коррекции, целевые значения частот были достигнуты с заданной степенью точности.
4. Проведена двухэтапная коррекция КЭ-модели гирдера для модульных секция накопителя ЦКП «СКИФ». На первом этапе проведено уточнение жесткостных характеристик основания по пяти частотам собственных ко-

лебаний, происходящих при совместном движении гирдера и фундамента. На следующем этапе, используя шесть экспериментально определенных частот, были успешно уточнены упругие характеристики гирдера. Показано, что формы собственных колебаний после коррекции остаются согласованными со своими исходными аналогами в смысле критерия модального соответствия.

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [175–178]. Практическая значимость полученных результатов подтверждается актами об использовании и внедрении (приложения В и Г).

Заключение

1. Разработана методика коррекции конечно-элементных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний, основанная на дополнении исходной модели корректирующими конечными элементами.
2. Исследования сходимости алгоритма и чувствительности методики коррекции расчетных моделей показали, что результаты коррекции устойчивы к погрешностям эксперимента.
3. Разработан способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями.
4. Развита методика расчетно-экспериментального модального анализа конструкций по результатам испытаний их составных частей. Разработана программа и обоснованы граничные условия в испытаниях составных частей. Создано программное обеспечение, реализующее полный цикл операций для решения задачи синтеза глобальных расчетных моделей из скорректированных моделей составных частей.
5. Формирование глобальной матрицы демпфирования конструкций по результатам испытаний их составных частей осуществляется в несколько этапов: по соотношениям между вынужденными монофазными и собственными колебаниями подтверждается диагональный вид матриц демпфирования составных частей в главных координатах, определяются обобщенные характеристики демпфирования. Используя гипотезу Е. С. Сорокина строятся начальные приближения матриц демпфирования составных частей в физической системе координат. Эти матрицы уточняются решением задачи коррекции. Формирование глобальной матрицы путем осуществляется посредством ассемблирования матриц демпфирования составных частей.
6. С целью получения исходных данных для коррекции создан комплекс программ, позволяющий проводить обработку и представление результатов модального анализа непосредственно в процессе испытаний. Разработано программное обеспечение для контроля параметров технического состояния изделий в процессе испытаний.

7. Эффективность разработанных методик и программного обеспечения подтверждена результатами решения практических задач коррекции расчетных моделей конструкций.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы

Перспективным направлением дальнейших исследований является развитие разработанных вычислительных алгоритмов для ускорения сходимости в задачах коррекции. Это особенно актуально при коррекции расчетных моделей с высокой степенью детализации. Было отмечено, что обобщенное отношение Рэлея отличается от значений собственных чисел, получаемых при решении обобщенной проблемы собственных значений. Причиной является численные округления в расчетах собственных форм колебаний с нулевыми собственными значениями.

Прикладной аспект дальнейшей работы выражается в создании вспомогательных программ, позволяющих учитывать информацию о корректирующих элементах в конечно-элементных пакетах, использованных для создания исходных моделей. Это обеспечит взаимодействие встроенными средствами с скорректированными расчетными моделями, в том числе их применение для решения задач вынужденных колебаний и нелинейной динамики.

Перспективным также является создание программного обеспечения для контроля параметров технического состояния изделий по эксплуатационным вибрациям.

Список литературы

1. *Bartilson D. T., Jang J., Smyth A. W.* Finite element model updating using objective-consistent sensitivity-based parameter clustering and Bayesian regularization // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2019. — no. 114. — P. 328–345.
2. Finite element model updating for repeated eigenvalue structures via the reduced-order model using incomplete measured modes / Y. Li, K. Tian, P. Hao, B. Wang, H. Wu, B. Wang // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2020. — no. 142. — P. 1–16.
3. Finite element model updating of liquid rocket engine nozzle based on modal test results obtained from 3-D SLDV technique / S. Yan, B. Li, F. Li, B. Li // *Aerospace Science and Technology*. — 2017. — no. 69. — P. 412–418.
4. Component data assisted finite element model updating of composite flying-wing aircraft using multi-level optimization / W. Zhao, A. Gupta, C. D. Regan, J. Miglani, R. K. Kapania, P. J. Seiler // *Aerospace Science and Technology*. — 2019. — no. 95. — P. 1–17.
5. Finite element model updating for structural applications / G. Girardi, C. Padovani, D. Pellegrini, M. Porcelli, L. Robol // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2020. — no. 370. — P. 1–19.
6. Modeling of plate heat exchanger based on sensitivity analysis and model updating / Y. Guo, F. Wang, M. Jia, M. Zhang // *Chemical Engineering Research and Design*. — 2018. — no. 138. — P. 418–432.
7. *Petersen O. W., Oiseth O.* Sensitivity-based finite element model updating of a pontoon bridge // *Engineering Structures*. — 2017. — no. 150. — P. 573–584.
8. *Bayraktar A., Sevim B., Altunisik A. C.* Finite element model updating effects on nonlinear seismic response of arch dam–reservoir–foundation systems // *Finite Elements in Analysis and Design*. — 2011. — no. 47. — P. 85–97.
9. *Dinh C. D., Nguyen T. T., Nguyen D. T.* A FE model updating technique based on SAP2000-OAPI and enhanced SOS algorithm for damage assessment of full-scale structures // *Applied Soft Computing Journal*. — 2020. — no. 89. — P. 1–12.

10. *Polanco N. R., May G., Hernandez E. M.* Finite element model updating of semi-composite bridge decks using operational acceleration measurements // *Engineering Structures*. — 2016. — no. 126. — P. 264–277.
11. Experimental modal analysis and finite element model updating for structural health monitoring of reinforced concrete radioactive waste packages / *J. N. Eiras, C. Payan, S. Rakotonarivo, V. Garnier* // *Construction and Building Materials*. — 2018. — no. 180. — P. 531–543.
12. *Simoen E., Roeck G. D., Lombaert G.* Dealing with Uncertainty in Model Updating for Damage Assessment: A Review // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2015. — no. 56–57. — P. 123–149.
13. *Lacayo R. M., Allen M. S.* Updating structural models containing nonlinear Iwan joints using quasi-static modal analysis // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2019. — no. 118. — P. 133–157.
14. *Yuan P. P., Ren W. X., Zhang J.* Dynamic tests and model updating of nonlinear beam structures with bolted joints // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2019. — no. 126. — P. 193–210.
15. *Huang B., Chen H.* A new approach for stochastic model updating using the hybrid perturbation-Garlekin method // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2019. — no. 129. — P. 1–19.
16. *Bao N., Wang C.* A Monte Carlo simulation based inverse propagation method for stochastic model updating // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2015. — no. 60–61. — P. 928–944.
17. Finite element model updating using the shadow hybrid Monte Carlo technique / *I. Boulkaibet, L. Mthembu, T. Marwala, M. I. Friswell, S. Adhikari* // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2015. — no. 52–53. — P. 115–132.
18. A model-updating approach based on the component mode synthesis method and perturbation analysis / *T. Wang, H. He, W. Yan, G. P. Chen* // *Journal of Sound and Vibration*. — 2018. — no. 433. — P. 349–365.
19. *Deng Z., Guo Z., Zhang X.* Interval model updating using perturbation method and radial basis function neural networks // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2017. — no. 84. — P. 699–716.

20. A stochastic model updating strategy-based improved response surface model and advanced Monte Carlo simulation / X. Zhai, C.W. Fei, Y. S. Choy, J. J. Wang // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2017. — no. 82. — P. 323–338.
21. *Fang S. E., Zhang Q. H., Ren W. X.* Parameter variability estimation using stochastic response surface model updating // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2014. — no. 49. — P. 249–263.
22. Bayesian based nonlinear model updating using instantaneous characteristics of structural dynamic responses / Y. Xin, H. Hao, J. Li, Z. C. Wang, H. P. Wan, W. X. Ren // *Engineering Structures*. — 2019. — no. 183. — P. 459–474.
23. *Lam H.F., Yang J., Au S. K.* Bayesian model updating of a coupled-slab system using field test data utilizing an enhanced Markov chain Monte Carlo simulation algorithm // *Engineering Structures*. — 2015. — no. 102. — P. 144–155.
24. Parameter selection for model updating with global sensitivity analysis / Z. Yuan, P. Liang, T. Silva, K. Yu, J. E. Mottershead // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2019. — no. 115. — P. 483–496.
25. *Mottershead J. E., Link M., Friswell M. I.* The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2011. — no. 25. — P. 2275–2296.
26. *Bakir P. G., Reynders E., Roeck G. D.* Sensitivity-based finite element model updating using constrained optimization with a trust region algorithm // *Journal of Sound and Vibration*. — 2007. — no. 305. — P. 211–225.
27. Sensitivity-based finite element model updating with natural frequencies and zero frequencies for damped beam structures / C. H. Min, S. Hong, S. Y. Park, D. C. Park // *IJNAOE*. — 2014. — no. 221. — P. 904–921.
28. *Hernandez E. M., Bernal D.* Iterative finite element model updating in the time domain // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2013. — no. 34. — P. 39–46.
29. *Chen L., Guo Y., Li L.* Structural dynamic model updating based on multi-level weight coefficients // *Applied Mathematical Modelling*. — 2019. — no. 71. — P. 700–711.

30. *Hua X. G., Ni Y. Q., Ko J. M.* Adaptive regularization parameter optimization in output-error-based finite element model updating // *Mechanical Systems and Signal Processing.* — 2009. — no. 23. — P. 563–579.
31. *Li X. Y., Law S. S.* Adaptive Tikhonov regularization for damage detection based on nonlinear model updating // *Mechanical Systems and Signal Processing.* — 2010. — no. 24. — P. 1646–1664.
32. Density filtering regularization of finite element model updating problems / P. Reumers, C. V. Hoorickx, M. Schevenels, G. Lombaert // *Mechanical Systems and Signal Processing.* — 2019. — no. 128. — P. 282–294.
33. On the application of singular value decomposition and Tikhonov regularization to ill-posed problems in hyperbolic passive location / I. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, J. V. Balbastre-Tejedor, E. Reyes // *Mathematical and Computer Modelling.* — 2013. — no. 57. — P. 1999–2008.
34. *Weber B., Paultre P., Proulx J.* Consistent regularization of nonlinear model updating for damage identification // *Mechanical Systems and Signal Processing.* — 2009. — no. 23. — P. 1965–1985.
35. *Qingguo F., Zhifu C., Dong J., Jingze L.* inventor; Univ Southeast, assignee. Composite structure correction method for finite element model based on cluster analysis. China Patent CN107357992A. 2018 March 3.
36. *Кузнецов О. А., Смыслов В. И.* Опыт корректирования расчетной динамической схемы по результатам резонансных испытаний // *Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского.* — 1979. — Т. 10, № 6. — С. 99–112.
37. *Zhifu C., Qingguo F., Dong J., Rui Z.* inventor; Univ Southeast, assignee. A complex variable differential sensitivity-based nonlinear structure finite element model correction method. China Patent CN109885896A. 2018 June 14.
38. *Feiner D., Griffin J.* inventor; Blade Diagnostics Corp, assignee. Refinement of finite element model of integrally bladed disk. USA Patent WO2019209410A1. 2019 October 31.
39. *Guo Q., Huang H., Yue L., Ming Z.* inventor; Univ Nanjing Aeronautics and Astronautics, assignee. Model updating method based on strain modal shape correlation. China Patent CN106529055A. 2017 March 22.

40. Z. *Guanglie*. inventor; Shenzhen Acad of Robotics, assignee. Method and system for monitoring health status of bridge structure based on dynamic model updating. China Patent CN107687872A. 2018 February 13.
41. Analysis of dynamic characteristics of the rigid body/elastic body coupling of air-breathing hypersonic vehicles / Z. Dong, T. Shuo, Z. Qiang, W. Rong // *Aerospace Science and Technology*. — 2016. — no. 48. — P. 328–341.
42. Reduction and coupling of substructures via Gram–Schmidt Interfacemodes / G. Battiato, C. M. Furrone, T. M. Berruti, B. I. Epureanu // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2018. — Vol. 336. — P. 187–212.
43. Reducing the impact of measurement errors in FRF-based substructure decoupling using a modal model / P. Peeters, S. Manzato, T. Tamarozzi, W. Desmet // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2018. — no. 99. — P. 384–402.
44. *Valk P. C.* Model reduction and interface modeling in dynamic substructuring. Application to a multi-megawatt wind turbine. — Siemens, 2010. — P. 84–112.
45. *D'Ambrogio W., Fregolent F.* Replacement of unobservable coupling DoFs in substructure decoupling // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2017. — no. 95. — P. 380–396.
46. *D'Ambrogio W., Fregolent F.* Inverse dynamic substructuring using the direct hybrid assembly in the frequency domain // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2014. — no. 45. — P. 360–377.
47. *Allen M., Mayes R.* Comparison of FRF and modal methods for combining experimental and analytical substructures // *Journal of Sound and Vibration*. — 2008. — P. 310–324.
48. *Allen M., Mayes R., Bergman E.* Experimental modal substructuring to couple and uncouple substructures with flexible fixtures and multi-point connections // *Journal of Sound and Vibration*. — 2010. — no. 329. — P. 4891–4906.
49. *de Klerk D., Rixen D. J., Voormeeren S. N.* General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques // *AIAA Journal*. — 2008. — Vol. 46, no. 5. — P. 1169–1181.

50. *Brunetti J., D'Ambrogio W., Fregolent A.* Dynamic coupling of substructures with sliding friction interfaces // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2020. — no. 141. — P. 1–19.
51. Rotational degrees of freedom: an investigation of their influence on the prediction of the dynamic behaviour of a coupled structure / T. P. Gialamas, D. T. Tsahalis, L. Bregant, D. Otte, H. Van der Auweraer // *Proceedings of Inter-Noise '96*. — Liverpool, UK, 1996. — P. 1395–1399.
52. Substructuring technique: improvement by means of singular value decomposition (SVD) / T. P. Gialamas, D. T. Tsahalis, D. Otte, H. Van der Auweraer, D. A. Manolas // *Applied Acoustics*. — 2001. — no. 62. — P. 1211–1219.
53. *Almeida R. A. B., Urgueira A. P. V., Maia N. M. M.* Evaluation of the performance of three different methods used in the identification of rigid body properties // *Shock and Vibration*. — 2008. — Vol. 15. — P. 467–479.
54. Neural-network-based sliding-mode control for multiple rigid-body attitude tracking with inertial information completely unknown / M. Xi, S. Fuchun, L. Hongbo, H. Bin // *Information Sciences*. — 2017. — no. 400. — P. 91–104.
55. Rigid body stiffness matrix for identification of inertia properties from output-only data / A. Malekjafarian, M. R. Ashory, M. M. Khatibi, M. SaberLatibari // *European Journal of Mechanics A/Solids*. — 2016. — no. 59. — P. 85–94.
56. О современных методиках наземных испытаний самолетов в аэроупругости / П. Г. Карклэ, В. А. Малютин, О. С. Мамедов, В. Н. Попковский, А. В. Смотров, В. И. Смыслов // *Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского*. — 2012. — № 2708. — С. 1–34.
57. *Dat R.* Determination des modes propres d'une structure par essai de vibration avec excitation non appropriée // *Rech. Aerosp.* — 1973. — no. 2. — P. 99–108.
58. *Dat R., Tretout R., Lafont M.* Essais de vibration d'une structure comportant du frottement sec // *Rech. Aerosp.* — 1975. — no. 3. — P. 169–174.
59. *Микушев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. — М. : Машиностроение, 1971. — С. 564.

60. *Смыслов В. И.* Некоторые вопросы методики многоточечного возбуждения при экспериментальном исследовании колебаний упругих конструкций // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. — 1972. — Т. 3, № 5. — С. 110–118.
61. *Хейлен В., Ламменс С., Сас П.* Модальный анализ: теория и испытания. — М. : Новатест, 2010. — С. 319.
62. *Бернс В. А.* Модальная идентификация динамических систем на основе монофазных колебаний // Научный вестник НГТУ. — 2010. — Т. 3, № 40. — С. 99–109.
63. Solar Impulse — How to validate the numerical model of a superlight aircraft with A340 dimensions / M. Boswald, Y. Govers, A. Vollan, M. Basien // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering. — Leuven, Belgium, 2010. — P. 2451–2466.
64. Advanced GVT Testing of the Gulfstream G650 / R. Brillhart, K. Napolitano, L. Morgan, R. LeBlanc // Journal of Sound and Vibration. — 2011. — no. 8. — P. 6–9.
65. *Peres M. A., Bono R. W., Brown D. L.* Practical aspects of shaker measurements for modal testing // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering. — Leuven, Belgium, 2010. — P. 2539–2550.
66. Modal parameter Estimation for large, complicated MIMO tests / A. Peter, R. Singhal, B. Peeters, J. Leuridan // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — no. 1. — P. 14–20.
67. *Pickrel C. R.* Airplane Ground Vibration Testing — Nominal Modal Model Correlation // Journal of Sound and Vibration. — 2002. — no. 11. — P. 18–23.
68. *Васильев К. И., Смыслов В. И., Ульянов В. И.* Экспериментальное исследование упругих колебаний летательных аппаратов с помощью многоканального оборудования АВДИ-1Н // Тр. ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. — 1975. — № 1634. — С. 1–6.
69. *Жаров Е. А., Смыслов В. И.* Точность определения колебательных характеристик упругой конструкции при резонансных испытаниях с многоточечным возбуждением // Уч. записки ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. — 1976. — Т. 7, № 5. — С. 88–97.

70. *Ушкалов В. Ф.* Об оценке погрешностей идентификации линейных механических систем алгебраическим способом // Прикладная механика. — 1974. — Т. 10, № 9. — С. 78–84.
71. *Бернс В. А.* Оценка точности определения характеристик собственных тонов при наличии случайных ошибок в экспериментальных данных // Вестник СибГАУ. — 2010. — Т. 5, № 31. — С. 208–212.
72. *Бернс В. А.* Погрешности определения характеристик собственных тонов при близких собственных частотах // Контроль, диагностика. — 2011. — Т. 3, № 153. — С. 12–16.
73. Влияние системы упругого вывешивания на точность результатов модальных испытаний летательных аппаратов / В. А. Бернс, А. В. Долгополов, Е. П. Жуков, Д. А. Маринин // Вестник СГАУ им. С.П. Королева. — 2016. — Т. 15, № 1. — С. 18–27.
74. *Baruch M.* Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests // AIAA Journal. — 1978. — Vol. 16, no. 11. — P. 1208–1210.
75. *Межин В. С., Обухов В. В.* Практика применения модальных испытаний для целей верификации конечно-элементных моделей конструкции изделий ракетно-космической техники // Космическая техника и технологии. — 2014. — Т. 1, № 4. — С. 86–91.
76. *Brincker R., Ventura C.* Introduction to operational modal analysis. — John Wiley and Sons, 2015. — P. 372.
77. *Magalhaes F., Cunha A.* Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2011. — no. 25. — P. 1431–1450.
78. *Overschee P., Moor B.* Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, applications. — Kluwer Academic Publishers, 1996. — P. 268.
79. *Nilsson O.* Experimental procedures for operational modal analysis of a power pack on a drill rig : Master's thesis / O. Nilsson ; Linköping University, Linköping, Sweden. — 2017. — P. 68.

80. *Peeters P., de Roeck G.* Stochastic system identification for operational modal analysis: a review // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* — 2001. — Vol. 123, no. 4. — P. 659–667.
81. *Cárdenas E. M., Medina L. U.* Non-Parametric Operational Modal Analysis Methods in Frequency Domain: a Systematic Review // *International Journal of Engineering and Technology Innovation.* — 2021. — Vol. 11, no. 1. — P. 34–344.
82. *Hermans L., van der Auweraer H., Guillaume P.* A frequency-domain maximum likelihood approach for the extraction of modal parameters from output-only data // *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis.* — Vol. 1. — Katholieke Universiteit Leuven, 1998. — P. 367–376.
83. *Verboven P.* Frequency-domain system identification for modal analysis : Ph. D. thesis / P. Verboven ; Vrije Universiteit Brussel. — 2002. — P. 250.
84. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator / P. Guillaume, P. Verboven, Vanlanduit S., van der Auweraer, B. Peeters // *Proceedings of IMAC.* — 2003. — P. 183–192.
85. *Peeters B., van der Auweraer.* Polymax: a revolution in operational modal analysis // 1st International Operational Modal Analysis Conference. — Copenhagen, Denmark, 2005. — P. 26–27.
86. *Rainieri C., Fabbrocino G.* Operational modal analysis of civil engineering structures. — Springer, 2014. — P. 322.
87. *Chen G. W., Chen X., Omenzetter P.* Modal parameter identification of a multiple-span post-tensioned concrete bridge using hybrid vibration testing data // *Engineering Structures.* — 2020. — no. 219. — P. 1–15.
88. *Pandit S. M.* Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space. — Wiley-Interscience, 1991. — P. 415.
89. *Maia N. M. M., Silva J. M. M.* Theoretical and Experimental Modal Analysis. — Research Studies Press, 1997. — P. 488.
90. *Vu V.-H.* NAFID — A Grid Tool for output only modal analysis // Surveillance, Vishno and AVE conference. — 2019. — P. 119–127.

91. *Peeters B.* System identification and damage detection in civil engineering : Ph. D. thesis / B. Peeters ; Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium. — 2000. — P. 257.
92. *Reynders E., Pintelon R., de Roeck G.* Uncertainty bounds on modal parameters obtained from Stochastic Subspace Identification // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2008. — Vol. 22, no. 4. — P. 948–969.
93. *Juang J.-N.* Applied System Identification. — Pearson College Div; Facsimile edition, 1994. — P. 394.
94. *Juang J. N., Pappa R.* An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction // *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series*. — 1985. — no. 5. — P. 620–627.
95. *Lin C. S., Lin M. H.* Output-only modal estimation using eigensystem realization algorithm with nonstationary data correlation // *Applied Sciences*. — 2021. — no. 11. — P. 1–20.
96. *Caicedo J. M.* Practical guidelines for the natural excitation technique (NExT) and the eigensystem realization algorithm (ERA) for modal identification using ambient vibration // *Experimental Techniques*. — 2011. — Vol. 35. — P. 52–58.
97. *Карклэ П. Г., Смыслов В. И.* Модальные испытания летательных аппаратов и воспроизведение силовых воздействий. — М. : Техносфера, 2017. — С. 156.
98. Экспериментальный модальный анализ летательных аппаратов на основе монофазных колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, Д. А. Маринин, В. В. Маленкова // *Известия Самарского научного центра РАН*. — 2018. — Т. 20, № 4. — С. 43–54.
99. *Кузнецов О. А., Смыслов В. И.* Опыт корректирования расчетной динамической схемы по результатам резонансных испытаний // *Ученые записки ЦАГИ*. — 1979. — Т. 10, № 6. — С. 99–112.
100. Finite element model updating of satellite sailboard based on sensitivity analysis / H. Luo, W. Wang, J. Fu, L. Jiao // *Shock and Vibration*. — 2019. — P. 1–12.
101. *Jang J., Smyth A.* Model updating of a full-scale FE model with nonlinear constraint equations and sensitivity-based cluster analysis for updating parameters // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2017. — Vol. 83. — P. 337–355.

102. *Asgarieh E., Moaveni B., Stavridis A.* Nonlinear finite element model updating of a large-scale infilled frame structures based on instantaneous modal parameter // Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. — Vol. 35. — New York, 2013. — P. 85–90.
103. *Sanayei M., Rohela P.* Automated finite element model updating of full-scale structures with PARAmeter Identification System (PARIS) // Advances in Engineering Software. — 2014. — Vol. 67. — P. 99–110.
104. A model updating approach based on the component mode synthesis method and perturbation analysis / T. Wang, H. He, W. Yan, G. P. Chen // Journal of Sound and Vibration. — 2018. — Vol. 433. — P. 349–365.
105. *Bathe K., Wilson E.* Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics // International journal for numerical methods in engineering. — 1973. — no. 6. — P. 213–216.
106. Разработка расчетно-экспериментального метода модального анализа крупногабаритных трансформируемых космических конструкций / В. А. Бернс, В. Е. Левин, Д. А. Красноруцкий, Д. А. Маринин, Е. П. Жуков, В. В. Маленкова, П. А. Лакиза // Научный журнал «Космические аппараты и технологии». — 2018. — С. 125–133.
107. Экспериментальный модальный анализ летательных аппаратов: учебник / В. А. Бернс, А. В. Долгополов, Е. П. Жуков, В. Н. Лушин, Д. А. Маринин. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. — С. 160. — ISBN: 978-5-7782-3209-9.
108. Shenzhou (spacecraft) [Электронный ресурс]. — URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shenzhou_\(spacecraft\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Shenzhou_(spacecraft)) (дата обращения: 11.02.2023).
109. PchConverter [Электронный ресурс]. — URL: <https://github.com/Qinterfly/PchConverter> (дата обращения: 19.02.2023).
110. Модальный анализ макета антенны космического аппарата по результатам испытаний его составных частей / В. А. Бернс, В. Е. Левин, Д. А. Красноруцкий, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза // Материалы XXII Международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 12–16 ноября 2018 г. — С. 84–85.
111. *Lakiza P. A., Krasnorutskiy D. A., Golysheva M. D.* Development of a Calculation Method for Modal Analysis of Large Transformable Space Structures // Science.

- Research. Practice. Proceedings 2018 IInd All Russia Academic and Research Conference of Graduate and Postgraduate Students. — Novosibirsk : Nstu pub., 2019. — P. 76–78. — ISBN 978-5-7782-3793-3.
112. Метод освобождения динамической расчетной модели летательного аппарата / Д. А. Красноруцкий, В. А. Бернс, П. А. Лакиза, В. Е. Левин // Научный журнал «Известия Самарского научного центра РАН». — 2019. — Т. 21, № 1. — С. 31–38.
113. *Lakiza P. A., Krasnorutskiy D. A. A Method for Updating Mathematical Models Obtained by Finite-Element Modelling // Progress through innovations. Proceedings 2019 VIII-th International Academic and Research Conference of Graduate and Postgraduate Students. — Novosibirsk : Nstu pub., 2019. — P. 151–153.*
114. Расчетно-экспериментальный метод модального анализа крупногабаритных трансформируемых конструкций / В. А. Бернс, Д. А. Красноруцкий, П. А. Лакиза, Д. А. Маринин, Е. П. Жуков // Материалы XXIII Международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 11–15 ноября 2019 г. — С. 82–83.
115. *Лакиза П. А., Красноруцкий Д. А. Метод коррекции математических моделей, полученных путем конечно-элементного моделирования // Труды Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». — Т. 9. — 2019. — С. 57–59.*
116. *Лакиза П. А. Разработка метода синтеза математических моделей крупногабаритных трансформируемых космических конструкций по результатам испытаний их составных частей // Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2020: Математика. — 2020. — С. 124.*
117. Разработка метода коррекции динамических конечно-элементных моделей по результатам частотных испытаний / П. А. Лакиза, Д. А. Красноруцкий, В. А. Бернс, Е. П. Жуков // Труды Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». — Т. 9. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 30 ноября–4 декабря 2020 г. — С. 23–26. — ISBN 978-5-7782-4297-5, ISBN 978-5-7782-4288-3.
118. Пат. 2728329 Российская Федерация, МПК G01M7/00. Способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями / Бернс В. А.,

- Жуков Е.П., Красноруцкий Д.А., Лакиза П.А. — № 2019119278 ; заявл. 19.06.19 ; опубл. 29.06.20, Бюл. № 22. — 15 с.
119. Метод коррекции конечно-элементных моделей динамических систем / Д. А. Красноруцкий, П. А. Лакиза, В. А. Бернс, Е. П. Жуков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2021. — № 3. — С. 84–95. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.08.
120. Экспериментальный модальный анализ летательных аппаратов на основе монофазных колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, Д. А. Маринин, В. В. Маленкова // Известия Самарского научного центра РАН. — 2018. — Т. 20, № 4. — С. 43–54.
121. Москалик Л. М. Расчёты и испытания на прочность. Экспериментальные методы определения частот и форм колебаний сложных пространственных конструкций в области низших собственных тонов. Методические рекомендации МР 84-83. — М., ВНИИНМАШ, 1983. — С. 39.
122. *Tiwari R.* Rotor Systems: Analysis and Identification. — CRC Press, 2017. — P. 1092. — ISBN: 978-1-138-03628-4.
123. *Bachschnid N., Tanzi E., Pennacchi P.* Cracked Rotors: a survey on static and dynamic behaviour including modelling and diagnosis. — Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2010. — P. 408. — ISBN: 978-3-642-01484-0.
124. Костюков В. Н., Науменко А. П. Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин: учебное пособие. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. — С. 360. — ISBN: 978-5-8149-1101-8.
125. Балицкий Ф. Я., Барков А. В. Неразрушающий контроль: справочник. Т. 7, Кн. 2. Вибродиагностика. — М. : Машиностроение, 2005. — С. 829. — ISBN: 5-217-03298-7.
126. Жуков Р. В. Обзор некоторых стандартов ISO/TC-108 в области диагностики машинного оборудования // Контроль. Диагностика. — 2004. — № 12. — С. 61–66.
127. *Zhuge Q., Lu Y., Yang S.* Non-stationary modelling of vibration signals for monitoring the condition of machinery // Mechanical Systems and Signal Processing. — 1990. — Vol. 4, no. 5. — P. 355–365.

128. *Lacey S. J.* Using vibration analysis to detect early failure of bearings // *Insight: Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*. — 2007. — Vol. 49, no. 8. — P. 444–446.
129. *Litak G.* Dynamics of a gear system with faults in meshing stiffness // *Nonlinear Dynamics*. — 2005. — Vol. 41, no. 1-3. — P. 415–421.
130. *Кисилев Ю. В., Кисилев Д. Ю., Туц С. Н.* Вибрационная диагностика систем и конструкций авиационной техники. — Самара : Изд-во СГАУ, 2012. — С. 207. — ISBN: 978-5-7883-0917-0.
131. *Постнов В. А.* Определение повреждений упругих систем путем математической обработки частотных спектров, полученных из эксперимента // *Механика твердого тела: Известия РАН*. — 2000. — Т. 6. — С. 155–160.
132. *Косицын А. В.* Метод вибродиагностики дефектов упругих конструкций на основе анализа собственных форм колебаний // *Приборы и методы измерений*. — 2011. — Т. 2, № 3. — С. 129–135.
133. *Perera R., Fang S., Huerta C.* Structural crack detection without updated baseline model by single and multiobjective optimization // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2009. — Vol. 23, no. 3. — P. 752–768.
134. *Dilena M., Morassi A.* Damage detection in discrete vibrating systems // *Journal of Sound and Vibration*. — 2006. — Vol. 289. — P. 830–850.
135. *Xu M., Wang S., Jiang Y.* Structural damage identification by a cross modal energy sensitivity based mode subset selection strategy // *Marine Structures*. — 2021. — Vol. 77. — P. 1–22.
136. *Barbieri N., Barbieri R.* Study of damage in beams with different boundary conditions // *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering*. — 2013. — Vol. 77, no. 6. — P. 399–405.
137. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review : Rep. : LA-13070-MS / Los Alamos National Laboratory ; Executor: S. W. Doebling, C. R Farrar, M. B Prime. — Los Alamos, NM : 1996. — P. 132.
138. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. — М. : Наука, 1996. — С. 169.

139. *Worlton D. C.* Ultrasonic testing with Lamb waves // *Non-Destructive Testing*. — 1957. — Vol. 15, no. 4. — P. 218–222.
140. *Worlton D. C.* Experimental confirmation of Lamb waves at megacycle frequencies // *Journal of Applied Physics*. — 1961. — Vol. 32. — P. 967–971.
141. *Kessler S. S., Spearing M. S., Soutis C.* Structural health monitoring in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures*. — 2002. — Vol. 11. — P. 269–278.
142. *Zaitsev V., Sas P.* Nonlinear response of a weakly damaged metal sample // *Journal of Vibration and Control*. — 2000. — Vol. 6. — P. 803–822.
143. *Bovsunovsky A. P., Matveyev V. V.* Vibrational diagnostics parameters of fatigue damage in elastic bodies // *Mechanical Fatigue of Metals: Proceeding of the 13-th International Colloquium (MFM)*. — Ternopoil, 2006. — P. 212–218.
144. *Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., В. Лушников Б.* Нелинейная вибродиагностика машин и механизмов. — Рига : Зинатне, 2008. — С. 366. — ISBN: 978-9984-32-194-3.
145. *Diana G., Bachmid N., Angel F.* An online crack detection method for turbine-generator rotors // *Proceeding of International Conference on Rotordynamics, JSME*. — 1986. — P. 385–390.
146. Контроль соосности установки отклоняемых поверхностей по результатам вибрационных испытаний / В. А. Бернс, А. П. Бобрышев, В. Л. Присекин, В. Ф. Самуйлов // *Вестник МАИ*. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 87–91.
147. Способ контроля люфтов в механических проводках управления самолетов / В. А. Бернс, А. П. Бобрышев, В. Л. Присекин, А. И. Белоусов, В. Ф. Самуйлов // *Полет*. — 2007. — Т. 12. — С. 50–53.
148. *Al-Khazali H., Askari M. R.* Geometrical and graphical representations analysis of Lissajous figures in rotor dynamic system // *IOSR Journal of Engineering*. — 2012. — Vol. 2, no. 5. — P. 971–978.
149. *Бернс В. А., Долгополов А. В.* Контроль зазоров в подвижных соединениях по результатам резонансных испытаний // *Вестник СибГАУ*. — 2013. — Т. 6. — С. 149–153.

150. Опыт контроля дефектов летательных аппаратов по параметрам вибраций / В. А. Бернс, Е. А. Лысенко, А. В. Долгополов, Е. П. Жуков // Известия Самарского научного центра РАН. — 2016. — Т. 18, № 4. — С. 86–96.
151. Диагностирование трещин в металлических панелях по нелинейным искажениям портретов колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, В. В. Маленкова, Е. А. Лысенко // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 6–17.
152. Numerical double integration of acceleration measurements in noise / Y. K. Thong, M. S. Woolfson, J. A. Crowe, B. R. Hayes-Gill, D. A Jones // Measurement. — 2004. — Vol. 36. — P. 73–92.
153. *Gao S. J., Liu F. S., Jiang C. Y.* Improvement study of modal analysis for offshore structures based on reconstructed displacements // Applied Ocean Research. — 2021. — Vol. 110. — P. 1–15.
154. Modal parameter identification of structures using reconstructed displacements and stochastic subspace identification / X. Guo, C. Li, Z. Luo, D. Cao // Applied Sciences. — 2021. — Vol. 11, no. 23. — P. 1–19.
155. Identification, decomposition and segmentation of impulsive vibration signals with deterministic components — a sieving screen case study / K. Gaşior, H. Urbańska, A. Grzesiek, R. Zimroz, A. Wyłomańska // Sensors. — 2020. — Vol. 20, no. 19. — P. 1–19.
156. XQ-58 Valkyrie [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.airwar.ru/enc/bpla/xq58.html> (дата обращения: 03.07.2022).
157. Диагностика процессов разрушения элементов конструкций летательных аппаратов / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, Е. А. Лысенко, В. В. Маленкова, П. А. Лакиза // Материалы XXI Международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 08–11 ноября 2017 г. — С. 84–86.
158. Контроль дефектов конструкций летательных аппаратов по портретам вынужденных колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза, В. В. Маленкова // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова. — Т. 1. — М. : ООО «ТРП», 2018. — С. 45–47.

159. Исследование способа выявления трещин по портретам вынужденных колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, Е. А. Лысенко, В. В. Маленкова, П. А. Лакиза // Материалы XXII Международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 12–16 ноября 2018 г. — С. 82–83.
160. Исследования достоверности диагностирования трещин по искажениям портретов вынужденных колебаний / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза, Е. А. Лысенко // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). — 2019. — Т. 21, № 2. — С. 26–39. DOI: 10.17212/1994-6309-2019-21.2-26-39.
161. Занина Э. А., Бернс В. А., Лакиза П. А. О возможности модальных испытаний самолётов на жёстких опорах // Труды Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». — Т. 9. — 2019. — С. 45–48.
162. Контроль зазоров в конструкциях технических изделий в процессе вибрационных испытаний / Н. А. Тестоедов, В. А. Бернс, Е. П. Жуков, Е. А. Лысенко, П. А. Лакиза // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). — 2021. — Т. 23, № 2. — С. 40–53. — DOI: 10.17212/1994-6309-2021-23.2-40-53.
163. Свидетельство 2021662965. Расчет обобщенных характеристик тонов собственных колебаний по результатам модальных испытаний «GenCalc»: программа для ЭВМ / П. А. Лакиза, В. А. Бернс, Е. П. Жуков (RU); правообладатель «Новосибирский государственный технический университет»; заявл. 02.08.2021; опубл. 10.08.2021.
164. Свидетельство 2021662816. Представление результатов модальных испытаний «ResponseAnalyzer»: программа для ЭВМ / П. А. Лакиза, В. А. Бернс, Е. П. Жуков (RU); правообладатель «Новосибирский государственный технический университет»; заявл. 02.08.2021; опубл. 05.08.2021.
165. Свидетельство 2021663099. Контроль дефектов в процессе вибрационных испытаний «DistortionFinder»: программа для ЭВМ / П. А. Лакиза, В. А. Бернс, Е. П. Жуков (RU); правообладатель «Новосибирский государственный технический университет»; заявл. 02.08.2021; опубл. 11.08.2021.
166. Результаты модальных испытаний как исходных данные для коррекции расчетных моделей летательных аппаратов / В. А. Бернс, Е. П. Жуков,

- П. А. Лакиза, Маленкова В.В // Материалы школы-семинара «Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов». — Новосибирск, 8–11 сентября 2021 г. — С. 12–14.
167. Бернс В. А. Лысенко Е. А, Жуков Е. П., Лакиза П. А. Использование портретов колебаний в контроле технического состояния летательных аппаратов // Материалы школы-семинара «Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов». — Новосибирск, 8–11 сентября 2021 г. — С. 14–15.
168. Control of Defects in Airframes during Ground Vibration Testing / V. A. Berns, E. A. Lysenko, E. P. Zhukov, P. A. Lakiza // Fundamental Problems of Aircraft Aerodynamics, Flight Dynamics, Strength and Flight Safety. Proceedings 17-th Russian-Chinese Conference. — Zhukovsky, 11–14 October 2021. — P. 71–72.
169. Идентификация дефектов в конструкциях летательных аппаратов по портретам вынужденных колебаний / В. А. Бернс, Е. А. Лысенко, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза // Материалы XXV Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 10–12 ноября 2021 г. — С. 69–70.
170. Результаты модальных испытаний как исходные данные для коррекции расчетных моделей летательных аппаратов / В. А. Бернс, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза, В. В. Маленкова, Д. О. Душухин // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». — 2022. — № 2. — С. 49–56.
171. Использование портретов колебаний в процессе контроля технического состояния летательных аппаратов / В. А. Бернс, Е. А. Лысенко, Е. П. Жуков, П. А. Лакиза, Д. О. Душухин // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». — 2022. — № 2. — С. 64–71.
172. Применение операционного модального анализа для определения динамических характеристик летательных аппаратов / В. А. Бернс, А. И. Годин, Е. П. Жуков, Д. А. Красноручский, П. А. Лакиза [и др.] // Материалы XXVI Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 9–11 ноября 2022 г. — С. 90–92.
173. Свидетельство 2023610282. Операционный модальный анализ летательных аппаратов «FlightLab»: программа для ЭВМ / П. А. Лакиза, Д. А. Красноручский, В. А. Бернс (RU); правообладатель «Новосибирский государственный

технический университет»; заявл. 10.01.2023; опубл. 10.01.2023.

174. *Ewins D. J. Modal Testing: Theory, Practice and Application.* — Wiley, 2009. — P. 592. — ISBN: 978-0-863-80218-8.
175. A Method for Finite Element Model Updating of Aircraft Based on Ground Vibration Testing Results / D. A. Krasnorutsky, V. A. Berns, E. P. Zhukov, P. A. Lakiza // *Fundamental Problems of Aircraft Aerodynamics, Flight Dynamics, Strength and Flight Safety. Proceedings 17-th Russian-Chinese Conference.* — Zhukovsky, 11–14 October 2021. — P. 65–66.
176. Метод коррекции расчетных динамических моделей летательных аппаратов / Д. А. Красноруцкий, В. А. Бернс, П. А. Лакиза, Е. П. Жуков, Д. А. Маринин // *Решетнёвские чтения. Материалы XXV Международной научно-практической конференции.* — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 10–12 ноября 2021 г. — С. 94–95.
177. Коррекция расчетной модели отъемной части крыла летательного аппарата / В. А. Бернс, А. И. Годин, Е. П. Жуков, Д. А. Красноруцкий, П. А. Лакиза, А. В. Пара // *Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «Динамика и виброакустика машин».* — Самара : Самарский университет, 21–23 сентября 2022 г. — С. 217–219.
178. К вопросу коррекции расчетных моделей летательных аппаратов / В. А. Бернс, А. И. Годин, Е. П. Жуков, Д. А. Красноруцкий, П. А. Лакиза [и др.] // *Материалы XXVI Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения».* — Т. 1. — Красноярск : СибГУ им. М. Ф. Решетнёва, 9–11 ноября 2022 г. — С. 87–89.

Приложение А

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

А.1 Контроль дефектов в процессе вибрационных испытаний

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021663099

**Контроль дефектов в процессе вибрационных
испытаний «DistortionFinder»**

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (RU)**

Авторы: **Лакиза Павел Анатольевич (RU), Бернс Владимир
Андреевич (RU), Жуков Егор Павлович (RU)**

Заявка № **2021662091**

Дата поступления **02 августа 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **11 августа 2021 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*



ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0x02A5CFBC00B1ACF59A40A2F08092E9A118
Владелец **Ивлиев Григорий Петрович**
Действителен с 15.01.2021 по 15.01.2035

Г.П. Ивлиев

А.2 Расчет обобщенных характеристик тонов собственных колебаний по результатам модальных испытаний

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021662965

Расчет обобщенных характеристик тонов собственных колебаний по результатам модальных испытаний «GenCalc»

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (RU)**

Авторы: **Лакиза Павел Анатольевич (RU), Бернс Владимир Андреевич (RU), Жуков Егор Павлович (RU)**



Заявка № **2021662063**

Дата поступления **02 августа 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **10 августа 2021 г.**

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0x02A5CFBC00B1ACF59A40A2F08092E9A118
Владелец **Ивлиев Григорий Петрович**
Действителен с 15.01.2021 по 15.01.2035

Г.П. Ивлиев

А.3 Представление результатов модальных испытаний

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021662816

Представление результатов модальных испытаний
«ResponseAnalyzer»

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (RU)**

Авторы: **Лакиза Павел Анатольевич (RU), Бернс Владимир
Андреевич (RU), Жуков Егор Павлович (RU)**

Заявка № 2021662024

Дата поступления 02 августа 2021 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 05 августа 2021 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности



ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0x02A5CFBC00B1ACF59A40A2F08092E9A118
Владелец **Ивлиев Григорий Петрович**
Действителен с 15.01.2021 по 15.01.2035

Г.П. Ивлиев

А.4 Операционный модальный анализ летательных аппаратов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023610282

Операционный модальный анализ летательных аппаратов «FlightLab»

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (RU)**

Авторы: **Лакиза Павел Анатольевич (RU), Красноруцкий Дмитрий Александрович (RU), Бернс Владимир Андреевич (RU)**

Заявка № 2023610010

Дата поступления 10 января 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 10 января 2023 г.

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности



ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14e40f0a94e6bd24145d5c7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

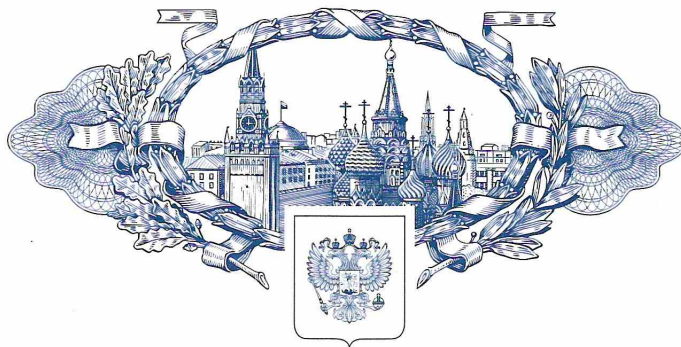
Ю.С. Зубов

Приложение Б

Патент на изобретение

Б.1 Способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ПАТЕНТ

НА ИЗОБРЕТЕНИЕ

№ 2728329

Способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями

Патентообладатели: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ" (RU), ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ "АВИАРЕСТАВРАЦИЯ" (RU)**

Авторы: *см. на обороте*

Заявка № **2019119278**

Приоритет изобретения **19 июня 2019 г.**

Дата государственной регистрации в

Государственном реестре изобретений

Российской Федерации **29 июля 2020 г.**

Срок действия исключительного права

на изобретение истекает **19 июня 2039 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Иелиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



(19) **RU** (11) **2 728 329**⁽¹³⁾ **C1**

(51) МПК
G01M 7/00 (2006.01)

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ

(52) СПК
G01M 7/00 (2020.01)

(21)(22) Заявка: 2019119278, 19.06.2019

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:
19.06.2019

Дата регистрации:
29.07.2020

Приоритет(ы):
(22) Дата подачи заявки: 19.06.2019

(45) Опубликовано: 29.07.2020 Бюл. № 22

Адрес для переписки:
630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20,
ФГБОУ ВО "НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ"

(72) Автор(ы):
Бернс Владимир Андреевич (RU),
Жуков Егор Павлович (RU),
Красноруцкий Дмитрий Александрович (RU),
Лакиза Павел Анатольевич (RU)

(73) Патентообладатель(и):
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА (RU),
ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ
ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
"АВИАРЕСТАВРАЦИЯ" (RU)

(56) Список документов, цитированных в отчете
о поиске: О современных методиках
наземных испытаний самолетов в
аэроупругости / Карклз П.Г., Малютин В.А.,
Мамедов О.С., Поповский В.Н., Смотров А.В.,
Смыслов В.И. // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е.
Жуковского, 2012, вып. 2708. - 34 с. RU 2658125
C1, 19.06.2018. RU 2499239 C1, 20.11.2013. RU
2489696 C1, 10.08.2013. RU 2677942 C2,
22.01.2019. RU 2568959 C1, (см. прод.)

(54) Способ определения собственных частот и форм колебаний свободной конструкции по результатам испытаний этой конструкции с наложенными связями

(57) Реферат:
Изобретение относится к области классического экспериментального модального анализа конструкций. При реализации способа строят расчетную динамическую модель свободной конструкции, которую корректируют по результатам наземных модальных испытаний. На время испытаний объект исследований фиксируют специальной системой упругого вывешивания, характеристики которой вводят в расчетную модель наложением внешних связей.

В испытаниях выделяют собственные тона конструкции в заданном диапазоне частот методом фазового резонанса. По частотам фазовых резонансов определяют собственные частоты колебаний тонов, которые используют для прямой коррекции матриц жесткости и/или масс расчетной модели. Затем расчетную модель освобождают от внешних связей: закрепленную модель «устанавливают» на подвижную платформу, которая имеет инерционные

RU 2 7 2 8 3 2 9 C 1

RU 2 7 2 8 3 2 9 C 1

Приложение В

*Акты об использовании результатов диссертационной
работы*

В.1 ПАО «Объединенная авиастроительная корпорация»

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель управляющего
директора – директор ОКБ Сухого

М.Ю. Стрелец



АКТ

Настоящим актом подтверждает, что методики, разработанные в диссертации Лакизы П.А. «Коррекция расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний», использованы в конструкторско-технологической доводке изделий Су-57 и С-70. Эффективность доводочных работ подтверждена результатами наземных и летных испытаний.

Главный конструктор по прочности —
начальник НИО-6

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Шкода".

А.В. Шкода

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Шкода", with the date "16.02.2023" written below it.

В.2 ЦКП «Сибирский кольцевой источник фотонов»



**ЦЕНТР КОЛЛЕКТИВНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ИСТОЧНИК ФОТОНОВ»**
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ НАУКИ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«ИНСТИТУТ КАТАЛИЗА ИМ. Г.К. БОРЕСКОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(ЦКП «СКИФ»)

По месту требования

Юридический адрес: Россия, 630559, Новосибирская обл.
р.п. Кольцово, Никольский проспект, д. 1,
Почтовый адрес: Россия, 630090, г. Новосибирск,
Морской проспект, д.2
Тел.: (383) 286-87-78; факс: (383) 330-83-56
E-mail: skif@srf-skif.ru; https://srf-skif.ru
ОКПО 53356079; ОГРН 1025403659126;
ИНН 5408100177; КПП 543343001

21 ФЕВ 2023 № Чех. СКИФ-30

На № _____ от _____

Акт-справка о практическом использовании результатов диссертационной работы Лакизы Павла Анатольевича «Коррекция расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний»

Настоящим актом-справкой подтверждаем, что методики, разработанные в диссертации Лакизы П.А. «Коррекция расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний», успешно применены при конструировании и тестировании прототипа гирдера для модульных секций основного накопительного кольца источника синхротронного излучения поколения 4+ с энергией 3 ГэВ ЦКП «СКИФ».

Гирдер, установленный на бетонное основание, подвергался модальным испытаниям, по результатам которых была уточнена его расчетная динамическая модель и уточнены жесткостные характеристики основания. Коррекция расчетных моделей гирдера и бетонного основания производилась с помощью методик, разработанных в диссертации.

Уточнение расчетной динамической модели гирдера позволит улучшить его эксплуатационные характеристики.

Директор, чл.-корр. РАН



Е.Б. Левичев

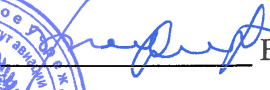
Приложение Г

Акт о внедрении результатов диссертационной работы

**Г.1 ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации
имени С. А. Чаплыгина»**


УТВЕРЖДАЮ
Директор ФАУ
«СибНИА им. С.А. Чаплыгина»




В.Е. Барсук
«22» февраля 2023г.

**АКТ
внедрения результатов диссертационной работы**

Настоящим актом подтверждается, что методики, разработанные в диссертации Лакизы П.А. «Коррекция расчетных моделей летательных аппаратов по результатам модальных испытаний», внедрены в практику проведения модальных испытаний летательных аппаратов и использованы в испытаниях самолетов Су-30, Су-34, Як-130, Як-152 и МС-21. При этом получен технический эффект, заключающийся в контроле параметров технического состояния изделий в процессе испытаний.

Научный руководитель
ФАУ «СибНИА им. С.А. Чаплыгина»  В.Л. Чемезов